

Mecânica – Rotações

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

29 de Setembro de 2014

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Conteúdo

4	Rotações	1
4.1	Introdução	1
4.2	Cinemática	1
4.2.1	Exercícios	3
4.3	Energia rotacional	3
4.3.1	Exercícios	7
4.4	Torque e momentum angular	7
4.5	Giroscópios	12
4.5.1	Exercícios	14
4.6	As equações de Euler	14
4.6.1	Taxas de variação no tempo	14
4.6.2	Tensor de Inércia	16
4.6.3	Momentum angular e torque	20
4.6.4	As Equações de Euler	21
4.6.5	Exercícios	23

Capítulo 4

Rotações

4.1 Introdução

Estudamos as leis que controlam o movimento de translação. No entanto, o movimento mais geral é composto de translação e rotação. Rotações estão presentes no nosso cotidiano: o disco rígido do seu computador está em rotação, as rodas de um automóvel estão em rotação, as hélices de um ventilador ou de um avião estão em rotação, a Terra está em rotação neste exato instante. Estaremos discutindo aqui as leis que controlam o movimento de rotação.

Iniciaremos nossos estudos na Seção 4.2 com a parte cinemática do movimento de rotação. Deslocamento, velocidade e aceleração angulares serão introduzidas vetorialmente e de forma construtiva. Apenas as propriedades básicas de derivadas e da álgebra de vetores e produtos escalar e vetorial serão necessárias. As demais seções trataram da dinâmica rotacional. A energia rotacional será introduzida construtivamente na Seção 4.3. Veremos, nesta seção, a necessidade e utilidade de integrais múltiplas. No entanto, não precisa ter conhecimentos sobre integrais múltiplas: tente aprender a lidar com elas através dos exemplos. As quantidades dinâmicas importantes como torque e momentum angular, bem como as leis de conservação para o movimento rotacional, serão discutidas na Seção 4.4. Estabeleceremos nesta seção, também seguindo uma linha construtivista, o equivalente à segunda lei de Newton para o movimento rotacional. Novamente, apenas as propriedades de derivadas e de produtos escalar e vetorial serão necessárias. Uma aplicação muito interessante (giroscópios) será considerada na Seção 4.5. A Seção 4.6, opcional numa primeira leitura, esta-

belece as equações de Euler para as rotações. Estas equações são mais gerais e revelam o caráter matricial do momento de inércia, até então considerado como escalar. Isto justifica a necessidade de um curso sobre Álgebra Linear. Como de praxe, os exercícios de cada seção complementam seus estudos, portanto, faça-os enquanto estuda o texto.

4.2 Cinemática

Precisaremos definir três quantidades vetoriais: deslocamento angular, velocidade angular e aceleração angular. Para simplificar nossa tarefa, vamos considerar um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo. Mais tarde, poderemos permitir que o eixo de rotação esteja em movimento translacional.

Corpo rígido, o que é um corpo rígido? Um corpo rígido é um sistema de partículas, discreto ou contínuo, onde as distâncias relativas entre partículas são mantidas fixas por forças internas. É importante termos em mente que as partículas que constituem um corpo rígido não apresentam qualquer tipo de movimento relativo entre elas. Desta forma, podemos nos concentrar em uma partícula qualquer do corpo rígido para definirmos nossas quantidades cinemáticas.

A Figura 4.1 mostra de forma esquemática um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo. No momento, não importa escrever o eixo de rotação em algum sistema de coordenadas. O fato importante aqui é que este eixo de rotação define uma direção particular no espaço. Certamente escolheríamos esta direção particular para ser a direção de um dos eixos de nosso sistema de coordenadas. Vamos colocar um versor \hat{n} ao longo

do eixo de rotação, como indicado na Figura 4.1.

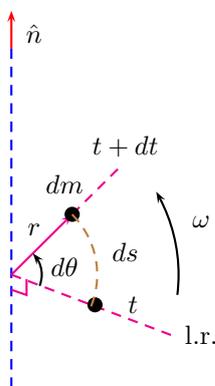


Figura 4.1: Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. dm é uma quantidade infinitesimal de massa deste corpo rígido. A linha de referência (l.r.) é perpendicular ao eixo de rotação.

Além do eixo de rotação, também precisaremos de um segundo eixo fixo, perpendicular ao eixo de rotação, o qual denominaremos simplesmente de “linha de referência” (l.r.). Esta linha de referência é usada para medirmos o deslocamento angular θ da seguinte forma: em um certo instante t , nós prestamos atenção a uma determinada partícula de massa dm , localizada a uma distância r do eixo de rotação, como mostrado na Figura 4.1. Note que r é a distância de um ponto a uma reta (passando pelo eixo de rotação). Num instante posterior $t+dt$, nossa partícula encontra-se numa posição diferente, devido ao movimento de rotação. Como esta partícula (bem como todas as outras) está fixa no corpo rígido, a distância r dela até o eixo de rotação não pode mudar. Assim, a nossa partícula executa um movimento circular de raio r . Assim, a posição de uma partícula qualquer no corpo rígido pode ser especificada por um único número (um grau de liberdade): o ângulo θ medido em radianos a partir da linha de referência. Se este ângulo é θ em t , então em $t + dt$ ele é $\theta + d\theta$. Feito isto, temos tudo que precisamos para definirmos nossas grandezas cinemáticas.

O vetor deslocamento angular é definido como sendo o vetor

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \hat{n}, \quad (4.1)$$

ou seja, um vetor na direção do eixo de rotação, de módulo igual ao deslocamento angular. O sentido

do vetor deslocamento angular é dado pela regra da mão direita onde o indicador indica o sentido da rotação e o polegar indica o sentido do vetor \hat{n} . Não podemos esquecer que o deslocamento angular deve ser calculado em radianos (π radianos = 180 graus).

Em geral, o ângulo de rotação $\theta = \theta(t)$ terá uma dependência temporal complicada. Conseqüentemente, a taxa de variação temporal do vetor deslocamento angular é a velocidade angular e a taxa de variação temporal do vetor velocidade angular é a aceleração angular,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \dot{\theta} \hat{n}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \ddot{\theta} \hat{n}, \quad (4.2)$$

respectivamente. Observe que estes três vetores são paralelos ao eixo de rotação. Note também que o vetor \hat{n} é independente do tempo (eixo de rotação fixo). Tome cuidado para não confundir a direção e o sentido do vetor velocidade angular com a própria rotação. A unidade de velocidade angular é radianos por segundo (rad/s) e da aceleração angular é radianos por segundo por segundo (rad/s²). Radiano não tem dimensões; ele indica apenas que uma circunferência de raio unitário tem 2π subintervalos angulares medidos em radianos, equivalentes a 360 subintervalos angulares medidos em graus (faça o Exercício 1).

Note a semelhança entre as quantidades cinemáticas do movimento de translação com as quantidades cinemáticas do movimento de rotação. De fato, podemos ir além desta similaridade. Observe novamente a Figura 4.1. Nela, o deslocamento ds pode ser relacionado ao deslocamento angular $d\theta$ pela geometria plana:

$$ds = r d\theta. \quad (4.3)$$

Assim, podemos relacionar o módulo da velocidade tangencial v da nossa partícula com o módulo da velocidade angular ω ,

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega. \quad (4.4)$$

Naturalmente, derivando mais uma vez em relação ao tempo, lembrando que a distância r é independente do tempo, obteremos uma relação similar entre o módulo da aceleração tangencial a e o módulo da aceleração angular α ,

$$a = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha. \quad (4.5)$$

Como a nossa partícula não pode movimentar-se na direção radial, a aceleração radial (centrípeta) não precisa ser considerada, pois há forças internas que mantêm as partículas em equilíbrio nesta direção.

Note que as relações (4.3), (4.4) e (4.5) são escalares. Podemos obter uma versão vetorial para elas? Certamente. Basta usarmos algumas propriedades do produto vetorial. Primeiro, observe que a velocidade tangencial e a velocidade angular são vetores perpendiculares entre si. Mesma observação para as acelerações. Podemos também definir um vetor “distância” $\mathbf{r} = r\hat{r}$, com o vetor \hat{r} apontando (perpendicularmente) do eixo de rotação para a partícula de massa dm (veja a Figura 4.1). Este vetor \hat{r} é perpendicular a todos os demais vetores ($\hat{r} \cdot \hat{n} = 0$). Então temos duas trinças de vetores mutuamente ortogonais, $\{\mathbf{v}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}\}$ e $\{\mathbf{a}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}\}$. Também conhecemos a relação entre seus módulos, (4.4) e (4.5). Portanto, após um pouco de reflexão, podemos escrever (faça o Exercício 2)

$$d\mathbf{s} = -\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.6)$$

Vale observar que podemos escrever também uma relação vetorial entre os vetores deslocamentos somente numa forma infinitesimal. Mantenha sempre em mente que r aqui é a distância entre o ponto onde está a massa sendo observada e o eixo de rotação (distância de um ponto até uma reta). Lembre-se também que usamos r , em outras ocasiões, para indicar o módulo do vetor posição \mathbf{r} em algum sistema de coordenadas. Deixaremos claro quando estaremos usando o vetor \mathbf{r} para indicar o vetor posição em relação a origem de algum sistema de coordenadas.

Importante. Guarde a estrutura geral entre as grandezas cinemáticas translacionais e rotacionais: grandezas translacionais = produto vetorial entre as grandezas cinemáticas rotacionais e o vetor distância \mathbf{r} , onde $r = |\mathbf{r}|$ é a distância entre o eixo de rotação e uma partícula do corpo rígido.

Não devemos esquecer que as grandezas cinemáticas rotacionais são definidas em termos de um eixo de rotação, o qual deve ser mantido fixo no espaço. Também não deve ser esquecido que todas as partículas do corpo rígido possuem as mesmas grandezas cinemáticas rotacionais, mas podem ter grandezas cinemáticas translacionais distintas. Por exemplo, quanto mais distante do eixo de rotação, maior é a velocidade tangencial de uma partícula.

Como aplicação imediata disto, temos a agência espacial européia, instalada na América do Sul (Guiana Francesa), próxima ao equador. Assim, parte da velocidade de escape será fornecida pelo movimento de rotação da Terra. Esta contribuição é máxima no equador (cerca de 1674 km/h).

Outra aplicação das relações (4.6) é na indústria fonográfica. No disco de vinil, a velocidade angular é mantida constante (cerca de 33 rpm). Isto significa que um anel circular na borda interna contém o mesmo intervalo de tempo de informação musical que um anel na borda externa, pois ambos têm um deslocamento angular igual a 2π radianos. Uma vez que a velocidade angular é a mesma, o intervalo de tempo também será o mesmo. A desvantagem neste processo é a necessidade da informação no anel interno ser comprimida, pois o comprimento deste anel é menor. Em um CD, o mecanismo de rotação é construído de tal forma a manter a velocidade tangencial constante onde a leitura (via um *laser*) está sendo feita. Desta forma, a informação musical pode ser gravada de forma uniforme.

4.2.1 Exercícios

Exercício 1

Uma roda gira com uma aceleração angular constante de 3.5 rad/s^2 . A velocidade angular da roda é de 2 rad/s em $t = 0$. Suponha que a posição angular seja $\theta = 0$ em $t = 0$. (a) Qual é o ângulo percorrido pela roda entre $t = 0$ e $t = 2 \text{ s}$? (b) Qual é a velocidade angular em $t = 2 \text{ s}$? Expresse também esta velocidade angular em voltas (ou revoluções) por minuto (rpm).

Exercício 2

Verifique explicitamente que as relações (4.4) e (4.5) podem ser obtidas de (4.6) e que o sentido de \mathbf{v} e \mathbf{a} estão corretos.

4.3 Energia rotacional

Se tem movimento, deve haver energia cinética. Neste caso, energia cinética rotacional. Supondo que o nosso corpo rígido da Figura 4.1 seja contínuo (ou discreto; um certo número de massas interligadas rigidamente), então a nossa partícula deve ter uma massa infinitesimal dm (ou m_i , se for o caso discreto) a uma distância r (r_i no caso discreto) do eixo de rotação. Caso o corpo rígido seja discreto,

então ele é constituído por N partículas de massa m_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Em qualquer caso, a energia cinética total é a soma das energias cinéticas de cada partícula,

$$T = \int \frac{1}{2} dm v^2 = \int \frac{1}{2} dm (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2, \quad (4.7)$$

com

$$I = \int r^2 dm, \quad \int dm = M \text{ (caso contínuo)}, \quad (4.8)$$

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 m_i, \quad \sum_{i=1}^N m_i = M \text{ (caso discreto)}. \quad (4.9)$$

A quantidade I é denominada de momento de inércia.

Note a semelhança da última expressão em (4.7) com a expressão da energia cinética de uma massa m em um movimento translacional ($T = mv^2/2$). Desta semelhança aprendemos o significado físico do momento de inércia: ele mede a inércia rotacional. Quanto maior o momento de inércia de um corpo, mais difícil é alterar seu estado de rotação. Porém, temos aqui uma novidade importante: o momento de inércia definido em (4.8) depende da escolha do eixo de rotação (através da distância r até o eixo). Portanto, ao contrário da massa m , o momento de inércia I não é uma propriedade intrínseca de um corpo, pois depende também de como a massa total está distribuída em torno do eixo de rotação.

Vejamos o que acontece quando nosso corpo rígido é composto por uma única partícula (pontual) de massa m . Neste caso o momento de inércia (4.8) é $I = mr^2$. A energia cinética rotacional (4.7) pode ser escrita como $T = mr^2\omega^2/2 = mv^2/2$, a qual é a forma usual da energia cinética do movimento translacional (circular). Lembre-se que o eixo de rotação deve ser mantido fixo. Caso o eixo de rotação esteja em movimento, teremos também a energia cinética de translação do corpo rígido.

Vamos supor agora que o nosso corpo rígido contenha duas partículas de massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância l . Vamos supor inicialmente que o eixo de rotação passe pela partícula m_1 . Neste caso, o momento de inércia deste sistema é

$$I = m_1 0^2 + m_2 l^2 = m_2 l^2. \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, a energia cinética rotacional (a

única energia cinética deste sistema) é

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m_2 l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (4.11)$$

Esta é a mesma energia cinética de uma única partícula de massa m_2 girando a uma distância l do eixo de rotação. Vamos agora mudar o eixo de rotação para o centro de massa¹ do sistema, definido pela posição média (com pesos dados pelas massas)

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2), \quad M = m_1 + m_2, \quad (4.12)$$

onde \mathbf{r}_i são os vetores posições das massas m_i em relação a algum sistema de coordenadas previamente escolhido de forma que $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l$. Devemos tomar o cuidado de manter este novo eixo de rotação paralelo ao primeiro. Se os módulos r_1 e r_2 satisfazem $l = r_1 + r_2$, isto significa que a origem do nosso sistema de coordenadas foi colocada no centro de massa, $\vec{R} = 0$ (faça o Exercício 3). Com esta escolha, temos $m_1 r_1 = m_2 r_2$ (faça o Exercício 3). Aqui, tanto r_1 quanto r_2 são constantes no tempo. O momento de inércia neste caso,

$$I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) r_1^2, \quad (4.13)$$

é diferente do anterior calculado em (4.10), ou seja (faça o Exercício 3),

$$I = I_0 + M r_1^2. \quad (4.14)$$

Este resultado é importante e é conhecido como o teorema dos eixos paralelos. Como este sistema de duas partículas que utilizamos tem nada de especial, podemos esperar que este resultado seja válido para qualquer outro sistema. De fato, sem nos preocuparmos com uma demonstração formal, podemos enunciá-lo de forma geral.

Teorema 4 (Eixos Paralelos)

Seja M a massa total de um corpo rígido (contínuo ou discreto). Seja I_0 o momento de inércia em relação a um eixo de rotação passando pelo centro de massa. Seja I o momento de inércia em relação a um segundo

¹A importância do centro de massa é devido ao fato de podermos descrever o movimento de um corpo rígido com massa total M sob a ação de uma força resultante (externa) \vec{F} como o movimento de uma massa pontual M , localizada no centro de massa, atuada por uma força $\vec{F} = M\ddot{\vec{R}}$.

eixo de rotação paralelo ao primeiro. Seja l a distância entre estes dois eixos de rotação. Então,

$$I = I_0 + Ml^2. \quad (4.15)$$

Note que o momento de inércia em relação ao centro de massa é o menor valor do momento de inércia que um determinado corpo rígido pode ter. Note também o quanto estamos aprendendo usando sistemas simples e revendo conceitos fundamentais (cinemática e energia cinética). Por isto que conceitos fundamentais são fundamentais: eles formam a base do nosso conhecimento.

Que tal um pouquinho de exercício em cálculo diferencial e integral usando integrais múltiplas? A tarefa matemática que executaremos aqui é o cálculo do momento de inércia de um corpo rígido contínuo. Naturalmente, faremos isto usando sistemas simples. A situação mais simples que podemos encontrar é uma distribuição linear de massa. Sendo mais específico, vamos considerar uma vareta delgada (ou um fio muito fino) com dois formatos: retilíneo e circular. Vamos considerar uma situação ideal no seguinte sentido: a única dimensão que realmente importa é o comprimento do fio, as outras duas dimensões são muito pequenas e serão ignoradas. Isto é o que é denominado de uma distribuição linear de massa. Suponha que o fio tenha um comprimento l e uma massa total M , independentemente de seu formato. A densidade linear de massa λ é definida da seguinte forma. Primeiro escolhemos um comprimento infinitesimal ds em qualquer lugar no fio. Neste comprimento infinitesimal ds cabe uma quantidade também infinitesimal dm de massa. A densidade linear de massa é definida pela razão massa/comprimento,

$$\lambda = \frac{dm}{ds}. \quad (4.16)$$

Conhecendo a densidade, podemos calcular imediatamente a massa total do corpo,

$$M = \int dm = \int \lambda ds = \int \lambda(s) ds. \quad (4.17)$$

Esta integral deve ser feita em toda a região contendo massa, como indicado nos exemplos seguintes.

Cabe aqui uma observação importante (independente da forma do fio). Podemos encontrar duas situações: uma onde a densidade linear $\lambda = \lambda_0$

é uma constante, ou seja, a massa total está distribuída uniformemente sobre o fio, e uma outra onde a densidade linear $\lambda = \lambda(s)$ não é constante, ou seja, a massa total não está distribuída de forma uniforme sobre o fio. No primeiro caso, com $\lambda = \lambda_0$ constante, a massa total pode ser obtida imediatamente,

$$M = \int dm = \lambda_0 \int ds = \lambda_0 \int_0^l ds = \lambda_0 l. \quad (4.18)$$

No segundo caso, densidade não-uniforme, a massa total só pode ser calculada após conhecermos explicitamente como a densidade depende do comprimento s ao longo do fio. Como exemplo, suponha que a densidade varie linearmente com o comprimento, $\lambda = bs$. Então, usando (4.17),

$$M = \int dm = b \int s ds = b \int_0^l s ds = \frac{1}{2}bl^2. \quad (4.19)$$

Note que a integral indefinida em (4.17) torna-se uma integral definida na região contendo massa. Note também que obtivemos estes dois resultados sem a necessidade de especificar a forma do fio. No entanto, o formato do fio é indispensável no cálculo do momento de inércia.

A fim de exemplificar o cálculo do momento de inércia, vamos considerar um fio retilíneo com a densidade não-uniforme $\lambda = bs$. Primeiramente, temos de escolher um eixo de rotação. Vamos escolher este eixo passando perpendicularmente por uma das extremidades do fio. O próximo passo é a escolha da origem de um bom sistema de coordenadas. Vamos escolher um sistema de coordenadas retangular (ortonormal) com a origem na intersecção do eixo de rotação com o fio. Podemos até colocar o fio sobre um dos eixos do nosso sistema de coordenadas, digamos em cima do eixo X . Com esta escolha, o eixo de rotação está sobre o eixo Z (ou sobre o eixo Y) e $s = x$, com x variando entre 0 e l . Então $ds = dx$ e $\lambda = bx$. Assim, usando a definição (4.8), o momento de inércia deste fio retilíneo não-uniforme é

$$I = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 bx dx = \frac{1}{4}bl^4. \quad (4.20)$$

Podemos (e devemos) usar a massa total calculada em (4.19) para re-escrever o momento de inércia (4.20) em termos da massa total, $I = Ml^2/2$. Este

mesmo momento de inércia é $Ml^2/3$ caso a densidade seja uniforme (faça o Exercício 4). Isto significa que o momento de inércia deste sistema com uma densidade uniforme é menor que o momento de inércia com uma densidade não-uniforme. Ora, isto nos dá uma oportunidade magnífica: podemos alterar o valor do momento de inércia simplesmente alterando a distribuição de massa ao longo do fio, mantendo a massa total constante.

Vamos considerar agora um anel de raio a com uma densidade também linear $\lambda = bs$, onde s é um comprimento qualquer sobre o anel. Neste caso, a melhor escolha é um sistema polar (r, ϕ) de coordenadas devido à simetria circular do anel. Vamos colocar o eixo de rotação no centro do anel ao longo do eixo Z , com o anel no plano XY . Assim, a distância de uma massa infinitesimal até o eixo de rotação é $r = a$ (faça um diagrama). O comprimento infinitesimal ds sobre o anel pode ser escrito na forma $ds = a d\phi$ (geometria plana) e, consequentemente, $s = a\phi$. Usando a definição (4.8), temos

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_{\phi=0}^{2\pi} a^2 ba\phi a d\phi \\ &= 2a^4 b\pi^2 = \frac{1}{2}a^2 bl^2 = Ma^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde usamos também a massa total (4.19) e o comprimento do anel $l = 2\pi a$. Neste caso, este resultado coincide com o valor do momento de inércia calculado com uma densidade uniforme (faça o Exercício 5). De fato, devido à simetria circular do anel, desde que o eixo passe pelo centro, perpendicularmente ao plano do anel, não importa como a massa está distribuída sobre o anel. Importa apenas o fato de todos os elementos de massa estarem à mesma distância do eixo de rotação.

Até aqui consideramos apenas distribuições lineares. O caso mais simples de uma distribuição não-linear é uma distribuição superficial plana, ou seja, um disco de raio a ou um quadrado de lado l . Enquanto que em uma distribuição linear nós necessitamos de apenas um grau de liberdade para especificar a densidade linear (o comprimento ao longo do fio, por exemplo), precisaremos de dois graus de liberdade para especificar a densidade superficial.

A densidade superficial é construída assim: primeiro escolhemos uma área infinitesimal dA qualquer. Esta área infinitesimal contém uma quantidade infinitesimal dm de massa. A densidade su-

perficial σ é definida como

$$\sigma = \frac{dm}{dA}. \quad (4.22)$$

De forma usual, a massa total deve ser calculada somando-se todas as massas infinitesimais,

$$M = \int dm = \int \sigma dA. \quad (4.23)$$

Temos novamente duas possibilidades: ou a densidade superficial é constante, $\sigma = \sigma_0$, e neste caso a massa total é

$$M = \int dm = \sigma_0 \int dA = \sigma_0 A, \quad (4.24)$$

ou a densidade superficial é não-uniforme.

No caso não-uniforme, precisamos conhecer explicitamente como a densidade superficial depende da posição na região contendo massa. Como exemplo, vamos considerar inicialmente uma distribuição de massa circular de raio a e com uma densidade dependente apenas da distância radial na forma $\sigma = \sigma_0 r$, com σ_0 constante. Como a distribuição de massa é um disco, as coordenadas polares (r, ϕ) constituem a melhor escolha. Uma área infinitesimal em coordenadas polares é escrita na forma $dA = r d\phi dr$ (faça o Exercício 6). Assim, a massa total pode ser calculada usando a densidade superficial (4.24),

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \sigma_0 a^3. \end{aligned} \quad (4.25)$$

É importante notar que a integral indefinida em (4.24) tornou-se duas integrais definidas em (4.25) sobre toda a região contendo massa. Também note que estas duas integrais definidas puderam ser calculadas separadamente. Isto foi possível somente porque a densidade superficial $\sigma = \sigma_0 r$ não mistura as variáveis polares r e ϕ .

E o momento de inércia deste disco com uma distribuição de massa não-uniforme em relação a um eixo de rotação passando pelo centro do disco perpendicularmente ao plano do disco? (haja fôlego!) Neste caso, como o eixo de rotação passa pelo centro do disco, então podemos usar r como a coorde-

nada radial. Assim, usando a definição (4.8), temos

$$I = \int r^2 dm = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^4 dr = \frac{2\pi}{5} \sigma_0 a^5 = \frac{3}{5} Ma^2. \quad (4.26)$$

Novamente, este valor é maior que o valor $Ma^2/2$ do momento de inércia do mesmo disco com uma distribuição uniforme de massa (verifique). Isto é devido ao fato de haver uma concentração maior de massa nas regiões mais afastadas do eixo de rotação.

Espero que estes exemplos tenham indicado a você o caminho das pedras. Dada uma distribuição de massa M , em geral ocupando um volume V , a primeira providência é saber como a densidade $\rho = dm/dV$ associada a esta distribuição, onde dV é o volume infinitesimal, depende da posição na região contendo massa. O próximo passo é expressar a massa total

$$M = \int dm = \int \rho dV \quad (4.27)$$

em função dos parâmetros que caracterizam a densidade volumétrica e o próprio volume contendo a massa total. Em seguida, podemos calcular o momento de inércia usando a definição (4.8),

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (4.28)$$

onde r é a distância da massa infinitesimal dm até o eixo de rotação. Em geral, tanto a distância r quanto a densidade ρ são funções da posição, isto é, funções das coordenadas de algum sistema de coordenadas adequado ao problema. Também não devemos esquecer que a integral indefinida em (4.28) será transformada em três integrais definidas após a escolha do sistema de coordenadas mais adequado à geometria do corpo rígido em consideração.

4.3.1 Exercícios

Exercício 3

Considere um corpo rígido formado por duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas pela distância l . Colocando a origem do sistema de coordenadas no centro de massa (faça um desenho), (a) mostre que $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$. Mostre também que os respectivos módulos satisfazem

$m_1 r_1 = m_2 r_2 = 0$ e $l = r_1 + r_2$. (b) Mostre então que a relação (4.14) é verdadeira. (c) Suponha que estas partículas sejam dois átomos de oxigênio, $m = 2.66 \times 10^{-26}$ kg, separados pela distância (média) $l = 1.21 \times 10^{-10}$ m. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo passando pelo centro de massa (I_0) e também em relação a um eixo (paralelo ao primeiro) passando por um dos átomos de oxigênio (I'). Calcule também as respectivas energias cinéticas.

Exercício 4

Mostre que o momento de inércia de uma distribuição de massa, homogênea e retilínea (fio), em relação a uma de suas extremidades (perpendicularmente), é $ML^2/3$, onde M é a massa total e l é o comprimento do fio. Use o Teorema 4 dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia em relação a um eixo passando pelo centro de massa.

Exercício 5

Mostre que o momento de inércia de uma distribuição de massa, homogênea e circular de raio a (anel), em relação ao centro do anel (perpendicularmente ao plano do anel), é Ma^2 , onde M é a massa total e a é o raio do anel.

Exercício 6

Mostre que uma área infinitesimal dA em coordenadas polares (r, ϕ) é

$$dA = r d\phi dr. \quad (4.29)$$

Faça um desenho mostrando todas as quantidades envolvidas.

4.4 Torque e momentum angular

Como podemos colocar um determinado corpo rígido em rotação em torno de algum eixo fixo? Imagine que desejamos colocar uma roda de bicicleta em rotação em torno do eixo que a mantém fixa na bicicleta. Sabemos da experiência que precisamos aplicar uma força (externa) para colocá-la em rotação. Podemos relacionar esta força aplicada com a aceleração angular?

Podemos ver claramente que a força aplicada está transferindo energia à roda pelo mecanismo de trabalho, para que a mesma possa executar

seu movimento de rotação. Também aprendemos nesta experiência que não podemos aplicar a força de qualquer maneira na roda para colocá-la em rotação. Por exemplo, quando aplicamos uma força na mesma direção da linha que passa pelo ponto de aplicação da força e pelo eixo de rotação (perpendicularmente), não produzimos rotações (veja a Figura 4.2). Em outras palavras, somente conseguiremos colocar a roda em rotação quando a força aplicada \mathbf{F} não for paralela ao vetor (distância) \mathbf{r} . A Figura 4.2 ilustra estas duas situações: uma onde a força \mathbf{F}_1 é capaz de produzir uma rotação em torno do eixo fixo perpendicular ao plano da roda e passando pelo centro da roda. A força \mathbf{F}_2 não produz rotações.

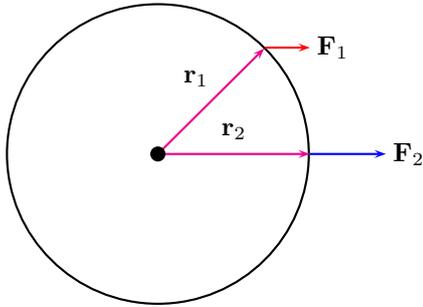


Figura 4.2: A força \mathbf{F}_1 é capaz de produzir uma rotação em torno do eixo fixo perpendicular ao plano da roda e passando pelo centro da roda. A força \mathbf{F}_2 é incapaz de produzir rotações.

Note que $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \neq 0$ e $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0$. Isto está sugerindo que a quantidade $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ pode ter alguma relevância na dinâmica do movimento de rotação. Evidentemente, devemos realizar mais experimentos para determinarmos como o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ está relacionado (se estiver) com a aceleração angular. Será o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ a quantidade equivalente à força no movimento translacional?, isto é, $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \propto \boldsymbol{\alpha}$? Apenas o experimento pode decidir. O experimento com a roda de bicicleta está indicando que sim. Este experimento também nos revela que se o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é constante, então o movimento rotacional resultante é uniformemente acelerado, isto é, a aceleração angular é também constante. Este experimento também nos revela que o sentido do vetor aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ é determinado pelo produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por-

tanto a constante de proporcionalidade entre $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ deve ser positiva. Além disto, uma análise dimensional revela que esta constante de proporcionalidade deve ter as mesmas dimensões de momento de inércia. Outros experimentos similares irão nos mostrar que esta constante de proporcionalidade é, nada mais, nada menos, o próprio momento de inércia do corpo rígido. De fato, isto faz sentido. Aprendemos anteriormente que o momento de inércia mede a inércia do movimento rotacional. Desta forma, valendo-nos de experimentos e análise dimensional, concluímos que $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = I\boldsymbol{\alpha}$ é o análogo da segunda lei de Newton para o movimento rotacional. Esta relação também justifica a escolha que fizemos anteriormente para a direção e o sentido de nossas grandezas cinemáticas rotacionais, pois o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ está sobre o eixo de rotação.

Para entendermos melhor os resultados experimentais descritos acima e, principalmente, para aprendermos a controlá-los, vamos observar novamente uma determinada massa (pontual), discreta ou infinitesimal, em um corpo rígido qualquer, como mostrado na Figura 4.3. O objetivo é a construção de um modelo, com uma base matemática que seja elegante e, ao mesmo tempo, capaz de explicar detalhadamente os resultados experimentais envolvendo rotações.

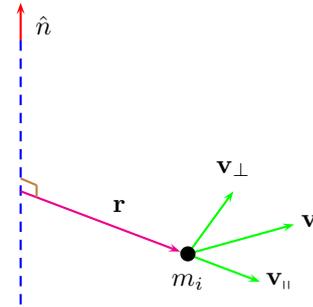


Figura 4.3: Rotação, em torno de um eixo fixo, de uma massa m_i em um corpo rígido qualquer. Note que $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, mas como o corpo é rígido, então devemos ter $\mathbf{v}_{\parallel} = 0$.

A Figura 4.3 mostra uma massa m_i (ou dm se a distribuição é contínua) pertencente a um corpo

rígido qualquer de massa total

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (\text{ou } M = \int dm). \quad (4.30)$$

Note na Figura 4.3 que estamos indicando por \mathbf{r} o vetor “distância”, aquele vetor perpendicular ao eixo de rotação, o qual é usado no cálculo do momento de inércia. O vetor distância \mathbf{r} coincidirá com o vetor distância apenas quando a origem do sistema de coordenadas coincidir com a interseção do vetor distância com o eixo de rotação. Entretanto, no caso geral, o vetor distância \mathbf{r} será a componente perpendicular do vetor posição em relação a um eixo de rotação passando pela origem do sistema de coordenadas.

Observe na Figura 4.3 que o vetor velocidade $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ da massa m_i pode ser decomposto numa componente radial \mathbf{v}_{\parallel} (paralela a \mathbf{r}) e numa componente tangencial \mathbf{v}_{\perp} (perpendicular a \mathbf{r}), $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$. Naturalmente, a componente radial é nula em um corpo rígido, $\mathbf{v}_{\parallel} = 0$, pois a massa m_i não está livre para se movimentar nesta direção. No entanto, poderíamos ter uma única massa neste sistema. No caso de uma única massa, o vetor velocidade possui uma componente radial.

Veremos em breve que precisaremos do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\perp}$, o qual sempre pode ser re-escrito na forma

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (4.31)$$

mesmo no caso em que $\mathbf{v}_{\parallel} \neq 0$, pois $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\parallel} = 0$ por construção. Também podemos ver na Figura 4.3 que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\perp}}{r^2} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^2}, \quad (4.32)$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{n}$ é o vetor velocidade angular. Para verificar este resultado, certifique-se que a direção, o sentido e o módulo ($v = r\omega$) de $\boldsymbol{\omega}$, calculados por (4.32), estão corretos. Note que fizemos uso de (4.31) na última passagem em (4.32). É importante ter em mente também que $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\perp}$, pois o movimento da massa m_i é circular (de raio r).

Mantendo as observações (4.31) e (4.32) em mente, podemos prosseguir. Para isto, precisamos recordar a definição de energia cinética do movimento de translação. No movimento de translação, a energia cinética de um corpo (pontual) de massa m e velocidade \mathbf{v} sempre pode ser re-escrita em ter-

mos do momentum linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$,

$$T = \frac{1}{2} m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (4.33)$$

Também sabemos que o momentum linear é uma quantidade importante porque a sua taxa de variação temporal é igual a força agindo na massa m (segunda lei de Newton),

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (4.34)$$

Também sabemos que (4.34) é uma equação diferencial de segunda ordem no tempo para o vetor posição $\mathbf{r}(t)$. Resolvendo esta equação diferencial, determinaremos a dependência temporal do vetor posição, ou seja, a equação diferencial (4.34) controla todo o comportamento dinâmico da massa m . Isto é o que sabemos sobre o movimento translacional. Podemos usar este conhecimento para entendermos melhor a dinâmica do movimento rotacional? Certamente podemos.

Procedendo de forma análoga, podemos re-escrever a energia cinética rotacional (4.7) do corpo rígido mostrado na Figura 4.3 numa forma similar a (4.33),

$$T = \frac{1}{2} I\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2I} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad (4.35)$$

na qual I é o momento de inércia (4.8) e o vetor \mathbf{L} , denominado de **momentum angular**, é análogo ao momentum linear, como veremos logo em seguida. Se o momentum angular \mathbf{L} é realmente uma quantidade importante, com uma importância igual à importância do momentum linear, então, por analogia à segunda lei (4.34), a sua taxa de variação temporal $\dot{\mathbf{L}} = I\boldsymbol{\alpha}$, pois I é uma constante, deve controlar a dinâmica do movimento de rotação.

Por outro lado, vimos no início desta seção que necessitamos de uma força externa para colocar um corpo rígido em rotação. Portanto, a taxa de variação temporal do momentum angular deve estar relacionada de alguma forma com a força externa. Esta relação pode ser encontrada escrevendo o momentum angular total $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ em termos do momentum angular de cada massa m_i (ou dm) pre-

sente no corpo rígido,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (4.36)\end{aligned}$$

onde usamos também os resultados (4.31) e (4.32). Não devemos esquecer que podemos escrever $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ somente quando este momentum linear aparecer no produto vetorial $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, pois no movimento circular da massa m_i temos $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{i\perp}$ (não há movimento radial; corpo rígido). A última expressão em (4.36) nos permite escrever um momentum angular $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ para cada massa m_i ,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i, \quad \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (4.37)$$

Agora estamos numa posição confortável para determinarmos a taxa de variação temporal do momentum angular,

$$\dot{\mathbf{L}} = I\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_i, \quad \dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (4.38)$$

onde \mathbf{F}_i é a força externa atuando na i -ésima massa m_i . As forças internas cancelam-se aos pares, sempre. Note que usamos também o fato de $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp}$ em um corpo rígido. O resultado (4.38) acaba de nos revelar o análogo da segunda lei de Newton para o movimento rotacional,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} (= I\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.39)$$

(onde consideramos o momento de inércia I constante) e

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i, \quad \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (4.40)$$

A quantidade $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, denominada de torque, faz o papel da força \mathbf{F} no movimento de translação. Note em (4.40) que, conhecendo as forças externas e o eixo de rotação, temos como calcular o torque de cada uma destas forças externas. Assim, $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ ou a sua forma mais geral $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$ faz o papel análogo da segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ ou $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, para o movimento de translação.

Observe que, se o momento de inércia é constante, é necessário uma aceleração angular para colocar um corpo rígido em movimento de rotação. Isto implica que o torque (4.39) deve ser diferente de zero, ou seja, deve haver pelo menos uma força externa \mathbf{F}_i produzindo um torque $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ diferente de zero para haver rotação a partir do repouso. Também podemos ver em (4.39) que um torque constante produz uma rotação uniformemente acelerada (aceleração angular constante).

Mais algumas observações importantes antes de passarmos ao desenvolvimento de algumas aplicações. (1) Dada a relação $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ entre torque e força (externa), entendemos porque não é possível colocar a roda de bicicleta em rotação aplicando uma força ao longo da linha perpendicular ao eixo de rotação e que passa pelo ponto de aplicação da força (veja a Figura 4.2). Em outras palavras, o torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é nulo quando a força \mathbf{F}_i é paralela ao vetor \mathbf{r}_i . (2) Como $r_i = \|\mathbf{r}_i\|$ é a distância entre a massa m_i e o eixo de rotação, então tanto o momentum angular quanto o torque dependem da posição do eixo de rotação. (3) Note que momentum angular tem dimensões de energia vezes tempo e que, conseqüentemente, torque tem dimensões de energia. No entanto, não é correto dizer que torque é energia. Também não é correto dizer que trabalho é energia. Trabalho é um mecanismo de troca de energia. Torque é o mecanismo que permite um corpo rígido entrar em movimento de rotação em torno de um eixo fixo.

O torque produzido pela gravidade tem uma característica especial. Seja \mathbf{r} o vetor posição do elemento de massa dm dentro de um corpo (não precisa ser rígido) em relação a um referencial inercial \mathcal{O} . Cada elemento de massa dm está sujeito ao peso $dm\mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade, a qual podemos considerar constante no interior do nosso corpo. O torque resultante é

$$\boldsymbol{\tau} = \int dm \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \mathbf{R} \times (M\mathbf{g}), \quad (4.41)$$

onde introduzimos o vetor \mathbf{R} do Centro de Massa,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int dm \mathbf{r}, \quad M = \int dm, \quad (4.42)$$

como uma posição média, ponderada pelas massas dm . Note que o vetor do centro de massa é calculado em relação ao referencial \mathcal{O} , o qual não

precisa ser inercial. O procedimento para calcular cada coordenada do vetor posição do centro de massa é o mesmo empregado para calcular momento de inércia. Assim, conforme indicada pela última igualdade em (4.41), o nosso corpo extenso pode ser trocado por um ponto material de massa M localizado no centro de massa.

Uma propriedade importante do centro de massa surge quando mudamos a origem do nosso referencial \mathcal{O} para o próprio centro de massa. Neste caso devemos fazer $\mathbf{R} = 0$ na definição (4.42) para obtermos $\int dm \mathbf{r} = 0$. Não devemos esquecer que, nesta equação, o vetor posição \mathbf{r} tem a sua origem no centro de massa, um situação diferente da Eq. (4.42), onde o vetor posição \mathbf{r} tem a sua origem no referencial \mathcal{O} . Esta mesma propriedade pode ser obtida de outra forma (mais matemática). Seja \mathbf{u} o vetor posição do elemento de massa dm no referencial do centro de massa. Então $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$ (faça um diagrama). Introduzindo $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$ na definição (4.42), teremos

$$\int dm \mathbf{u} = 0. \quad (4.43)$$

Como veremos adiante, o centro de massa ainda terá muitas outras utilidades.

Por falar em trabalho, devemos determinar uma expressão para a potência instantânea no movimento rotacional. Em muitas situações, o movimento de rotação ocorre em meios viscosos, os quais oferecem uma força dissipativa. Tendo dissipação, há troca de energia pelo mecanismo trabalho. A potência \mathcal{P} mede justamente a taxa temporal desta troca de energia, $\mathcal{P} = dW/dt$. Observe novamente a Figura 4.1. Acrescente a ela a força externa \mathbf{F}_i agindo na i -ésima massa m_i . Para que este corpo rígido altere seu estado de movimento rotacional, as forças externas \mathbf{F}_i devem realizar trabalho durante o intervalo de tempo dt , $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$. Lembre-se que apenas o módulo do vetor (distância) \mathbf{r}_i permanece constante e que $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$, onde \mathbf{v}_i é a velocidade (tangencial) da massa m_i . Assim, a potência instantânea correspondente é $\mathcal{P}_i = dW_i/dt = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Este resultado é simplesmente a potência instantânea do movimento translacional. No entanto, ela pode ser re-escrita numa forma mais conveniente ao movimento rotacional. Para isto, basta substituir a velocidade

tangencial pela velocidade angular, usando (4.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{F}_i \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde utilizamos a propriedade de invariância por permutações circulares do produto misto entre três vetores. A última expressão em (4.44) contém o torque na i -ésima massa m_i ,

$$\mathcal{P}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.45)$$

Desta forma, a potência instantânea total pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.46)$$

Sem dúvidas, fomos muito felizes na construção de um modelo capaz de explicar a dinâmica do movimento rotacional. O torque é uma quantidade rotacional importante, pois ela tem um papel similar ao papel desempenhado pela força no movimento translacional. A relação (4.39) entre torque e o momentum angular certamente justifica suas definições. As relações entre momentum angular e momentum linear, (4.37), bem como entre torque e força, (4.40), corroboram a importância destas duas quantidades angulares. Note também que a relação (4.40) entre torque e força justifica a escolha da direção (eixo de rotação) e sentido (regra da mão direita) para os vetores deslocamento, velocidade e aceleração angulares.

Além de ser bem sucedido na descrição do movimento rotacional, este modelo construído via momentum angular e torque, em analogia com momentum linear e força, é matematicamente perfeito, pois ele nos fornece também uma importante lei de conservação: a lei de conservação do momentum angular. Podemos ver claramente em (4.39) que o momentum angular (total) será uma quantidade conservada (constante no tempo) sempre que o torque (total) for nulo. Esta é mais uma (na verdade três) entre as leis de conservação que já conhecemos (conservação do momentum linear e da energia mecânica).

Teorema 5

O momentum angular se conserva na ausência de torques, $\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} = 0$.

Como já mencionamos, estas leis de conservação continuam válidas, assim como as demais, mesmo no reino microscópico onde a física Newtoniana não se aplica, ou seja, a conservação do momentum angular também é verificada em mecânica quântica.

4.5 Giroscópios

Talvez uma das aplicações mais importantes da conservação do momentum angular no nosso cotidiano seja na indústria da navegação. A idéia é muito simples. Um disco (ou qualquer outro objeto) é colocado em rotação numa região ausente de agentes dissipadores e de forças externas. De acordo com o Teorema 5, é necessário a ação de uma força externa para produzir um torque para modificar o eixo de rotação deste disco. Portanto na ausência de torques, o eixo de rotação deste sistema (perpendicular ao plano do disco) deve apontar para uma direção fixa (podemos chamar esta situação de inércia rotacional). Este sistema é denominado de giroscópio (veja a Figura 4.4). Um giroscópio é uma peça fundamental em qualquer sistema preciso de navegação atual.

Sem dúvidas, um giroscópio serve como um guia, um “navegador” no espaço vazio. Por exemplo, o telescópio Hubble (hubble.nasa.gov) é orientado por um mecanismo contendo dois giroscópios de 45 kg cada, girando em torno de eixos não-coincidentes com uma velocidade angular que pode atingir 3000 rpm. Estas velocidades angulares podem ser modificadas eletronicamente para produzir pequenas variações nos momentos angulares dos giroscópios. Como o momentum angular total precisa ser conservado, pois não há forças externas, o telescópio precisa girar para compensar as variações de momentum angular produzidas nos giroscópios. Desta forma, o telescópio pode manter um determinado alvo fixo com um erro de cinco milésimos de segundo. Isto é equivalente a mantermos iluminada uma moeda de um real localizada em Vitória (ES) com uma lanterna em cima do pão de açúcar no Rio de Janeiro (RJ).

Outro exemplo importante é a sonda espacial GP-B (*Gravity Probe-B*), a qual mediu minuciosamente o campo gravitacional ao redor da Terra (einstein.stanford.edu). Esta sonda está equipada com quatro giroscópios construídos de esferas de quartzo (crescidos no Brasil) com uma imperfeição

de apenas 20 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) em seu diâmetro e com uma massa uniformemente distribuída com uma imperfeição de apenas 2 ppm (partes por milhão), girando a 4000 rpm. Qualquer variação no espaçotempo produzirá uma variação nos eixos de rotação destes giroscópios.

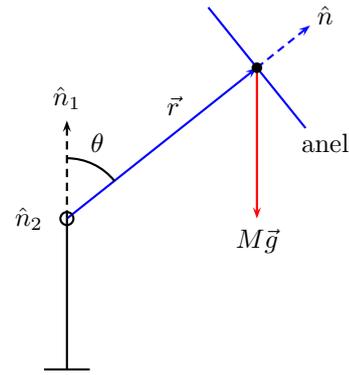


Figura 4.4: Giroscópio ideal, formado por um anel de massa M que pode girar livremente em torno do eixo \hat{n} , na presença da força gravitacional. O eixo de rotação \hat{n}_2 é perpendicular ao eixo de rotação \hat{n}_1 .

Um efeito muito interessante, denominado de **precessão**, surge quando um giroscópio é colocado na presença de uma força externa, por exemplo na superfície da Terra. Como sempre, vamos simplificar o máximo nosso giroscópio para entendermos o efeito de precessão. Nosso giroscópio será representado por uma massa M , distribuída uniformemente em um anel circular de raio R . Este anel está preso a uma extremidade de um eixo rígido de massa desprezível, em torno do qual o anel pode girar livremente. A outra ponta do eixo do anel está apoiada por um pivô (um ponto fixo). Este pivô permite que a ponta do eixo do anel apoiado por ele execute livremente um movimento de 360 graus sem perda de contato. Também ignoraremos a presença da atmosfera. A Figura 4.4 ilustra este nosso giroscópio ideal.

Podemos muito bem substituir o pivô por um cordão preso ao teto. O cordão é uma opção mais prática, pois sempre temos um pedaço de cordão no bolso e um bom pivô nem sempre está a disposição. Observe na Figura 4.4 que há dois eixos em torno dos quais nosso giroscópio pode girar li-

vrememente: um eixo de rotação \hat{n}_1 na direção do suporte (fixo) do pivô (ou do cordão dependurado) e um eixo de rotação \hat{n}_2 perpendicular a \hat{n}_1 e passando pelo pivô. O anel do giroscópio gira em torno do eixo \hat{n} com uma velocidade angular ω . Seja I o momento de inércia do anel e r o comprimento do eixo passando pelo centro do anel. Na ausência de forças externas, este giroscópio tem um momentum angular $\mathbf{L} = I\omega\hat{n}$, o qual é conservado. Note que este vetor momentum angular é paralelo ao vetor \mathbf{r} .

Como mostrado na Figura 4.4, a presença da força externa $M\vec{g}$ produz um torque,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (M\vec{g}), \quad \tau = Mrg \sin \theta, \quad (4.47)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição indicado na Figura 4.4. Pela propriedade do produto vetorial, o vetor torque em (4.47) é perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} e, portanto, perpendicular ao vetor momentum angular \mathbf{L} . De acordo com a Eq. (4.39), torque é igual à taxa de variação temporal do momentum angular, $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$. Como a variação $d\mathbf{L}$ do momentum angular é proporcional ao vetor torque, pois dt é positiva, então podemos concluir que a variação $d\mathbf{L}$ é perpendicular a \mathbf{L} , $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} = 0$. A Figura 4.5 ilustra esta situação antes de passarmos o limite $\Delta\phi \rightarrow d\phi$. Note que fizemos $\theta = \pi/2$ na Figura 4.5. Para $\theta \neq \pi/2$ a ponta do vetor momentum angular \mathbf{L} executa um movimento circular de raio $L \sin \theta$.

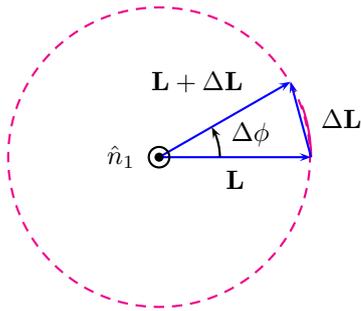


Figura 4.5: Movimento de precessão do eixo \hat{n} , paralelo ao momentum angular \mathbf{L} , do giroscópio mostrado na Figura 4.4, com $\theta = \pi/2$, em torno do eixo \hat{n}_1 .

Como $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} = 0$, temos então que o módulo $L = I\omega$ do vetor momentum angular é conservado

(Faça o Exercício 7), apesar da ação da força externa. Assim, apenas a direção do vetor momentum angular está mudando no tempo. Podemos dizer então que a força gravitacional ainda manteve intacta uma das três leis de conservação do momentum angular (o seu módulo), contidas no Teorema 5. Como $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} = 0$ e $\dot{L} = 0$, então a ponta do vetor momentum angular angular executa um movimento circular, como mostrado na Figura 4.5. Este movimento circular em torno do eixo \hat{n}_1 é denominado de **precessão**. A velocidade angular ω_p deste movimento de precessão pode ser calculada facilmente com o auxílio da Figura 4.5, pois $\|d\mathbf{L}\| = L \sin \theta d\phi$.² Assim,

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L \sin \theta} \frac{\|d\mathbf{L}\|}{dt} = \frac{1}{L \sin \theta} \|\boldsymbol{\tau}\|. \quad (4.48)$$

Usando o torque calculado em (4.47), temos a velocidade angular de precessão,

$$\omega_p = \frac{Mgr}{I\omega} = \frac{gr}{K^2} \frac{1}{\omega}, \quad (4.49)$$

onde fizemos $I = MK^2$, com K sendo um parâmetro (geométrico) característico do sistema, conhecido como “raio de giro”.

Devemos notar que a velocidade angular de precessão (4.49) é inversamente proporcional à velocidade angular ω do giroscópio. Consequentemente, a velocidade de precessão aumenta quando a velocidade angular do giroscópio diminui. No limite $\omega \rightarrow 0$, temos, de acordo com (4.49), $\omega_p \rightarrow \infty$. No entanto, observamos no experimento que o giroscópio não aumenta indefinidamente a sua velocidade de precessão quando a sua velocidade angular diminui. Ele simplesmente para de precessionar e cai quando $\omega \rightarrow 0$. Isto significa que (4.49) necessita de correções. Estas correções podem ser feitas levando-se em consideração a massa do eixo do anel, a qual foi ignorada até então. No entanto, estas correções seriam um refinamento desnecessário neste momento. Em um giroscópio real, a ponta do vetor momentum angular também apresenta um movimento oscilatório perpendicular ao plano de precessão. Este terceiro movimento é denominado de **nutation**.

Aprendemos algo muito importante com este giroscópio ideal esquematizado na Figura 4.4: a va-

²Note que $\|d\mathbf{L}\|$ é diferente de dL , pois $\dot{L} = 0$ implica em $dL = 0$.

riação do momentum angular produz um movimento de rotação. Isto é completamente análogo ao movimento de translação produzido pela variação do momentum linear (como acontece nos foguetinhos de água). Também podemos ver que o simples fato da roda estar girando impede que o centro de massa dela caia sob a ação da força gravitacional. Curiosamente, a própria força gravitacional é responsável por manter o eixo de rotação na posição angular θ sem que o centro de massa “caia”.

4.5.1 Exercícios

Exercício 7

Considere uma quantidade vetorial \mathbf{A} qualquer que esteja mudando no tempo, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. Suponha que o diferencial $d\mathbf{A}$ seja perpendicular a \mathbf{A} , $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Mostre então que

$$d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2A dA = 0. \quad (4.50)$$

Este resultado mostra que o módulo do vetor \mathbf{A} é uma quantidade conservada (admitindo que $A \neq 0$).

4.6 As equações de Euler

Nós aprendemos que as leis de Newton para a dinâmica translacional são válidas em qualquer referencial inercial. Também já mencionamos que as leis da mecânica Newtoniana em geral também são válidas em qualquer referencial inercial, e somente em referenciais inerciais. Nos parágrafos acima, estabelecemos as leis que governam a dinâmica do movimento rotacional e afirmamos que tais leis são análogas às leis de Newton para o movimento de translação. Sendo então leis integrantes da mecânica Newtoniana, então elas (as leis do movimento de rotação) devem ser válidas somente em referenciais inerciais. No entanto, nenhum referencial inercial foi especificado nas discussões acima sobre a dinâmica do movimento de rotação. Onde estará este referencial inercial? Veremos que ao estabelecermos uma resposta a esta pergunta, encontraremos algumas características muito importantes sobre momento de inércia até então desconhecidas. Estas características novas são indispensáveis ao tratamento de sistemas reais e, mesmo não sendo necessário, elas justificam a existência de um curso novo, denominado de Álgebra Linear.

Veremos também que o momento de inércia, o qual é para nós um escalar (número) até então, é de fato uma matriz. Será o nosso primeiro encontro com uma matriz representando uma entidade física. Até então, temos usado escalares (como massa, carga, tempo e energia) e vetores (como posição, força, torque, etc.) na descrição do movimento na mecânica Newtoniana.

4.6.1 Taxas de variação no tempo

Vamos considerar novamente um corpo rígido, no qual a distância entre dois de seus pontos permanece sempre fixa, girando em torno de um eixo passando pela origem do sistema de coordenadas inercial \mathcal{O} . Seja \mathbf{r} o vetor posição da massa dm neste sistema inercial, o qual faz um ângulo θ com o eixo de rotação representado pelo versor \hat{n} , conforme indicado na Figura 4.6.

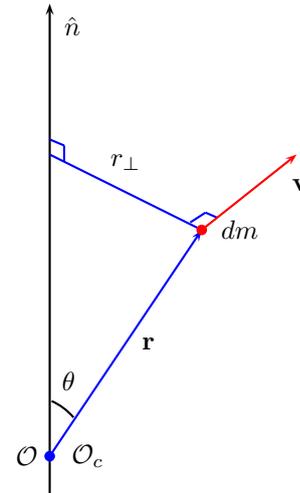


Figura 4.6: Vetor posição \mathbf{r} da massa dm no referencial inercial \mathcal{O} . O referencial não-inercial \mathcal{O}_c está fixo no corpo rígido.

Podemos ver na Figura 4.6 que $r_{\perp} = r \sin \theta$, a projeção do vetor posição \mathbf{r} perpendicularmente ao eixo de rotação, é exatamente a distância da massa dm até o eixo de rotação. Note também que (se ainda não o fez, faça)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \hat{n}. \quad (4.51)$$

Vale a pena lembrar que devido à rigidez do nosso sistema, a massa dm está localizada a uma

distância fixa da origem \mathcal{O} , ou seja, $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ é constante no tempo. Então, derivando esta expressão no tempo, teremos (veja o Exercício 7)

$$\frac{d}{dt}r^2 = 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.52)$$

Assim, qualquer massa dm em um corpo rígido executa um movimento circular de raio $r_{\perp} = r \sin \theta$. Lembre-se que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição somente em um movimento circular.

A relação (4.51) é muito mais que uma simples relação entre grandezas cinemáticas. Vejamos o porquê disto. A observação especial aqui é que o vetor posição \mathbf{r} descreve a posição da massa dm (ou de um ponto qualquer no corpo rígido) em dois sistemas de coordenadas: no referencial inercial \mathcal{O} e em um outro referencial não-inercial \mathcal{O}_c . Este referencial não-inercial \mathcal{O}_c também tem a sua origem no mesmo ponto \mathcal{O} e seus eixos estão solidários ao corpo rígido, ou seja, vistos do referencial inercial \mathcal{O} , os eixos do referencial \mathcal{O}_c estão girando junto com o corpo rígido. Em algum tempo, por exemplo em $t = 0$, os eixos destes dois referenciais são coincidentes. Evidentemente, para quem está no referencial não-inercial \mathcal{O}_c , o vetor posição da massa dm , o qual denotaremos por \mathbf{r}_c , é independente do tempo, $\dot{\mathbf{r}}_c = 0$. O vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é o mesmo nos dois referenciais, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c$, pois o eixo de rotação está instantaneamente em repouso no referencial inercial. Então a relação (4.51) está nos ensinando como escrever no referencial inercial a taxa de variação de um vetor fixo no corpo rígido, ou seja, fixo no referencial não-inercial girando com a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$,

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \hat{n}. \quad (4.53)$$

Como a única característica especial do vetor posição \mathbf{r}_c é estar fixo no referencial não-inercial, então a taxa de variação de um vetor qualquer \mathbf{A} em um referencial girando com a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, vista de um referencial inercial é

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \quad (4.54)$$

Esta relação nos diz quem é a taxa de variação de um vetor no referencial inercial conhecendo apenas o próprio vetor e sua taxa de variação no referencial girante (não-inercial), ou seja, não precisamos conhecer explicitamente como este vetor depende do

tempo no referencial inercial. Não devemos esquecer que estes dois referenciais devem possuir uma origem em comum e que seus eixos devem ser coincidentes em algum instante de tempo. Podemos ver de (4.54) que $d\boldsymbol{\omega}/dt = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, como esperado: os dois observadores medem a mesma taxa de variação para vetores paralelos ao eixo de rotação (faça o Exercício 8).

Note também que mudamos um pouquinho a notação das derivadas no tempo em (4.54): no lado esquerdo escrevemos $d\mathbf{A}/dt$ para representar a taxa de variação temporal no referencial inercial; no lado direito usamos $\dot{\mathbf{A}}$ para representar a taxa de variação temporal no referencial não-inercial. Esta observação sobre notação é importante para evitar erros quando precisarmos da derivada segunda no tempo, ou seja, quando precisamos aplicar a regra (4.54) mais uma vez,

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{A}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{A}. \quad (4.55)$$

Esta relação é importante (necessária) para expressarmos a segunda lei quando o vetor posição está no referencial girante (não-inercial).

A relação (4.54) é tão importante que vale a pena obtê-la de outra forma. Considere \mathbf{i}_c , \mathbf{j}_c e \mathbf{k}_c os versores do referencial girante (solidário ao corpo). Então a taxa de variação destes versores, vista no referencial inercial (fixo), segundo a relação (4.54), é

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_c, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{j}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_c, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{k}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_c, \quad (4.56)$$

uma vez que estes versores estão fixos no referencial girante. Suponha $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}_c + A_y\mathbf{j}_c + A_z\mathbf{k}_c$ um vetor descrito no referencial girante. Então a taxa de variação deste vetor, vista no referencial inercial, é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{A} &= \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i}_c + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}_c + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}_c \\ &\quad + A_x\frac{d\mathbf{i}_c}{dt} + A_y\frac{d\mathbf{j}_c}{dt} + A_z\frac{d\mathbf{k}_c}{dt}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

A taxa de variação no tempo de quantidades escalares é a mesma nos dois referenciais. Imagine um recipiente cheio de água a qual está vazando através de um furo. Imagine também que este objeto esteja girando. Naturalmente, a vazão (volume de água saindo por unidade de tempo; um escalar)

é a mesma nos dois referenciais, pois o movimento de rotação não cria e nem destrói água. Assim, devemos ter $dA_i/dt = \dot{A}_i$ para qualquer escalar A_i . Desta forma, usando também (4.56), a Eq. (4.57) se transforma na (4.54).

4.6.2 Tensor de Inércia

Procedendo como na Seção 4.4, vamos escrever a energia cinética total do nosso corpo rígido como a soma das energias cinéticas de cada massa dm ,

$$T = \frac{1}{2} \int dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.58)$$

O vetor velocidade angular pode ser introduzido via qualquer uma das duas relações (4.51) e (4.53). Vamos escolher a primeira delas, isto é, com o vetor posição escrito no referencial inercial. Como este referencial é ortonormal (por construção), então

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i^2, \quad (4.59)$$

na qual estamos escrevendo o vetor posição na forma $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Existe uma forma compacta de escrevermos as componentes $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i$ do produto vetorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$,

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k, \quad (4.60)$$

na qual (ε_{ijk}) é o tensor completamente anti-simétrico de ordem três (ou tensor de Levi-Civita), definido pelas seguintes propriedades de suas componentes ε_{ijk} (Faça o Exercício 9):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \in P_{\text{par}}, \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k, \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in P_{\text{ímpar}}, \end{cases} \quad (4.61)$$

onde

$$P_{\text{par}} = \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\}, \quad (4.62)$$

$$P_{\text{ímpar}} = \{(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}, \quad (4.63)$$

são as permutações pares e ímpares, respectivamente. Podemos ver então que o tensor de Levi-Civita troca de sinal sempre que uma permutação entre dois índices é efetuada. Isto justifica o adjetivo “completamente” anti-simétrico.

Somas envolvendo produtos das componentes ε_{ijk} do tensor de Levi-Civita possuem muitas propriedades interessantes. Em particular, iremos precisar desta,

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}, \quad (4.64)$$

na qual (δ_{ij}) é o tensor completamente simétrico de ordem dois (ou tensor de Kronecker, ou simplesmente “delta” de Kronecker), definido pelas seguintes propriedades entre suas componentes δ_{ij} (Faça o Exercício 10):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (4.65)$$

Devemos agora substituir a expressão (4.60) em (4.59) e usar os resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{irs} \omega_r x_s \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} \right) \omega_j x_k \omega_r x_s \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \omega_j (\delta_{jr} \delta_{ks} x_k x_s - \delta_{js} \delta_{kr} x_k x_s) \omega_r \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^3 \omega_j (\delta_{jr} r^2 - x_j x_r) \omega_r. \end{aligned} \quad (4.66)$$

O “caminho das pedras” é usar um índice diferente em cada soma. Note que fizemos uso de (4.64) na penúltima linha de (4.66). Também fizemos uso da segunda parte do Exercício 10 na última linha de (4.66). Podemos perceber também que há um duplo produto matricial na última linha de (4.66) se imaginarmos (ω_j) como uma matriz linha e (ω_r) como uma matriz coluna e $(\delta_{jr} r^2 - x_j x_r)$ como uma matriz quadrada. Entretanto, como $dm = \rho dV$, onde ρ é a densidade, em geral depende das coordenadas x_i , então é melhor definir esta estrutura matricial após a substituição do produto escalar (4.66) na energia cinética (4.58)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^3 \omega_j \left[\int dm (\delta_{jr} r^2 - x_j x_r) \right] \omega_r \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^3 \omega_j I_{jr} \omega_r, \end{aligned} \quad (4.67)$$

na qual definimos

$$I_{jr} = \int dm (\delta_{jr} r^2 - x_j x_r). \quad (4.68)$$

A matriz $\mathbf{I} = (I_{jr})$ formada pelos elementos I_{jr} definidos em (4.68) é conhecida por **tensor de inércia**.

Note que podemos trocar os índices do tensor de inércia sem alterá-los, $I_{jr} = I_{rj}$. Por isto, podemos dizer que este tensor (ou esta matriz) é simétrico (simétrica). Por se tratar de uma matriz, ou seja, é necessário especificar dois índices para especificarmos qualquer um de seus elementos, este tensor é de segunda ordem. Como $dm = \rho dV$, onde ρ é a densidade de massa do corpo rígido, o tensor de inércia depende apenas da geometria e da distribuição de massa do corpo rígido.

Também devemos notar que as componentes (4.68) estão escritas no referencial inercial e, portanto, dependem do tempo. No entanto, mencionamos no início deste parágrafo que o vetor velocidade angular podia ser introduzido na expressão (4.58) da energia cinética via qualquer uma das duas relações (4.51) e (4.53). Escolhemos a primeira. Caso tivéssemos escolhido a segunda relação, o tensor de inércia \mathbf{I} continuaria a ter a mesma forma (4.68), com as coordenadas x_i representando o vetor posição \mathbf{r}_c no referencial não-inercial. Neste referencial não-inercial, solidário ao corpo rígido, o tensor momento de inércia é independente do tempo. Isto nos mostra que mesmo não servindo para fazer dinâmica, este referencial não-inercial é útil para calcularmos as componentes do tensor de inércia de forma independente do tempo. Esta observação será muito útil logo adiante.

Com o auxílio do tensor de inércia, a expressão (4.67) pode ser re-escrita ainda numa forma mais compacta,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \quad (4.69)$$

Na primeira forma (primeira igualdade), o tensor de inércia \mathbf{I} atua sobre o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ para produzir um novo vetor $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ cujo produto escalar com $\boldsymbol{\omega}$ nos dá a energia cinética (4.69). Na segunda forma (segunda igualdade), o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é interpretado como uma matriz coluna e $\boldsymbol{\omega}^T$ é a matriz transposta³, ou seja, uma

matriz linha. A expressão (4.67) ou (4.69) para a energia cinética rotacional está nos informando que o tensor de inércia \mathbf{I} está fazendo aqui o papel do nosso momento de inércia definido em (4.8).

Mas não aprendemos que o momento de inércia definido em (4.8) é um escalar (um número)? Sim, de fato! Mas aqui ele é uma matriz. Logo abaixo mostraremos como estas duas informações podem ser reconciliadas. Aguarde apenas um instante. Mas no momento, o (tensor) momento de inércia é uma matriz simétrica. Esta é a primeira vez que uma entidade física é representada matematicamente por uma matriz, daí a importância de matrizes.

E o momentum angular? Ele é o resultado da ação do tensor de inércia sobre o vetor velocidade angular? Sim, de fato,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (4.70)$$

é o vetor momentum angular. Note que ao contrário do caso particular que estudamos anteriormente, este vetor momentum angular (4.70) não é, em geral, necessariamente paralelo ao vetor velocidade angular. Mais surpresas virão com exemplos.

Uma observação importante antes de passarmos aos exemplos: note que a energia cinética é sempre positiva, $T > 0$ (o caso $T = 0$ não tem qualquer importância; repouso). Isto significa que o vetor $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ nunca poderá ser ortogonal ao vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e nem pode ser nulo, $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \neq 0$. Consequentemente, a matriz \mathbf{I} possui uma inversa, pois $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}$ com $\mathbf{L} \neq 0$ implica em $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}$ (Faça o Exercício 11). Portanto já conhecemos duas propriedades elementares da matriz momento de inércia: (1) ela é simétrica e (2) ela possui uma inversa. Como será visto no curso de Álgebra Linear, estas duas propriedades garantem que esta matriz pode ser re-escrita numa forma diagonal (com todos os elementos fora da diagonal iguais a zero), em outras palavras, ela pode ser diagonalizada. Vejamos tudo isto através de um exemplo.

Vamos considerar um corpo rígido na forma de um cubo de arestas de comprimento l , conforme indicado na Figura 4.7. Por pura simplicidade, iremos calcular o momento de inércia no referencial solidário do cubo (embora estejamos usando a mesma notação do referencial inercial; outra comodidade). Também para simplificar um pouco mais,

³A transposição é uma operação que troca linhas por colunas em uma matriz.

vamos supor uma densidade volumétrica constante, $\rho = M/l^3$, com M sendo a massa total do cubo. Como o sistema cartesiano é o que se adapta melhor à simetria do cubo, então o volume infinitesimal é $dV = dx dy dz$ e $dm = \rho dV$.

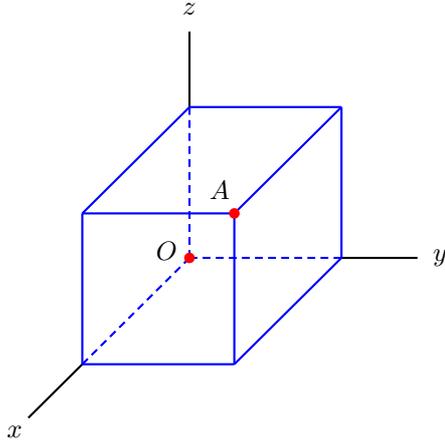


Figura 4.7: Corpo rígido na forma de um cubo de arestas de comprimento l . Um dos eixos principais do momento de inércia passa pela origem e o ponto A (diagonal do cubo).

As componentes do tensor momento de inércia são calculadas através da definição (4.68). Naturalmente a integral em (4.68) deve ser efetuada sobre toda a região contendo massa, ou seja, dentro do cubo. Assim, teremos três integrais, uma em cada direção. Cada uma destas integrais está definida no intervalo fechado $[0, l]$, pois um dos vértices do cubo está na origem do nosso sistema de coordenadas, como pode ser visto na Figura 4.7.

Por exemplo, para a componente I_{11} , temos

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int dm [(x^2 + y^2 + z^2)\delta_{11} - x^2] \\ &= \frac{M}{l^3} \int_0^l dx \int_0^l dy \int_0^l dz (y^2 + z^2), \end{aligned} \quad (4.71)$$

a qual contém duas partes,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{M}{l^3} \int_0^l dx \int_0^l dz \int_0^l y^2 dy \\ &\quad + \frac{M}{l^3} \int_0^l dx \int_0^l dy \int_0^l z^2 dz \\ &= \frac{M}{l^3} \left(l^2 \frac{l^3}{3} + l^2 \frac{l^3}{3} \right) = \frac{2}{3} Ml^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Por simetria, devemos ter $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ (Faça o Exercício 12). Similarmente, para o elemento I_{12} , temos

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int dm [(x^2 + y^2 + z^2)\delta_{12} - xy] \\ &= \frac{M}{l^3} \int_0^l dx \int_0^l dy \int_0^l dz (-xy) \\ &= -\frac{M}{l^3} \int_0^l x dx \int_0^l y dy \int_0^l dz \\ &= -\frac{1}{4} Ml^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

novamente, por argumentos de simetria, devemos ter $I_{12} = I_{13} = I_{23}$ (Faça o Exercício 12). Assim, o tensor de inércia é representado no referencial solidário ao cubo pela matriz simétrica

$$\mathbf{I} = \beta \begin{bmatrix} +8 & -3 & -3 \\ -3 & +8 & -3 \\ -3 & -3 & +8 \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{12} Ml^2. \quad (4.74)$$

Note que esta matriz é simétrica e possui determinante diferente de zero, portanto possui uma inversa (calcule esse determinante e a inversa; veja também o Exercício 13).

Mencionamos que a matriz representando o tensor de inércia pode ser re-escrita numa forma diagonal. Como isto é feito? Para diagonalizarmos a matriz (4.74), primeiro devemos responder à seguinte pergunta. Existe números λ e vetores \mathbf{u} que satisfazem (matricialmente)

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{u} = 0, \quad (4.75)$$

na qual $\mathbf{1}$ é a matriz identidade? Isto é na verdade um sistema de três equações lineares para as três componentes do vetor \mathbf{u} como incógnitas, para cada possível valor do número λ . O problema é que este número λ também é desconhecido. A solução vem junto com o problema, pois este sistema de equações lineares é homogêneo. Aprendemos (ou iremos aprender, isto não importa aqui) que um sistema homogêneo admite uma solução não-trivial (diferente de zero) somente quando o determinante da matriz $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})$ for igual a zero (Faça o Exercício 14),

$$|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}| = (\lambda - 2\beta)(\lambda - 11\beta)^2 = 0. \quad (4.76)$$

Este polinômio em λ é conhecido por polinômio característico. Assim, é possível somente a existência

de três valores para λ , $\lambda_1 = 2\beta$, $\lambda_2 = 11\beta$ e $\lambda_3 = 11\beta$. Estes valores são conhecidos como **autovalores** da matriz (4.74). Quando os autovalores aparecem repetidos, como λ_2 e λ_3 , eles são denominados de **degenerados**. O número de autovalores iguais é o **grau da degenerescência**. Neste caso, temos uma degenerescência de grau dois.

Conhecendo os possíveis valores de λ (os autovalores), podemos determinar as componentes dos vetores \mathbf{u} para cada valor de λ . Isto é feito substituindo os valores dos autovalores λ de volta em (4.75). Estes vetores \mathbf{u} são denominados de **autovetores**. Como o sistema é homogêneo, haverá pelo menos uma componente destes vetores que não poderá ser determinada. Quando há degenerescências, o número de componentes indeterminadas é igual ao grau da degenerescência. Muito bem, ao executarmos este procedimento, teremos (Faça o Exercício 14)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \alpha_1(1, 1, 1), \\ \mathbf{u}_2 &= \alpha_2(-1, 0, 1), \\ \mathbf{u}_3 &= \alpha_3(-1, 1, 0). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Estes vetores satisfazem (4.75) para quaisquer valores das constantes α , e são denominados de **autovetores**.

Note que a estrutura geral em (4.75) é a ação do tensor de inércia em um de seus autovetores resultando no mesmo autovetor multiplicado pelo autovalor correspondente. Este tipo de estrutura, denominada de **equação de autovalor-autovetor**, tem um papel fundamental em ciências exatas em geral (mais detalhes no curso de Álgebra Linear).

Evidentemente, como os autovetores \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 correspondem ao mesmo autovalor $\lambda = 11\beta$, então podemos usar qualquer combinação linear de \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 . Esta observação é muito útil para escrevermos uma matriz ortogonal⁴ \mathbf{U} que diagonaliza o tensor de inércia (4.74), ou seja,

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 11\beta & 0 \\ 0 & 0 & 11\beta \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

A receita para encontrarmos esta matriz ortogonal \mathbf{U} é simples: ela é formado pelos autovetores do

⁴Uma matriz \mathbf{U} é denominada de ortogonal quando a sua inversa \mathbf{U}^{-1} for igual a sua transposta \mathbf{U}^T , isto é, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$. Em outras palavras, é muito fácil calcular a inversa de uma matriz ortogonal.

tensor de inércia. Os autovetores (4.77) formam as colunas da matriz ortogonal \mathbf{U} . No entanto, temos um probleminha: os autovetores escritos na forma (4.77) não formam uma matriz ortogonal (Faça o Exercício 15). Isto se deve ao fato de haver uma degenerescência de grau dois. A solução é formar combinações lineares dos autovetores degenerados,

$$\mathbf{u}'_2 = a_1\mathbf{u}_2 + a_2\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}'_3 = b_1\mathbf{u}_2 + b_2\mathbf{u}_3, \quad (4.79)$$

e determinar os valores das constantes a e b que tornam a matriz formada por estes novos autovetores uma matriz ortonormal. Uma possível escolha é $a_1 = -1/\sqrt{2}$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1/\sqrt{6}$ e $b_2 = -2/\sqrt{6}$. Com esta escolha, teremos

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Note que normalizamos o autovetor \mathbf{u}_1 antes de usá-lo. Esta matriz é ortogonal e diagonaliza o nosso tensor de inércia (4.74) de acordo com a receita (4.78) (Faça o Exercício 15).

Uma matriz ortogonal tem uma outra propriedade igualmente importante: ela deixa o módulo de qualquer vetor inalterado. Por exemplo, calcule a ação da matriz (4.80) no vetor velocidade angular (visto como uma matriz coluna)

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{U}\boldsymbol{\omega}. \quad (4.81)$$

Agora calcule o módulo ao quadrado deste novo vetor $\boldsymbol{\omega}'$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}' &= \boldsymbol{\omega}'^T \boldsymbol{\omega}' = (\mathbf{U}\boldsymbol{\omega})^T \mathbf{U}\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

na qual fizemos uso da propriedade de ortogonalidade $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Portanto este resultado nos mostra que uma matriz ortogonal sempre deixa o módulo de um vetor invariante.

Em mecânica, os autovetores (4.77) ou (4.80) definem novos eixos mutuamente perpendiculares, os quais são denominados de **eixos principais** do tensor de inércia. Os autovalores são os **momentos de inércia principais**, $I_1 = 2\beta$ e $I_2 = I_3 = 11\beta$. Há situações em que os três momentos de inércia principais são iguais e é neste caso (degenerescência tripla) que o momento de inércia pode ser considerado

um número, como suposto no início da nossa discussão sobre a dinâmica do movimento rotacional (Faça o Exercício 16).

A fim de calcularmos a energia cinética rotacional e o momentum angular mais facilmente para o sistema mostrado na Figura 4.7, vamos supor que o cubo esteja girando em torno do eixo x com uma velocidade angular de módulo ω , isto é, $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$. Neste caso, a energia cinética (4.69) e o momentum angular (4.70) são,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} M l^2 \omega^2, \\ \mathbf{L} &= M l^2 \omega (2/3, -1/4, -1/4), \end{aligned} \quad (4.83)$$

respectivamente (Faça o Exercício 13). O ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L} é

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{8}{\sqrt{82}} \Rightarrow \alpha = 27, 94^\circ. \quad (4.84)$$

Caso tivéssemos escolhido o vetor velocidade na direção de um dos eixos principais, por exemplo, na direção de \mathbf{u}_1 (a diagonal do cubo passando pela origem), então $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L} seriam paralelos.

4.6.3 Momentum angular e torque

Resta agora discutirmos as equações de movimento $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$. Elas continuam válidas? O torque $\boldsymbol{\tau}$ e o momentum angular \mathbf{L} ainda continuam sendo calculados pelos produtos vetoriais $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$? Quem é o ponto de referência? Para calcular o torque via $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e usar a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ simultaneamente, o ponto de referência deve ser sempre um ponto inercial, como a origem do referencial inercial \mathcal{O} , por exemplo, pois a segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ só é válida num referencial inercial. Vale lembrar que todas as derivadas temporais nesta sub-seção (apesar da notação) são feitas no referencial inercial.

Seja \mathbf{r} o vetor no referencial inercial \mathcal{O} indicando a posição do elemento de massa dm no interior de um corpo (não precisa ser rígido). Então, o momentum angular resultante, devido aos momentos lineares $dm\dot{\mathbf{r}}$ de cada massa dm , calculados em relação à origem do referencial inercial \mathcal{O} , é

$$\mathbf{L} = \int dm \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.85)$$

Vamos supor também a presença de um segundo referencial \mathcal{O}_c , desta vez solidário ao corpo. Pode ser

localizado no centro de massa, por exemplo. Seja \mathbf{u} o vetor posição do elemento de massa dm neste referencial \mathcal{O}_c (fixo no corpo) e \mathbf{R} o vetor posição do referencial \mathcal{O}_c em relação ao referencial inercial \mathcal{O} . Então $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$ (faça um diagrama). Assim, o momentum angular (4.85) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{R} \times (M\dot{\mathbf{R}}) + \int dm \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} \\ &\quad + \mathbf{R} \times \left(\int dm \dot{\mathbf{u}} \right) + \left(\int dm \mathbf{u} \right) \times \dot{\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Este resultado **ode** ser simplificado tremendamente caso a origem do referencial \mathcal{O}_c esteja no centro de massa, pois podemos usar a propriedade (4.43) (e a derivada dela). Neste caso especial, o momentum angular (4.86), calculado no referencial inercial \mathcal{O} , simplifica para

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times (M\dot{\mathbf{R}}) + \mathbf{L}_c, \quad \mathbf{L}_c = \int dm \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.87)$$

onde \mathbf{L}_c é o momentum angular do corpo em relação ao centro de massa (com a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ medida no referencial do centro de massa).

Lembrando que as forças internas não contribuem para o torque resultante, então o torque resultante $\boldsymbol{\tau}$ devido ao torque provocado pelas forças externas $dm\ddot{\mathbf{r}}$ agindo em cada massa dm , calculado em relação à origem do referencial inercial \mathcal{O} , é

$$\boldsymbol{\tau} = \int dm \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}. \quad (4.88)$$

Este torque pode ser re-escrito na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \int dm \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \int dm \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (4.89)$$

Portanto, as equações que governam o movimento de rotação continuam sendo $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$. Certamente já esperávamos por este resultado, pois tanto o momentum angular (4.85) quanto o torque (4.88) estão sendo calculados em relação a um ponto inercial (em repouso ou em movimento uniforme), onde a segunda lei de Newton assume sua forma mais simples. No entanto, há uma grande surpresa quando escrevemos o torque em relação à origem do referencial (não-inercial) \mathcal{O}_c solidário ao corpo, intro-

duzindo $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$,

$$\boldsymbol{\tau}_c = \int dm \mathbf{u} \times \ddot{\mathbf{r}} = \int dm \mathbf{u} \times \ddot{\mathbf{u}} + \left(\int dm \mathbf{u} \right) \times \ddot{\mathbf{R}}. \quad (4.90)$$

Note que $dm\ddot{\mathbf{r}}$ é a força no elemento de massa dm e \mathbf{u} é o braço desta força para calcular o torque em relação à origem do referencial não-inercial \mathcal{O}_c . Note também que $\boldsymbol{\tau}_c \neq \dot{\mathbf{L}}_c$, com \mathbf{L}_c definido em (4.87). Podemos até argumentar que este resultado já era esperado, pois o torque está sendo calculado num referencial não-inercial. A grande surpresa é que a relação $\boldsymbol{\tau}_c = \dot{\mathbf{L}}_c$ é válida num referencial não-inercial com sua origem no centro de massa! De fato, para o centro de massa, o último termo em (4.90) se anula devido à propriedade (4.43). Isto será muito útil logo a seguir.

4.6.4 As Equações de Euler

O único inconveniente em $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$, com $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, é que o tensor de inércia calculado no referencial inercial \mathcal{O} depende também do tempo e isto pode dar uma forma complicada para as equações de movimento. A solução deste problema está na relação (4.54), a qual será usada para calcularmos o torque com o momentum angular escrito no referencial girante (onde o tensor de inércia é independente do tempo). Assim,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{L}}. \quad (4.91)$$

Desta forma, podemos re-escrever (4.91) sem a presença do momentum angular,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (4.92)$$

As três equações de movimento contidas em (4.92) são conhecidas como equações de Euler. Elas desempenham o mesmo papel da segunda lei de Newton para as translações (Faça o Exercício 17). Não devemos esquecer que tudo que está no lado direito em (4.91) deve ser calculado no referencial não-inercial.

Podemos notar em (4.92) que somente quando o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ for paralelo ao vetor momentum angular \mathbf{L} , isto é, quando $\boldsymbol{\omega}$ for proporcional a um dos autovetores do tensor de inércia \mathbf{I} ,

pois $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, é que teremos a expressão $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$ com a qual estávamos acostumados. Além disto, devemos nos lembrar que o tensor de inércia nesta expressão é calculado no referencial solidário ao corpo rígido, onde ele é independente do tempo, e que o torque $\boldsymbol{\tau}$ está sendo observado no referencial inercial. Apenas o lado direito de (4.92) é que está sendo calculado no referencial não-inercial.

Não seria interessante se pudéssemos calcular o torque em (4.92) também em relação a algum ponto especial no referencial do corpo rígido? Isto ajudaria muito em situações em que o centro de massa do corpo rígido está em movimento. De fato este ponto especial existe: ele é o centro de massa. Reveja a discussão no final da subseção anterior. Portanto, podemos continuar usando $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$, com \mathbf{L} e $\boldsymbol{\tau}$ calculados em relação ao centro de massa, independentemente do centro de massa estar acelerado ou não. Isto significa que até mesmo o lado esquerdo de (4.92) pode ser calculado no referencial não-inercial do corpo rígido, mas este torque só pode ser calculado em relação a um ponto: o centro de massa (viva o centro de massa!).

O fato de podermos calcular tanto o torque (em relação ao centro de massa) quanto o tensor de inércia no referencial do corpo rígido nos permite aplicar a segunda lei de Newton com facilidade, por exemplo, a um corpo rolando em um plano inclinado, onde o centro de massa certamente está acelerado. É por isto que, em geral, as equações (diferenciais) de Euler devem ser resolvidas juntamente com as equações (diferenciais) provenientes da segunda lei de Newton para o movimento translacional do centro e massa.

Antes de alguns exemplos, uma observação sobre a taxa de variação da energia cinética (4.69) no tempo, ou seja, potência instantânea. Com o tensor de inércia calculado no referencial do corpo rígido, a derivada de (4.69) é

$$\dot{T} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (4.93)$$

na qual a última igualdade é possível somente porque o tensor de inércia \mathbf{I} é representado por uma matriz simétrica e o produto escalar também é simétrico (repita este procedimento usando a representação matricial do vetor velocidade angular). O resultado em (4.93) é idêntico a $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$,

$$\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (4.94)$$

Esta expressão para a potência do movimento rotacional é análoga à expressão $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ para a potência no movimento translacional.

Vejam alguns exemplos (simples) de como podemos utilizar as equações de Euler (4.92). Vamos considerar inicialmente um corpo rígido livre de torques. Esta situação é análoga à situação em que um corpo está em queda livre. Vamos supor também que o nosso corpo rígido esteja girando em torno de um de seus eixos principais, ou seja, vamos considerar que o vetor velocidade angular seja paralelo a um autovetor qualquer do tensor de inércia. Se o torque resultante é nulo, $\boldsymbol{\tau} = 0$, e se $\boldsymbol{\omega}$ for paralelo a \mathbf{I} , então a equação de Euler (4.92) nos diz que o vetor velocidade angular é constante no tempo, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, pois o tensor de inércia já é constante no tempo e $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$, com λ constante. Caso o corpo rígido não esteja girando em torno de um de seus eixos principais, isto é, caso $\boldsymbol{\omega}$ não seja mais paralelo a \mathbf{I} , então o vetor velocidade angular não será mais constante no tempo, pois teremos $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ de (4.92). Note que nestes dois casos o vetor momentum angular no referencial inercial é constante no tempo, pois o torque resultante é nulo.

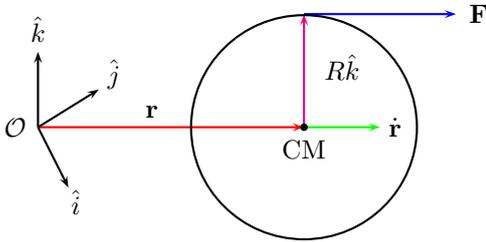


Figura 4.8: Esfera rolando em um plano horizontal sem deslizar. O referencial \mathcal{O} é inercial.

Como um segundo exemplo, vamos considerar um corpo rígido com uma distribuição uniforme de massa M na forma de uma esfera de raio R . O momento de inércia desta esfera, em torno de seu centro de massa, isto é, com a origem do referencial não-inercial colocada no centro de massa, é proporcional à identidade, $\mathbf{I} = I\mathbf{1}$, ou seja, os autovetores do tensor de inércia são triplamente degenerados (veja o Exercício 16). Vamos supor também que esta esfera esteja rolando, sem deslizar, sobre um plano horizontal. Em princípio, podemos imaginar a necessidade de uma força externa $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$ paralela ao plano horizontal para manter a esfera

rolando. Vamos supor que esta força seja constante e esteja sendo aplicada na parte superior da esfera conforme mostrado na Figura 4.8. Então esta força resultante produz um torque em torno do centro de massa da esfera,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= R\hat{k} \times (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) = RF_y\hat{i} + RF_x\hat{j} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + I\dot{\boldsymbol{\omega}} = I\dot{\boldsymbol{\omega}},\end{aligned}\quad (4.95)$$

onde aproveitamos também para usar as equações de Euler (4.92). Note que estamos usando o fato de podermos calcular inclusive o torque no referencial da esfera, desde que a origem esteja no centro de massa.

Re-escrevendo (4.95) em termos de componentes, temos

$$I\dot{\omega}_x = RF_y, \quad I\dot{\omega}_y = RF_x, \quad I\dot{\omega}_z = 0. \quad (4.96)$$

Além destas equações, temos que considerar o movimento de translação do centro de massa da esfera. O movimento de translação do centro de massa obedece a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}}$, ou seja,

$$F_x = M\ddot{x}, \quad F_y = M\ddot{y}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (4.97)$$

De fato, temos de escolher $z = R$ para que a esfera permaneça no plano XY (horizontal). Não devemos esquecer que a condição de rolamento sem deslizamento impõe condições de vínculos na velocidade do centro de massa,

$$\dot{\mathbf{r}} = -R\hat{k} \times \boldsymbol{\omega} = -R\omega_y\hat{i} - R\omega_x\hat{j}, \quad (4.98)$$

ou seja

$$\dot{x} = -R\omega_y, \quad \dot{y} = -R\omega_x, \quad \dot{z} = 0. \quad (4.99)$$

Ao invés de tentarmos resolver as equações acopladas (4.96), (4.97) e (4.99) formalmente, podemos improvisar. Por exemplo, podemos derivar as equações de vínculos (4.99) no tempo e eliminar as derivadas das componentes da velocidade angular usando (4.96) e, finalmente, eliminar as componentes da força usando (4.97), para obtermos

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -R\dot{\omega}_y = -\frac{R^2}{I}F_x = -\frac{MR^2}{I}\ddot{x} \\ &\Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_y = 0,\end{aligned}\quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -R\dot{\omega}_x = -\frac{R^2}{I}F_y = -\frac{MR^2}{I}\ddot{y} \\ &\Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_x = 0.\end{aligned}\quad (4.101)$$

Pronto, temos o que procurávamos: $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, movimento retilíneo para o centro de massa, e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, movimento uniforme para o vetor velocidade angular. Vamos às surpresas. Primeiro, note que a componente ω_z não precisa ser nula, como poderíamos esperar. Segundo, note que não há necessidade de uma força externa para manter a esfera rolando. Para que ela permaneça rolando, basta ter uma velocidade angular inicial. Esta situação é completamente análoga ao movimento uniforme do centro de massa. Basta haver inércia (massa ou momento de inércia) para haver movimento.

4.6.5 Exercícios

Exercício 8

Faça $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ em (4.54) e mostre que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c$. Use as propriedades do produto vetorial. Use também o fato de que $\boldsymbol{\omega}$ é o mesmo nos dois referenciais.

Exercício 9

Efetue as somas em (4.60) explicitamente e mostre que

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_1 = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \quad (4.102)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \quad (4.103)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_3 = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1, \quad (4.104)$$

conforme previsto pelas propriedades do produto vetorial (equivalente ao uso de determinantes).

Exercício 10

Verifique explicitamente a propriedade (4.64). Efetue também explicitamente as seguintes somas:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 \delta_{jr} \delta_{ks} x_k x_s = \delta_{jr} \sum_{k=1}^3 x_k x_k = \delta_{jr} r^2, \quad (4.105)$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 \delta_{js} \delta_{kr} x_k x_s = x_j x_r. \quad (4.106)$$

Exercício 11

Mostre que a energia cinética (4.69) pode ser reescrita nas seguintes formas:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}, \quad (4.107)$$

onde \mathbf{L} é o momentum angular (4.70).

Exercício 12

Use a definição (4.68) para calcular todos os seis elementos do tensor de inércia para o cubo descrito na Figura 4.7 e no texto ao lado da figura. Compare seus resultados com (4.72) e (4.73).

Exercício 13

Use $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$ e o tensor de inércia (4.74) para determinar a energia cinética (4.69) e o momentum angular (4.70). Recalcule também a energia cinética usando as expressões em (4.107). Calcule também o ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L} . Faça um desenho (bem feito) mostrando estes dois vetores juntamente com o cubo da Figura 4.7 e o respectivo sistema de coordenadas.

Exercício 14

Calcule o polinômio característico da matriz (4.74) e mostre que ele pode ser fatorado como mostrado em (4.76). Encontre o autovetor \mathbf{u}_1 (determine suas componentes) correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2\beta$, $\mathbf{I} \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$. Normalize este autovetor, isto é, imponha que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 1$. Isto determina a constante arbitrária α_1 ($\alpha_1 = 1/\sqrt{3}$).

Exercício 15

Normalize os três autovetores apresentados em (4.77) e construa uma matriz \mathbf{U} contendo estes autovetores normalizados como colunas,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

Mostre que esta matriz não é ortogonal, ou seja, $\mathbf{U}^{-1} \neq \mathbf{U}^T$. Mostre que a matriz definida em (4.80) é ortogonal. Mostre também que esta matriz (4.80) diagonaliza o tensor de inércia (4.74) segundo a prescrição (4.78).

Exercício 16

Determine o tensor de inércia (4.68) de uma esfera maciça de massa M , densidade uniforme e raio R . Coloque a origem do referencial no centro da esfera.

Exercício 17

Escreva explicitamente as três equações de movimento que estão contidas na relação vetorial (4.92). Use o tensor de inércia na forma diagonal e deixe as expressões em termos das componentes do torque, do tensor de inércia e do vetor velocidade angular.