

Introdução breve à Cosmologia

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

21 de setembro de 2023

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

1	As Equações de Einstein	1
2	Elementos de Geometria Diferencial	4
2.1	Conexão	4
2.1.1	Definição	4
2.1.2	Componentes	5
2.1.3	1-forma da conexão	6
2.1.4	Transporte paralelo	7
2.1.4.1	Geodésicas I	8
2.1.5	Conexão Riemanniana	9
2.1.6	Exercícios	11
2.2	Torção	12
2.2.1	Definição	12
2.2.2	Primeira equação estrutural.	12
2.2.2.1	Especulações.	13
2.2.3	Componentes	13
2.2.4	Símbolos de Christoffel	14
2.2.4.1	Geodésicas II	15
2.2.5	Exercícios	15
2.3	Curvatura	16
2.3.1	Definição	16
2.3.1.1	Segunda equação estrutural.	17
2.3.2	Componentes	17
2.3.2.1	Propriedades.	18
2.3.2.2	Leis de conservação.	18
2.4	Derivada de Lie	19
2.4.1	Difeomorfismo, mapa tangente e <i>pull back</i>	19
2.4.2	Transformações pontuais e de coordenadas	20
2.4.3	Objetos e quantidades geométricas	22
2.4.4	Derivadas de Lie	22
3	As Equações de Einstein	28
3.1	Formulação Lagrangiana	28
3.1.1	Espaço-tempo plano	28
3.1.2	Espaço-tempo curvo	31

3.1.3	Formulação lagrangiana	33
3.2	Linearização	37
3.2.1	Limite newtoniano	39
3.2.2	Ondas gravitacionais	41
4	Cosmologia	43
4.1	Espaços com simetria maximal	43
4.1.1	Condições sobre tensores.	43
4.1.2	A volta do tempo universal	46
4.1.3	O <i>redshift</i> cosmológico	47
4.1.4	O tensor energia-momentum	49
4.1.5	Termodinâmica	49
4.1.6	Equações de Einstein	50
4.1.7	Nosso universo I	52
4.2	Espaços estacionários	53
4.2.1	Introdução	53
4.2.2	Schwarzschild	54
4.2.3	Motivação	55
4.2.4	Propriedades	56
4.2.4.1	Provas	56
4.2.5	Forma canônica	57
4.2.6	Campos	58
4.2.7	Universo de Gödel	61
A	Topologia	62
A.1	Introito	62
A.2	Estrutura	62
A.3	Propriedades	65
A.4	Construções	67
B	Variedade diferenciável	70

Capítulo 1

As Equações de Einstein

Sob certas condições, as equações de Einstein podem ser escritas na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa S_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad R = R^\nu{}_\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (1.1)$$

onde G é a constante gravitacional (do modelo Newtoniano), c é a velocidade da luz (no vácuo), $S_{\mu\nu}$ é o tensor dos esforços contendo informações sobre a distribuição de matéria e energia, e R é o traço do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = 2(-\Gamma^\alpha{}_{\mu[\alpha,\nu]} + \Gamma^\alpha{}_{\beta[\alpha}\Gamma^\beta{}_{\nu]\mu}). \quad (1.2)$$

Os coeficientes $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ são definidos pela ação de uma conexão ∇_x e, num sistema de coordenadas local, são calculados pelas coordenadas $g_{\mu\nu}$ da métrica,

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e_\alpha, \quad \Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu}), \quad \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\mu\nu}, \quad (1.3)$$

também conhecidos por símbolos de Christoffel, onde e_μ é um vetor da base canônica dos vetores tangentes num determinado ponto.

Observando o tensor de Ricci em (1.2) e os símbolos de Christoffel em (1.3), percebemos que as dez equações de Einstein em (1.1) são equações diferenciais parciais (EDP), acopladas e não-lineares, para as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica. Estas EDP determinam como a métrica depende das coordenadas (num sistema de coordenadas local). A ordem mais alta das derivadas parciais é dois e pode haver termos de ordem seis na métrica (produto de seis componentes, incluindo suas derivadas). O tensor dos esforços $S_{\mu\nu}$ contribuirá com funções conhecidas da posição, além da própria métrica. Portanto são EDPs altamente não-lineares, em geral.

A métrica determinada pelas equações de Einstein é de um espaço \mathcal{M} , o qual é denominado de variedade diferenciável. Este espaço contém também o espaço \mathcal{V} dos vetores tangentes e seu dual \mathcal{V}^* , bem como o espaço das funções diferenciáveis \mathcal{F} . Este espaço (ou variedade, por simplicidade) pode ser reconstruído “colando-se” pequenas cópias do espaço euclidiano. Um ponto p num destes “retalhos” euclidianos tem coordenadas x^μ (coordenadas locais). A métrica nos dará informações sobre a estrutura geométrica desta variedade.

Algumas observações sobre notações que estamos usando:

1. Índices repetidos numa mesma expressão representa uma soma (convenção de Einstein para somas),

$$R = R^\nu{}_\nu = \sum_{\nu=0}^3 R^\nu{}_\nu. \quad (1.4)$$

2. Um par de índices dentro de colchetes (parênteses) representa uma antissimetrização (simetrização),

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu[\alpha,\nu]} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} \right), \quad \Gamma^\alpha{}_{\mu(\alpha,\nu)} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} \right). \quad (1.5)$$

A simetrização e a antissimetrização pode ser aplicada a um número n de índices, resultando na soma de todas as combinações pares para a simetrização e ímpares para a antissimetrização, dividida pelo número $n!$ de combinações.

3. Um índice precedido por uma vírgula (ponto e vírgula) representa uma derivada parcial (derivada covariante),

$$f_{,\nu} = \partial_\nu f = \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \quad X^\alpha{}_{;\mu} = \nabla_\mu X^\alpha = X^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} X^\nu. \quad (1.6)$$

4. Os versores da base do espaço tangente \mathcal{V} são denotados por e_μ e aqueles do espaço dual \mathcal{V}^* por e^μ , os quais satisfazem, por definição,

$$e^\mu(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.7)$$

Em um sistema de coordenadas local, podemos usar 1-formas e derivadas parciais como base,

$$e^\mu = dx^\mu, \quad e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.8)$$

Um vetor tangente X qualquer e um vetor dual η qualquer podem sempre serem escritos em termos de uma base:

$$X = X^\mu e_\mu, \quad \eta = \eta_\nu e^\nu, \quad (1.9)$$

onde as componentes X^μ e η_ν são funções da posição.

5. Os vetores duais em \mathcal{V}^* se “alimentam” de vetores tangentes em \mathcal{V} ,

$$\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta(X) = \eta_\mu X^\mu e^\mu(e_\nu) = \eta_\nu X^\nu, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^*, \forall X \in \mathcal{V}, \quad (1.10)$$

produzindo números reais (\mathbb{R}). Os vetores tangentes se “alimentam” de funções escalares em \mathcal{F} ,

$$X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(f) = X^\nu e_\nu(f) = X^\nu f_{,\nu} \text{ (local)}, \quad \forall X \in \mathcal{V}, \forall f \in \mathcal{F}, \quad (1.11)$$

produzindo novas funções escalares.

6. A ação de um vetor tangente numa função é uma derivada, denominada de derivada

direcional,

$$X(f) = \left. \frac{d}{dt} f(p + tX) \right|_{t=0}, \quad (1.12)$$

onde p é um ponto da variedade diferenciável.

7. Um tensor T do tipo (k, l) é um mapa multilinear de k vetores tangentes e l vetores duais no conjunto dos números reais ou no conjunto das funções reais (num determinado ponto):

$$T : \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.13a)$$

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_l}, \quad (1.13b)$$

onde \mathcal{V} é o conjunto dos vetores tangentes (base e_μ) e \mathcal{V}^* é o conjunto dos vetores duais aos tangentes (base e^μ).

8. Alterações de índices são efetuadas pela métrica:

$$e_\mu = g_{\mu\nu} e^\nu, \quad e^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu, \quad g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (1.14)$$

Um espaço (variedade) com uma métrica é a Geometria Riemanniana.

9. A métrica nos permite calcular, entre outras coisas, num sistema local de coordenadas, a distância ds entre dois pontos próximos,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.15)$$

e o produto escalar entre dois vetores,

$$A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu. \quad (1.16)$$

A assinatura da métrica que usaremos em 4D é $(+, -, -, -)$, representando os sinais dos auto-valores, ou -2 , a soma desses sinais.

10. Uma curva $x^\mu(\lambda)$ parametrizada por λ tem um vetor tangente u^μ ,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \dot{x}^\mu. \quad (1.17)$$

Desta forma, a métrica pode ser reescrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = u_\alpha u^\alpha d\lambda^2. \quad (1.18)$$

A curva $x^\mu(\lambda)$ é do tipo espaço se $u_\alpha u^\alpha > 0$, do tipo tempo se $u_\alpha u^\alpha < 0$ e do tipo nula (luz) se $u_\alpha u^\alpha = 0$.

Capítulo 2

Elementos de Geometria Diferencial

2.1 Conexão

2.1.1 Definição

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável, \mathcal{V} o espaço dos vetores (ou campos) tangentes em p , um ponto em \mathcal{M} , e \mathcal{F} o conjunto das funções diferenciáveis em \mathcal{M} . Uma conexão ∇ em \mathcal{M} é uma aplicação $\nabla : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que $\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, $\forall X, Y \in \mathcal{V}$, definida por

$$\nabla_{X+fY}Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{V}, \forall f \in \mathcal{F}, \quad (2.1)$$

$$\nabla_X(Y + fZ) = \nabla_X Y + X(f)Z + f\nabla_X Z, \quad (2.2)$$

$$\nabla_X(T \otimes T') = (\nabla_X T) \otimes T' + T \otimes (\nabla_X T'), \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}, \quad (2.3)$$

$$C \circ \nabla_X = \nabla_X \circ C, \quad (2.4)$$

onde \mathcal{T} é o conjunto dos tensores do tipo (r, s) em \mathcal{M} e C é a operação de contração, a qual pode ser definida por

$$C : \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad C(e_\nu \otimes e^\mu) = e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.5)$$

onde e_ν e e^ν são os vetores de base em \mathcal{V} e \mathcal{V}^* (dual), respectivamente. Devido às propriedades (2.2)–(2.3), a conexão ∇ tem o *status* de derivada. Portanto, a conexão de um campo tangente constante é nula e podemos acrescentar mais uma propriedade na definição de uma conexão:

$$\nabla_X f = X(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (2.6)$$

Do ponto de vista geométrico, uma conexão $\nabla_X Y$ nos informa a taxa de variação de Y na direção de X ,

$$\nabla_X Y = \left. \frac{d}{dt} Y(p + tX) \right|_{t=0}, \quad (2.7)$$

num ponto p em \mathcal{M} . Note que o campo tangente X é o vetor tangente da reta $t \rightarrow p + tX$, a qual é a primeira aproximação de uma curva que passa pelo ponto p . Isto nos permite investigar dois campos tangentes infinitesimalmente próximos, $Y(p)$ e $Y(p + tX)$. O campo $Y(p + tX)$ precisa ser transportado para o ponto p sem qualquer alteração, um processo

conhecido como “transporte paralelo”¹. Assim, podemos determinar se $Y(p)$ e $Y(p+tX)$ estão “conectados” de alguma forma, por exemplo, se um deles é uma “cópia” do outro, devidamente deslocado, transportado, ao longo desta curva passando por p . Transporte paralelo e curvas geodésicas são fundamentais. A conexão definida por (2.7), também conhecida por derivada covariante, tem uma importância prática, operacional, mas ainda não apresenta uma relação explícita com a estrutura geométrica (métrica) da variedade diferenciável.

Exercício 1. Use um tensor do tipo $(1,1)$ para exemplificar a propriedade (2.4). Sugestões:

1. escreva este tensor $(1,1)$ como

$$T = T^\mu{}_\nu e_\mu \otimes e^\nu; \quad (2.8)$$

2. use a métrica para relacionar vetores tangentes e duais:

$$e^\nu = g^{\nu\alpha} e_\alpha. \quad (2.9)$$

Exercício 2. Use a definição (2.7) para provar as propriedades (2.1)–(2.4). Caso prefira, substitua o produto tensorial por um produto escalar.

2.1.2 Componentes

Seja $\{e_\alpha\}_1^n$ uma base para os vetores tangentes em \mathcal{V} . Sendo $\nabla_{e_\mu} e_\nu$ um outro vetor tangente, este pode ser escrito na base $\{e_\alpha\}_1^n$ como

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e_\alpha, \quad (2.10)$$

onde os campos escalares $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ são denominados de **componentes da conexão**. Vale notar que estes campos escalares não formam um tensor, embora sejam grafados em geral como tal. Note também que as componentes da conexão em (2.10) informam como o espaço tangente varia em todas as direções. Isto aproxima a conexão da estrutura geométrica da variedade diferenciável.

A ação de uma conexão $\nabla_X Y$ pode ser escrita em termos dos coeficientes $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ escrevendo os campos tangentes em termos de uma base, $X = X^\alpha e_\alpha$ e $Y = Y^\alpha e_\alpha$, e fazendo uso das propriedades (2.1)–(2.2) e de (2.10),

$$\nabla_X Y = X^\mu (\nabla_\mu Y^\alpha) e_\alpha, \quad (2.11)$$

onde introduzimos

$$\nabla_\mu Y^\alpha = e_\mu(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} Y^\nu. \quad (2.12)$$

A quantidade $\nabla_\mu Y^\alpha$, definida pela Eq. (2.12), denominada de **derivada covariante**, forma um tensor do tipo $(1,1)$. Fazendo uso de um sistema local de coordenadas, onde $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha = \partial_\alpha$, a derivada covariante pode ser reescrita como

$$Y^\alpha{}_{;\mu} \equiv \nabla_\mu Y^\alpha = \partial_\mu(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} Y^\nu = Y^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} Y^\nu. \quad (2.13)$$

¹Veja a escada de Schild para uma construção geométrica, pág. 248 do livro Gravitation

Por isso, o operador ∇_μ é também conhecido como operador derivada covariante, uma extensão da derivada usual. Por ser um tensor, a derivada covariante, ao contrário da usual, permite a construção de novos tensores pelo processo de derivação covariante.

Cuidados. Vale observar que $\nabla_\mu \neq \nabla_{e_\mu}$, isto é $\nabla_\mu Y^\alpha$ é um nome e não a ação de uma conexão ∇_{e_μ} numa função Y^α , pois, por definição, $\nabla_{e_\mu} Y^\alpha = e_\mu(Y^\alpha)$.

Definimos inicialmente a conexão como uma aplicação binária de vetores tangentes em vetores tangentes. No entanto, como vetores tangentes e duais estão interligados pela métrica, podemos também definir a ação da conexão em vetores duais. Seja $\{e^\alpha\}_1^n$ uma base para os vetores duais \mathcal{V}^* em \mathcal{M} definida por $e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$. Então, $\forall X, Y \in \mathcal{V}$ e $\forall \eta \in \mathcal{V}^*$, temos, por definição, $\eta(Y) = C(\eta \otimes Y) \in \mathcal{F}$ e, pela propriedade (2.2), $\nabla_X(\eta(Y)) = X(\eta(Y))$. Por outro lado, pelas propriedades (2.3)–(2.4), obtemos

$$\nabla_X \circ C(\eta \otimes Y) = C \circ ((\nabla_X \eta) \otimes Y + \eta \otimes (\nabla_X Y)) = (\nabla_X \eta)(Y) + \eta((\nabla_X Y)) = X(\eta(Y)). \quad (2.14)$$

Esta identidade nos permite definir a conexão também como a aplicação $\nabla : \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$, $\nabla : (X, \eta) \mapsto \nabla_X \eta \in \mathcal{V}^*$, $\forall X \in \mathcal{V}$ e $\forall \eta \in \mathcal{V}^*$, induzida pela última igualdade em (2.14),

$$(\nabla_X \eta)Y = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y). \quad (2.15)$$

Escrevendo todos os vetores em alguma base, $\eta = \eta_\alpha e^\alpha$, $X = X^\alpha e_\alpha$ e $Y = Y^\alpha e_\alpha$, obtemos as componentes da derivada covariante de um vetor dual,

$$(\nabla_X \eta)(Y) = (\nabla_X \eta)_\alpha Y^\alpha = (\nabla_\mu \eta_\alpha) X^\mu Y^\alpha, \quad (2.16)$$

onde

$$\nabla_\mu \eta_\alpha = e_\mu(\eta_\alpha) - \Gamma^\nu_{\mu\alpha} \eta_\nu \quad (2.17)$$

é um tensor do tipo $(0, 2)$. Em particular, quando $\eta = e^\alpha$, $X = e_\mu$ e $Y = e_\nu$, então de (2.15):

$$(\nabla_{e_\mu} e^\alpha)(e_\nu) = -e^\alpha(\Gamma^\beta_{\mu\nu} e_\beta) = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{e_\mu} e^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\beta} e^\beta. \quad (2.18)$$

A ação da derivada covariante ∇ em um tensor arbitrário pode ser construída como no exemplo seguinte. Consideremos aqui o tensor $G = g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu$ do tipo $(0, 2)$. Então, da propriedade (2.2) e de (2.18),

$$\nabla_X g = \nabla_X(g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu) = (\nabla_X g)_{\mu\nu} e^\mu e^\nu = X^\alpha (\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) e^\mu e^\nu, \quad (2.19)$$

onde

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = e_\alpha(g_{\mu\nu}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma} \quad (2.20)$$

é um tensor do tipo $(0, 3)$. Este exemplo mostra que cada um dos dois índices do tensor $g_{\mu\nu}$ contribui com um coeficiente de conexão.

2.1.3 1-forma da conexão

Apesar dos coeficientes (ou componentes) da conexão não formarem um tensor de terceira ordem, eles formam um tensor de primeira ordem do tipo $(0, 1)$, ou seja, uma 1-forma. Da

$\nabla_{e_\mu} e_\nu = +\Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha$	$\nabla_{e_\mu} e^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\alpha} e^\alpha$
$\nabla_\mu Y^\alpha = e_\mu(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Y^\nu$	$\nabla_\mu Y_\alpha = e_\mu(Y_\alpha) - \Gamma^\nu_{\mu\alpha} Y_\nu$
$\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = e_\alpha(g^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} g^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} g^{\mu\sigma}$	$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = e_\alpha(g_{\mu\nu}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma}$

Tabela 2.1: Derivada covariante em termos das componentes da conexão. Num sistema local de coordenadas, $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$.

primeira coluna da Tabela 2.1, temos

$$\Gamma^\nu_{\alpha\mu} = e^\nu(\nabla_{e_\alpha} e_\mu) \equiv \omega^\nu_{\mu}(e_\alpha), \quad (2.21)$$

O objeto $\omega^\nu_{\mu}(e_\alpha)$ definido em (2.21) transforma um vetor tangente (e_α) em uma função (ou número) real e é linear em seu único argumento (devido a uma das propriedades da conexão). Estas são as características que definem uma 1-forma, a qual é um tensor do tipo $(0, 1)$.

Do ponto de vista geométrico, podemos afirmar que $\omega^\nu_{\mu}(e_\alpha)$ “é a taxa inicial na qual e_μ gira na direção de e_ν ao longo da curva tendo e_α como vetor tangente”. Veremos mais adiante que estas 1-formas tem um papel importante na estrutura geométrica de uma variedade diferenciável. Em particular, quando a variedade é uma curva imersa no espaço euclidiano, estas 1-formas estão diretamente relacionadas com a curvatura e a torção usuais. Igualmente importante: o uso de formas (diferenciais) não requer um sistema de coordenadas local.

2.1.4 Transporte paralelo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva determinada pelo vetor tangente X . Se diz que um vetor tangente Y é “paralelo” (em relação a uma conexão ∇) a um outro vetor tangente X , ao longo da curva γ determinada por X , se

$$\nabla_X Y = 0, \quad (2.22)$$

ou seja, Y é paralelo a X quando Y não variar (gitar) na direção de X . Esta é a generalização da movimentação de um vetor no espaço tridimensional euclidiano sem mudar sua direção. Esta noção generalizada de paralelismo tem propriedades geométricas e físicas importantes.

Considerando a Sec. 2.1.2, a condição de paralelismo (2.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^\mu \nabla_{e_\nu} (Y^\nu e_\nu) = X^\mu e_\mu(Y^\nu) e_\nu + X^\mu Y^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu \\ &= X^\mu [e_\mu(Y^\nu) + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} Y^\alpha] e_\nu \\ &= [X(Y^\nu) + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} X^\mu Y^\alpha] e_\nu \\ &= (X^\mu \nabla_\mu Y^\nu) e_\nu = 0, \end{aligned}$$

onde as duas últimas formas são muito úteis,

$$X(Y^\nu) + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} X^\mu Y^\alpha = 0, \quad (2.23a)$$

$$X^\mu \nabla_\mu Y^\nu = 0. \quad (2.23b)$$

Consideremos um sistema local de coordenadas (x^μ) . A curva $x(t)$ no \mathbb{R}^n , correspondente à curva $\gamma(t)$ na variedade \mathcal{M} , será determinada univocamente pelo vetor tangente $X = X^\alpha(x)\partial_\alpha$ (derivada direcional), cujas componentes são

$$X^\alpha(x) = \frac{dx^\alpha}{dt} \equiv \dot{x}^\alpha, \quad (2.24)$$

satisfazendo a condição inicial $\dot{x}^\alpha(t_0) = X^\alpha(x(t_0))$. Para qualquer função analítica f em \mathcal{M} , a ação do vetor tangente X em f é

$$X(f(x(t))) = \dot{x}^\mu(t)\partial_\mu f(x(t)) = \frac{d}{dt}f = \dot{f}. \quad (2.25)$$

Assim, podemos reescrever a condição (2.23a) localmente como:

$$\dot{Y}^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu Y^\alpha = 0. \quad (2.26)$$

Estas são equações diferenciais parciais (EDPs) de primeira ordem para as componentes do vetor tangente Y , paralelo ao vetor tangente X . As soluções destas EDPs são determinadas univocamente por uma única condição inicial. Assim, sempre existirá um campo vetorial Y satisfazendo a condição (2.22) ao longo da curva $\gamma(t)$, determinada pelo campo vetorial X , em uma variedade \mathcal{M} com uma conexão ∇ . Como a condição (2.26) nos permite “conectar” vetores em espaços tangentes distintos, através dos coeficientes de conexão $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, isto explica o nome para a conexão ∇ , dado por Levi-Civita.

Naturalmente, esta noção de paralelismo possibilita correlacionar diferentes vetores tangentes em pontos diferentes de uma variedade: os vetores tangentes X e Y satisfazendo $\nabla_X Y = 0$ estão correlacionados por um transporte paralelo ao longo da curva $\gamma(t)$ determinada por X .

2.1.4.1 Geodésicas I

Em particular, quando $Y = X$ em (2.22) ou em (2.26), a curva $x(t)$ determinada por

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \quad (2.27)$$

é denominada de *geodésica*. Note que $\nabla_X X = 0$ informa que a taxa de variação do vetor tangente X na direção tangente à curva γ é nula.

A geodésica (2.27) pode ser reescrita numa forma mais adequada á cinemática. A taxa \dot{x}^α é a velocidade u^α , por ser tangente à curva $x^\alpha(t)$,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = \dot{x}^\alpha, \quad (2.28)$$

onde t é apenas um parâmetro (não necessariamente o tempo). Assim, a geodésica (2.27) torna-se em

$$u^\nu\nabla_\nu u^\mu = \dot{u}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0, \quad (2.29)$$

onde usamos também a forma (2.23b). O lado esquerdo informa que a velocidade u^μ não

muda de direção ao longo da geodésica.

Geodésicas não são únicas. Mediante uma reparametrização $t \rightarrow s = s(t)$, a equação (2.27) da geodésica torna-se

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = b(t) \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (2.30)$$

com $b(t)$ (arbitrária) satisfazendo

$$\ddot{s} - b(t)\dot{s}^2 = 0. \quad (2.31)$$

Quando $b(t) = 0$, então $s = c_1 t + c_0$ (transformação afim), onde c_i são constantes. As geodésicas da forma (2.27) estão definidas univocamente a menos de uma transformação afim.

2.1.5 Conexão Riemanniana

Uma métrica g em \mathcal{M} é um tensor do tipo $(0, 2)$,

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}, \quad g : (X, Y) \mapsto g(X, Y) \in \mathcal{F}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}, \quad (2.32)$$

simétrico e não degenerado,

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}, \quad (2.33)$$

$$g(X, Y) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{V} \Rightarrow Y = 0. \quad (2.34)$$

A noção básica de métrica é aquela mesma que aprendemos em Mecânica (Física I): ela informa a orientação relativa dos vetores de uma determinada base e define o produto escalar entre dois vetores quaisquer. A métrica desempenha o mesmo papel de uma equação analítica que representa uma curva ou uma superfície no espaço euclidiano: ela representa a estrutura geométrica de uma variedade diferenciável.

Vamos denotar por $g_{\mu\nu}$ o produto escalar entre dois vetores tangentes quaisquer de uma determinada base,

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu). \quad (2.35)$$

Estas são as informações contidas no manual de uso quando compramos uma base num espaço tangente. Conhecendo estas informações podemos calcular o produto escalar entre dois vetores tangentes $X = X^\mu e_\mu$ e $Y = Y^\nu e_\nu$ quaisquer,

$$X \cdot Y = g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu. \quad (2.36)$$

Momento de conectar a conexão com a estrutura geométrica da variedade diferenciável, via a métrica. Dada uma métrica g em uma variedade \mathcal{M} , diz-se que uma conexão ∇ é compatível com a métrica g quando $g(Y(t), Z(t))$ for independente de t ao longo de uma curva $\gamma(t)$ determinada por X , quaisquer que sejam os vetores tangentes Y e Z , desde que sejam paralelos a X . Em outras palavras, ângulos e comprimentos são preservados durante o transporte paralelo. Este processo é denominado de isometria.

Uma condição necessária e suficiente para que uma conexão ∇ seja compatível com uma

métrica g é:

$$\nabla_X g = 0, \quad \forall X \in \mathcal{V}. \quad (2.37)$$

De fato, como

$$g(Y, Z) = g_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu = C(g \otimes Y \otimes Z), \quad (2.38)$$

onde C é a operação de contração, então

$$\begin{aligned} \nabla_X g(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) \\ &= \nabla_X \circ C(g \otimes Y \otimes Z) = C \circ \nabla_X(g \otimes Y \otimes Z) \\ &= C \circ (\nabla_X g \otimes Y \otimes Z + g \otimes \nabla_X Y \otimes Z + g \otimes Y \otimes \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Note que a primeira igualdade é devido ao fato de $g(Y, Z) = g_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu \in \mathcal{F}$ ser uma função escalar. A condição $\nabla_X g = 0$ foi utilizada na última igualdade. Consideremos agora o transporte paralelo dos vetores Y e Z , paralelamente a um vetor X , ao longo de uma curva $\gamma(t)$ determinada por $X = d/dt$. Do resultado anterior, temos

$$X(g(Y, Z)) = \frac{d}{dt} g(Y, Z) = 0, \quad (2.40)$$

pois $\nabla_X Y = \nabla_X Z = 0$. Assim $g(Y, Z)$ é uma constante ao longo da curva $\gamma(t)$.

A isometria (2.37) determina a parte simétrica dos coeficientes de conexão em termos das componentes da métrica. Das Eqs. (2.19)–(2.20) temos

$$\nabla_X g = 0 \Rightarrow \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow e_\alpha(g_{\mu\nu}) = \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} = \Gamma_{\mu\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha\mu} \equiv 2\Gamma_{(\mu|\alpha|\nu)}. \quad (2.41)$$

A notação $(\mu|\alpha|\nu)$ significa uma simetrização nos índices μ e ν (o índice α foi excluído). Numa base local, a parte simétrica das componentes da conexão é determinada pela derivada parcial da métrica (um gradiente). Além disso, a isometria $\nabla_X g = 0$ torna a conexão única.

Cuidados. Note que a métrica foi utilizada como uma aplicação para relacionar as componentes de vetores tangentes (contravariantes, X^ν) com as componentes de vetores duais (covariantes, X_μ):

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu. \quad (2.42)$$

Muito cuidado deve ser tomado quando há derivadas nas expressões onde os índices precisam ser modificados pela métrica. Por exemplo, pode ser necessário escrever o tensor $B_\mu{}^\nu = \nabla_\mu A^\nu$ como $B_{\mu\nu}$. Neste caso, o segundo índice requer atenção:

$$B_{\mu\nu} = g_{\nu\alpha} B_\mu{}^\alpha = g_{\nu\alpha} \nabla_\mu A^\alpha = \nabla_\mu (g_{\nu\alpha} A^\alpha) - A^\alpha \nabla_\mu g_{\nu\alpha}. \quad (2.43)$$

Portanto, apenas quando $\nabla_X g = 0$ ou, equivalentemente, $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = 0$ é que podemos escrever $B_{\mu\nu} = g_{\nu\alpha} \nabla_\mu A^\alpha = \nabla_\mu A_\nu$.

2.1.6 Exercícios

Exercício 3. *Mostre que os coeficientes de conexão não formam um tensor e que, ao contrário, a derivada covariante é um tensor. Sugestões:*

1. *considere uma mudança de base $\{\mu\} \xrightarrow{A} \{\mu'\}$ e, conseqüentemente, das coordenadas de um vetor tangente $Y = Y^\nu e_\nu$, da forma*

$$e_{\mu'} = A^\nu{}_{\mu'} e_\nu, Y^{\mu'} = A^{\mu'}{}_\nu Y^\nu, A^\mu{}_{\alpha'} A^{\alpha'}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu; \quad (2.44)$$

2. *verifique que os coeficientes de conexão $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$, definidos em (2.10), transformam-se como*

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\mu'\nu'} = A^{\alpha'}{}_\gamma A^\rho{}_{\mu'} A^\sigma{}_{\nu'} \Gamma^\gamma{}_{\rho\sigma} + A^{\alpha'}{}_\gamma A^\rho{}_{\mu'} e_\rho(A^\gamma{}_{\nu'}); \quad (2.45)$$

3. *verifique que a quantidade $\nabla_\nu Y^\nu$ transforma-se como um tensor (1,1):*

$$\nabla_{\nu'} Y^{\mu'} = e_{\nu'}(Y^{\mu'}) + \Gamma^{\mu'}{}_{\nu'\alpha'} Y^{\alpha'} = A^{\mu'}{}_\alpha A^\beta{}_{\nu'} \nabla_\beta Y^\alpha. \quad (2.46)$$

Exercício 4. *Deduza as expressões aparecendo em (2.12), (2.17) e (2.20). Sem fazer cálculos, que tipo de tensor é a derivada covariante de um tensor do tipo (k,l)?*

Exercício 5. *Determine explicitamente os resultados (2.26) e (2.27).*

Exercício 6. *Mostre que mediante uma reparametrização conveniente, a equação da geodésica (2.27) pode ser reescrita na forma (2.30).*

Exercício 7. *Mostre que*

$$s(t) = c_0 + c_1 \int e^{\int b(t) dt} dt \quad (2.47)$$

é a solução geral da EDO (2.31).

Exercício 8. *Considere uma curva arbitrária $\gamma(t)$, determinada por $X = \dot{x}^\nu \partial_\nu$, conectando os pontos p e q . Em termos da métrica, a distância entre esses pontos é dado por*

$$l = \int_p^q ds = \int_p^q (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} = \int_{t_1}^{t_2} (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt})^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} L^{1/2} dt, \quad (2.48)$$

1) *Mostre que esta distância é independente da parametrização, isto é, podemos realizar uma mudança geral de parâmetro, $t \rightarrow s = s(t)$, sem alterá-la.* 2) *Use as equações de Lagrange para mostrar que a integral definida em (2.48) tem um extremo quando*

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (\dot{x}^\sigma \dot{x}_\sigma) \right] \dot{x}^\alpha. \quad (2.49)$$

3) *Podemos afirmar que a geodésica é a curva com a menor distância entre dois pontos em M ?* 4) *Interprete a função L como a Lagrangiana de uma partícula livre. Cuidado com a conservação da energia, pois podemos ter uma situação relativística.*

2.2 Torção

2.2.1 Definição

A torção T de uma conexão ∇ é uma aplicação bilinear $T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definida por

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}, \quad (2.50)$$

onde $[X, Y] = XY - YX$ é o produto de Lie. Podemos notar da definição que a torção satisfaz as seguintes propriedades:

$$T(Y, X) = -T(X, Y), \quad (2.51)$$

$$T(fX + Y, Z) = fT(X, Z) + T(Y, Z). \quad (2.52)$$

Para provar estas propriedades, basta usar as das propriedades (2.1)–(2.2) e as propriedades do produto de Lie:

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad (2.53)$$

$$[Z, X + fY] = [Z, X] + f[Z, Y] + (Zf)Y. \quad (2.54)$$

As propriedades da torção mostram que ela é um mapa multilinear, o qual combina dois vetores tangentes e forma um novo vetor tangente. Permitindo que um vetor dual η atue no resultado da torção, teremos um número real,

$$T(X, Y, \eta) \equiv \eta(T(X, Y)), \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^*. \quad (2.55)$$

Desta forma, a torção é um tensor do tipo (2,1),

$$T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad T = T^{\mu\nu}{}_{\alpha} e_{\mu} \otimes e_{\nu} \otimes e^{\alpha}. \quad (2.56)$$

Vale observar que na ausência da torção, o produto de Lie entre campos tangentes é determinado também pela conexão,

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] = XY - YX = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \quad (2.57)$$

2.2.2 Primeira equação estrutural.

é instrutivo determinarmos a componente contravariante da torção,

$$T^{\alpha}(X, Y) = T(e^{\alpha}, X, Y) = X(Y^{\alpha}) - Y(X^{\alpha}) - [X, Y]^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\nu}(X)Y^{\nu} - \omega^{\alpha}{}_{\nu}(Y)X^{\nu}, \quad (2.58)$$

onde fizemos uso das 1-formas da conexão, definidas em (2.21). A expressão acima fica mais interessante trocando as componentes dos campos tangentes pela ação de um elemento da base dual, $Y^{\alpha} = e^{\alpha}(Y)$,

$$T^{\alpha}(X, Y) = X(e^{\alpha}(Y)) - Y(e^{\alpha}(X)) - e^{\alpha}([X, Y]) + \omega^{\alpha}{}_{\nu}(X)e^{\nu}(Y) - \omega^{\alpha}{}_{\nu}(Y)e^{\nu}(X). \quad (2.59)$$

Agora é o momento de introduzir duas formas diferenciais novas (a menos de um fator 2), do tipo 2-formas,

$$(\omega^\alpha{}_\nu \wedge e^\nu)(X, Y) \equiv \omega^\alpha{}_\nu(X)e^\nu(Y) - \omega^\alpha{}_\nu(Y)e^\nu(X), \quad (2.60)$$

$$(de^\alpha)(X, Y) \equiv X(e^\alpha(Y)) - Y(e^\alpha(X)) - e^\alpha([X, Y]), \quad (2.61)$$

onde \wedge representa o produto exterior entre formas diferenciais e d representa a derivada exterior numa forma diferencial (com a propriedade $d^2 = 0$). Assim, a ação da componente contravariante da torção em (2.59) pode ser reescrita em termos de formas diferenciais,

$$T^\alpha(X, Y) = (de^\alpha)(X, Y) + (\omega^\alpha{}_\nu \wedge e^\nu)(X, Y). \quad (2.62)$$

Como os vetores tangentes X e Y são arbitrários, então

$$T^\alpha = de^\alpha + \omega^\alpha{}_\nu \wedge e^\nu. \quad (2.63)$$

Estas equações, associadas à torção, formam o primeiro conjunto das chamadas equações estruturais de Cartan, as quais determinam as principais características geométricas de uma variedade.

A estrutura da componente contravariante da torção em (2.63) é semelhante à estrutura da derivada covariante em (2.12), introduzida como uma extensão da derivada usual numa variedade. Desta forma podemos tomar

$$De^\alpha \equiv de^\alpha + \omega^\alpha{}_\nu \wedge e^\nu, \quad (2.64)$$

como uma extensão da derivada exterior usual. Ao contrário da derivada exterior usual, $D^2 \neq 0$. No entanto, a primeira equação estrutural (2.63) pode ser reescrita numa forma elegante (e compacta): $T^\alpha = De^\alpha$.

2.2.2.1 Especulações.

Como uma extensão da derivada exterior, o termo extra em (2.64) contém informações sobre como os vetores tangentes (de base) estão girando em todas as direções. Qual é o significado da palavra torção neste contexto? Veja o excelente comentário de [John Baez sobre o significado de torção](#).

2.2.3 Componentes

Seja $\{e_\alpha\}$ uma base para os vetores tangentes e $\{e^\alpha\}$ uma base para os vetores duais. As componentes do tensor torção nesta base são dadas por

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = T(e^\alpha, e_\mu, e_\nu) = 2\Gamma^\alpha{}_{[\mu\nu]} - C^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (2.65)$$

onde

$$2\Gamma^\alpha{}_{[\mu\nu]} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}, \quad 2\Gamma^\alpha{}_{(\mu\nu)} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}, \quad (2.66)$$

e

$$C^{\alpha}_{\mu\nu} = [X_{\mu}, Y_{\nu}]^{\alpha} \quad (2.67)$$

são as constantes de estrutura do produto de Lie. Note que as componentes antisimétricas da conexão podem ser determinadas se conhecermos a torção e o produto de Lie. Vale lembrar que as componentes simétricas são dadas pela métrica. Porém, o contrário é ainda mais interessante: se a torção é nula, então as constantes de estrutura são determinadas pela parte antissimétrica da conexão, $C^{\alpha}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$.

Em um sistema local de coordenadas, $e_{\alpha} = \partial_{\alpha}$, as constantes de estrutura são nulas (para campos suaves) e $de^{\nu} = 0$ ($e^{\nu} = dx^{\nu}$). Uma consequência importante nesse caso é a não-comutatividade entre as derivadas ordinárias (∂_{α}) e covariantes (∇_{α}):

$$\nabla_{\mu}f_{,\nu} - \nabla_{\nu}f_{,\mu} = -T^{\alpha}_{\mu\nu}f_{,\alpha}, \quad (2.68)$$

onde $f \in \mathcal{F}$ e estamos fazendo uso da notação $\partial_{\nu}f = f_{,\nu}$ ($f_{,\nu} = \nabla_{\nu}f$). Note que esta não-comutatividade é proporcional à torção.

2.2.4 Símbolos de Christoffel

Impondo que a conexão seja compatível com a métrica ($\nabla_X g = 0$) e que não tenha torção, suas componentes $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ são determinadas completamente pela métrica. A compatibilidade com a métrica determina a parte simétrica e a torção nula determina a parte antisimétrica.

Uma forma de determinar as componentes $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ é fazendo uso da derivada covariante da métrica como escrita na última igualdade em (2.39) e das outras duas obtidas dela por permutações cíclicas,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (2.69)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad (2.70)$$

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X). \quad (2.71)$$

Podemos somar as duas últimas e subtrair a primeira e depois isolar $g(X, \nabla_Y Z)$,

$$2g(X, \nabla_Y Z) = -X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) + Z(g(X, Y)) + g(X, [Y, Z]) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]), \quad (2.72)$$

onde utilizamos (2.57), uma consequência de impormos torção nula. As componentes da conexão podem ser calculadas tomando $X = e_{\mu}$, $Y = e_{\alpha}$ e $Z = e_{\nu}$ (vetores de base) e usando as propriedades do tensor métrico:

$$g_{\mu\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\nu} = \Gamma_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2}\{-e_{\mu}(g_{\alpha\nu}) + e_{\alpha}(g_{\mu\nu}) + e_{\nu}(g_{\mu\alpha}) + C_{\mu\alpha\nu} + C_{\alpha\mu\nu} + C_{\nu\mu\alpha}\}. \quad (2.73)$$

Note que as constantes de estrutura precisam ser conhecidas. Mas para serem conhecidas, os campos vetoriais precisam ser conhecidos primeiro.

Fazendo uso de um sistema local de coordenadas, os vetores da base do espaço tangente podem ser identificados com derivadas parciais ($e_{\mu} = \partial_{\mu}$). Como derivadas parciais comu-

tam, então os campos tangentes também comutam e, conseqüentemente, as constantes de estrutura se anulam ($c^\alpha_{\mu\nu} = [e_\mu, e_\nu]^\alpha = 0$). Portanto, num sistema local de coordenadas, as componentes da conexão são determinadas exclusivamente pela métrica,

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta}), \quad (2.74)$$

os quais são denominadas de símbolos de Christoffel (1869). Note que

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha}. \quad (2.75)$$

Em muitas ocasiões, a contração (traço)

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\gamma,\nu} = \frac{1}{2g}g_{,\nu} = \partial_\nu \ln \sqrt{|g|}, \quad (2.76)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, é importante. Por exemplo, ela aparece na divergência (contração na derivada covariante) de um tensor arbitrário X^ν :

$$\nabla_\nu X^\nu = X^\nu_{,\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\alpha}X^\alpha. \quad (2.77)$$

O traço (2.76) aparece também no cálculo das componentes do tensor de Ricci, Eq. (2.98).

2.2.4.1 Geodésicas II

As Eqs. (2.27) para a geodésica $x^\mu(t)$, onde t é um parâmetro qualquer, podem ser reescritas numa forma mais conveniente para identificarmos quantidades conservadas. Vamos introduzir as velocidades $u^\mu = \dot{x}^\mu$ e abaixar o índice contravariante livre,

$$g_{\sigma\mu}\dot{u}^\mu + \Gamma_{\mu\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\sigma\mu}\dot{u}^\mu + \frac{1}{2}(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma})u^\alpha u^\beta = g_{\sigma\alpha}\dot{u}^\alpha + g_{\sigma\alpha,\beta}u^\alpha u^\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\sigma}u^\alpha u^\beta = 0, \quad (2.78)$$

onde usamos o símbolo de Christoffel escrito em termos da métrica, dado em (2.74). Os dois primeiros termos na última igualdade acima podem ser trocados por uma única derivada,

$$g_{\sigma\alpha}\dot{u}^\alpha + g_{\sigma\alpha,\beta}u^\alpha u^\beta = \frac{d}{dt}(g_{\sigma\alpha}u^\alpha) = \dot{u}_\sigma. \quad (2.79)$$

Assim, a geodésica (2.78) pode ser reescrita como

$$\dot{u}_\sigma - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\sigma}u^\alpha u^\beta = 0, \quad u^\mu = \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.80)$$

Esta forma nos revela que a velocidade u_σ será constante ao longo da geodésica quando a coordenada x^σ não aparecer explicitamente na métrica ($g_{\alpha\beta,\sigma} = 0$).

2.2.5 Exercícios

Exercício 9. Verifique os resultados (2.65) e (2.68).

Exercício 10. Verifique que os coeficientes de conexão são dados pela (2.74) quando a torção é nula e a métrica é compatível com a conexão (isometria).

Exercício 11. Exemplifique o resultado (2.84) para uma matriz simétrica tridimensional arbitrária.

Exercício 12. A penúltima igualdade em (2.76) é uma propriedade válida para qualquer matriz. Seja $(g_{\mu\nu})$ uma matriz arbitrária e não-singular. Então a matriz inversa $(g^{\mu\nu})$ correspondente pode ser calculada através de:

$$(g^{\mu\nu}) = \frac{1}{g}(A_{\mu\nu}), \quad (2.81)$$

onde $(A_{\mu\nu})$ é a matriz dos co-fatores de $(g_{\mu\nu})$,

$$A_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} g_{\mu\nu} \sum'_p \delta_p g_{2p_2} \cdots g_{np_n}, \quad (2.82)$$

e g o determinante de $(g_{\mu\nu})$:

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{\mu\nu}) = \sum_p \delta_p g_{1p_1} \cdots g_{np_n} \\ &= g_{11} \sum'_p \delta_p g_{2p_2} \cdots g_{np_n} + \cdots + (-1)^{1+n} g_{1n} \sum'_p \delta_p g_{2p_2} \cdots g_{np_n} \\ &= \sum_\nu g_{1\nu} A_{1\nu}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde a soma é feita sobre as permutações $p = (p_1, \dots, p_n)$ de n inteiros, as quais formam o grupo das permutações S_n com $n!$ elementos. Cada permutação p possui uma paridade δ_p definida como ± 1 quando o número de transposições (troca de dois elementos) contidas em p for par ou ímpar, respectivamente. Mostre que a derivada do determinante acima poder ser escrita como:

$$\begin{aligned} g_{,\lambda} &= \sum_p \delta_p [(g_{1p_1,\lambda} \cdots g_{np_n}) + \cdots + (g_{1p_1} \cdots g_{np_n,\lambda})] \\ &= \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} A_{\mu\nu} = g \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.3 Curvatura

2.3.1 Definição

A curvatura R de uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma aplicação multilinear $R : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definida por

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{V}, \quad (2.85)$$

ou

$$R(X, Y)Z \equiv (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{V}, \quad (2.86)$$

a qual é um tensor do tipo $(1, 3)$, naturalmente definido como

$$R(\eta, X, Y, Z) \equiv \eta(R(X, Y, Z)), \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^*. \quad (2.87)$$

Note que a curvatura definida em (2.85) é antisimétrica nas duas primeiras entradas, $R(Y, X, Z) = -R(X, Y, Z)$.

2.3.1.1 Segunda equação estrutural.

2.3.2 Componentes

Seja $\{e_\alpha\}$ uma base para os vetores tangentes e $\{e^\alpha\}$ uma base para os vetores duais. As componentes do tensor de curvatura nesta base são dadas pela ação (2.87),

$$e^\alpha(R(e_\mu, e_\nu, e_\beta)) = e_\mu(\Gamma^\alpha_{\nu\beta}) - e_\nu(\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) + \Gamma^\alpha_{\mu\delta}\Gamma^\delta_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\delta}\Gamma^\delta_{\mu\beta} - C^\delta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\delta\beta}, \quad (2.88)$$

onde $C^\alpha_{\mu\nu} = [e_\mu, e_\nu]^\alpha$ são constantes de estrutura. Note que estas componentes são anti-simétricas em μ e ν .

Em um sistema local de coordenadas, $e_\alpha = \partial_\alpha$, as constantes de estrutura $C^\delta_{\mu\nu}$ são nulas. Nesse caso, as componentes do tensor de curvatura são determinadas exclusivamente pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} \text{ ou } R^\alpha_{\mu\nu\beta} &\equiv \Gamma^\alpha_{\nu\beta,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\delta}\Gamma^\delta_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\delta}\Gamma^\delta_{\mu\beta} \\ &= \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\delta_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\delta\nu}\Gamma^\delta_{\mu\beta} \\ &= 2(-\Gamma^\alpha_{\beta[\mu,\nu]} + \Gamma^\alpha_{\delta[\mu}\Gamma^\delta_{\nu]\beta}), \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde introduzimos a condição de torção nula na penúltima igualdade, a qual implica na simetria dos índices covariantes dos símbolos de Christoffel, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$. Neste caso as derivadas covariantes $\nabla_\mu \nabla_\nu$ não comutam devido ao tensor de curvatura (torção nula),

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu X^\alpha) - \nabla_\nu(\nabla_\mu X^\alpha) = +R^\alpha_{\beta\mu\nu} X^\beta, \quad (2.90)$$

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu \eta_\beta) - \nabla_\nu(\nabla_\mu \eta_\beta) = -R^\alpha_{\beta\mu\nu} \eta_\alpha. \quad (2.91)$$

Estas relações podem ser usadas como a ação do tensor de curvatura,

$$\nabla_{\mu\nu} X^\alpha = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] X^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} X^\beta, \quad \nabla_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu. \quad (2.92)$$

A regra para a ação de $\nabla_{\mu\nu}$ num tensor arbitrário é usar uma contração com o tensor de curvatura para cada índice contravariante (e trocar o sinal para índices covariantes), conforme ilustrado na Tabela 2.2.

$\nabla_{\mu\nu}X^\alpha = +R^\alpha_{\beta\mu\nu}X^\beta$	$\nabla_{\mu\nu}X_\beta = -R^\alpha_{\beta\mu\nu}X_\alpha$
$\nabla_{\mu\nu}X^{\alpha\beta} = +R^\alpha_{\delta\mu\nu}X^\delta + R^\beta_{\delta\mu\nu}X^\delta$	$\nabla_{\mu\nu}X_{\alpha\beta} = -R^\delta_{\alpha\mu\nu}X_\delta - R^\delta_{\beta\mu\nu}X_\delta$

Tabela 2.2: Ação do tensor de curvatura em termos da derivada covariante $\nabla_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$.

2.3.2.1 Propriedades.

A maioria das propriedades seguintes valem apenas para o caso onde a torção é nula e a métrica é compatível com a conexão (os símbolos de Christoffel são determinados pela métrica) e com a grafia $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ em (2.89):

$$2R_{\alpha\beta(\mu\nu)} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\beta\nu\mu} = 0, \quad (\text{RI})$$

$$2R_{(\alpha\beta)\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\beta\alpha\mu\nu} = 0, \quad (\text{RII})$$

$$6R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 2(R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu}) = 0, \quad (\text{RIII})$$

$$2R_{[\alpha\beta|\mu\nu]} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (\text{RIV})$$

$$R_{[\alpha\beta\mu\nu]} = 0, \quad (\text{RV})$$

$$6\nabla_{[\rho}R^\alpha_{|\beta|\mu\nu]} = 2(\nabla_\rho R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\rho\mu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\rho}) = 0. \quad (\text{RVI})$$

As propriedades (RI)–(RIII) são consequências da ação (2.92) e suas generalizações mostradas na Tabela 2.2. A simplificação nas propriedades (RIII) e (RVI) decorre das duas primeiras propriedades. As propriedades (RIV)–(RV) decorrem das três primeiras propriedades.

A propriedade (RVI) é conhecida como identidade de Bianchi (1902) ou Ricci-Bianchi (pouco antes de 1889). Para prová-la, precisamos verificar, pela inspeção explícita das permutações, que

$$\nabla_{[\rho}\nabla_{\mu\nu]} = \nabla_{[\mu\nu}\nabla_{\rho]}. \quad (2.93)$$

Usando esta identidade, as ações mostradas na Tabela 2.2 e a propriedade (RIII), temos

$$\nabla_{[\rho}\nabla_{\mu\nu]}\omega_\alpha = -\nabla_{[\rho}R^\gamma_{|\alpha|\mu\nu]}\omega_\gamma - R^\gamma_{\alpha[\mu\nu}\nabla_{\rho]}\omega_\gamma, \quad (2.94)$$

$$\nabla_{[\mu\nu}\nabla_{\rho]}\omega_\alpha = -R^\gamma_{[\rho\mu\nu]}\nabla_\gamma\omega_\alpha - R^\gamma_{\alpha[\mu\nu}\nabla_{\rho]}\omega_\gamma = -R^\gamma_{\alpha[\mu\nu}\nabla_{\rho]}\omega_\gamma. \quad (2.95)$$

Comparando estas duas expressões, resulta a identidade de Bianchi,

$$\nabla_{[\rho}R^\gamma_{|\alpha|\mu\nu]}\omega_\gamma = 0, \quad (2.96)$$

para ω_γ arbitrárias. A antissimetrização na identidade de Bianchi ocorre somente nos índices ρ , μ e ν .

2.3.2.2 Leis de conservação.

Devido às propriedades de antissimetria (RI)–(RII), as contrações (ou traços) seguintes são nulas,

$$R^\alpha_{\alpha\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu}{}^\mu = 0. \quad (2.97)$$

A única possibilidade de contrair dois índices do tensor de curvatura, e obter um resultado não-nulo, é

$$R^\sigma{}_{\alpha\sigma\nu} = R_{\alpha\sigma\nu}{}^\sigma \equiv R_{\alpha\nu} = R_{\nu\alpha}. \quad (2.98)$$

Este tensor resultante é conhecido como **tensor de Ricci** (1903). Note que este tensor é único devido às propriedades (RI)–(RII) e sua simetria decorre da propriedade (RIV). As suas componentes em termos da métrica, calculadas a partir das componentes do tensor de curvatura (2.89), são

$$R_{\mu\nu} = 2(-\Gamma^\alpha{}_{\mu[\alpha,\nu]} + \Gamma^\alpha{}_{\beta[\alpha}\Gamma^\beta{}_{\nu]\mu}). \quad (2.99)$$

Contraindo os índices ρ e α na identidade de Bianchi, propriedade (RIV), temos

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\nu\beta} - \nabla_\nu R_{\mu\beta}. \quad (2.100)$$

O lado esquerdo desta relação também pode ser reescrita em termos do tensor de Ricci, contraindo os índices β e μ ,

$$2\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \nabla_\nu R = \nabla^\mu g_{\mu\nu} R, \quad (2.101)$$

onde introduzimos o traço do tensor de Ricci, $R = R^\nu{}_\nu$, e usamos o fato da conexão ser compatível com a métrica, $\nabla^\alpha g_{\mu\nu} = 0$. O traço R do tensor de Ricci é conhecido como a curvatura escalar da variedade diferenciável. Este resultado representa a conservação (local) das quantidades $G_{\mu\nu}$, conhecido como **tensor de Einstein**,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad R = R^\nu{}_\nu. \quad (2.102)$$

Vale lembrar que o tensor métrico também satisfaz $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$, pois a conexão é compatível com ele. Note que o tensor de Einstein contém derivadas de segunda ordem da métrica. Numa variedade de quatro dimensões, o tensor de Einstein é o único tensor contendo derivadas de segunda ordem na métrica que satisfaz a lei de conservação em (2.102).

Veremos adiante que o tensor de Einstein será identificado com o tensor energia-momentum, fornecendo as equações da dinâmica do campo “gravitacional” $g_{\mu\nu}$.

2.4 Derivada de Lie

Além da conexão, há um outro processo para quantificar a mudança em um tensor arbitrário devido ao movimento na direção de um campo vetorial dado, conhecido como derivada de Lie. Embora não seja possível formar novos tensores com a derivada de Lie (em contraste com a conexão), veremos que ela desempenha um papel muito importante no estudo das leis de conservação.

2.4.1 Difeomorfismo, mapa tangente e *pull back*

Seja $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um difeomorfismo (isomorfismo com uma inversa) entre as duas variedades \mathcal{M} e \mathcal{N} de mesma dimensão. Então o difeomorfismo (uma transformação linear) ψ nos permite identificar o espaço tangente V_p em um ponto p de \mathcal{M} com o espaço tangente $V_{\psi(p)}$

em um ponto $q = \psi(p)$ de \mathcal{N} ,

$$\psi_* : V_p \rightarrow V_{\psi(p)} / \forall X \in V_p, \forall \psi_* X \in V_{\psi(p)} \Rightarrow \psi_* X(f) \equiv X(f \circ \psi), \forall f \in \mathcal{N}, \quad (2.103)$$

um processo conhecido por *drag along* (ou *carry along*), onde vetores tangentes em \mathcal{M} são “carregados” (transportados) até \mathcal{N} . Não somente vetores tangentes, mas qualquer objeto geométrico pode ser *drag along* pelo difeomorfismo ψ .

O difeomorfismo ψ nos permite também definir uma função $f \circ \psi$ (composição) em \mathcal{M} para cada função f definida em \mathcal{N} . Esse processo pelo qual $f \circ \psi$ foi definida é conhecido na literatura de língua inglesa por *pull back*. Usando o processo *pull back*, podemos transferir um vetor dual em \mathcal{N} para \mathcal{M} ,

$$\psi^* : V_{\psi(p)}^* \rightarrow V_p^* / \forall X \in V_p, \forall \eta \in V_{\psi(p)}^*, \forall \psi^* \eta \in V_p^* \Rightarrow \psi^* \eta(X) \equiv \eta(\psi_* X). \quad (2.104)$$

Qualquer objeto geométrico pode sofrer a ação de um *pull back* definido pelo difeomorfismo ψ .

Quando $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ e $\psi^*(T) = T$, ψ é uma transformação de simetria para o campo tensorial T , ou seja, embora o campo tensorial T tenha sido movido por ψ , ele continua o mesmo. Em particular, a transformação de simetria para o tensor métrico g é denominada de isometria. Veremos que ângulos e distâncias são preservados numa isometria. Em geral se uma teoria física $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ é construída através de campos tensoriais \mathcal{T} de uma variedade \mathcal{M} , então uma outra teoria física $(\mathcal{N}, \psi_* \mathcal{T})$, onde $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo, terá as mesmas propriedades físicas. Desta forma, difeomorfismo é a liberdade (*gauge*, grupo de invariância) desta teoria física.

2.4.2 Transformações pontuais e de coordenadas

Até aqui mantivemos qualquer sistema de coordenadas fora da discussão de difeomorfismos. Apenas os campos foram movidos por uma transformação induzida pelo difeomorfismo ψ . Esta situação é denominada de transformação pontual (ou ponto de vista ativo). No entanto, outra interpretação pode ser feita em termos de coordenadas (ponto de vista passivo).

Escolhido um sistema de coordenadas (μ) numa vizinhança de um ponto $p \in M$, vamos denotar por x^μ as coordenadas de p em (μ) . Naturalmente, este mesmo sistema de coordenadas (μ) pode ser usado numa vizinhança U de $q = \psi(p) \in N$. Vamos denotar por y^μ as coordenadas de q em (μ) . A transformação inversa ψ^{-1} pode ser usada para definir um novo sistema de coordenadas (μ') numa outra vizinhança $\psi^{-1}(U)$ de p requerendo

$$x^{\mu'} \Big|_p = y^\mu \Big|_{\psi(p)}, \quad (2.105)$$

ou seja, que as coordenadas de p nesse novo sistema de coordenadas (μ') sejam idênticas às coordenadas de $\psi(p)$ no sistema de coordenadas (μ) . Assim, ψ induz uma transformação de coordenadas $(\mu) \rightarrow (\mu')$ sem a necessidade de “locomover” os campos. Apesar da diferença de princípios dos dois pontos de vista, eles são equivalentes. As componentes do campo $\psi(T)$ em $\psi(p)$ no sistema de coordenadas (μ) (ponto de vista ativo) são também as as componentes de T em p no sistema de coordenadas (μ') (ponto de vista passivo).

Consideremos inicialmente uma mudança de coordenadas $(\mu) \rightarrow (\mu')$ em uma variedade

\mathcal{M} . Isto significa que um dado ponto p em \mathcal{M} pode ser escrito nestes dois sistemas de coordenadas. As coordenadas de p no sistema de coordenadas (μ) serão denotadas por x^μ e no sistema (μ') por $x^{\mu'}$. Um único ponto e dois sistemas de coordenadas. Vamos quantificar localmente (infinitesimalmente) os dois pontos de vista. O ponto de vista passivo é descrito localmente por uma transformação de coordenadas afim, definida como

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^\mu + a^{\mu'}, \quad \det(\Lambda^{\mu'}_{\mu}) \neq 0. \quad (2.106)$$

A transformação inversa $(\mu') \rightarrow (\mu)$ é dada por

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} x^{\mu'} + a^\mu, \quad (2.107)$$

onde

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^\mu_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu'} \Lambda^\mu_{\mu'} = \delta^\mu_{\nu'}, \quad a^\mu = -\Lambda^\mu_{\nu'} a^{\nu'}. \quad (2.108)$$

O símbolo de Kronecker $\delta^\mu_{\nu'}$ tem o seguinte significado: $\delta_1^1 = \delta_1^1 = 1$, $\delta_2^1 = \delta_1^2 = 0$, etc. Vale observar que $\delta^\mu_{\nu'} X^\nu \neq X^{\mu'}$, mas $\delta^\mu_{\alpha'} \delta^{\alpha'}_{\nu'} = \delta^\mu_{\alpha'} \delta^{\alpha'}_{\nu'} = \delta^\mu_{\nu'}$. O conjunto $\{\Lambda, a\}$ forma o grupo das transformações afim. Tais transformações de coordenadas formam as matrizes de mudança de base

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \quad \Lambda^\mu_{\mu'} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}, \quad \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^\mu_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu'} \Lambda^\mu_{\mu'} = \delta^\mu_{\nu'}. \quad (2.109)$$

O ponto de vista ativo, $p \rightarrow \psi(p)$, é descrito localmente por uma transformação pontual

$$y^\mu = P^\mu_{\alpha} x^\alpha + b^\mu, \quad (2.110)$$

onde x^μ e y^μ representam as coordenadas de p e $\psi(p)$, respectivamente. Note que esta transformação envolve apenas um sistema de coordenadas, mas dois pontos. Há uma transformação pontual para cada transformação de coordenadas (2.106) quando o novo sistema de coordenadas (μ') for convenientemente escolhido de forma a permitir que

$$y^\mu|_{\psi(p)} = \delta^\mu_{\mu'} x^{\mu'}|_p, \quad (2.111)$$

isto é, quando as coordenadas do ponto transformado $\psi(p)$ no sistema (μ) forem iguais às coordenadas do ponto original p no sistema (μ') . Diz-se neste caso que o sistema (μ') foi “arrastado” (*dragged along*). De fato, as componentes de $\psi(p)$ no sistema (μ') podem ser calculadas através da transformação de coordenadas (2.106):

$$y^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} y^\mu + a^{\mu'} \quad (2.112)$$

$$= \Lambda^{\mu'}_{\mu} (P^\mu_{\alpha} x^\alpha + b^\mu) + a^{\mu'} \quad (2.113)$$

$$= \delta^{\mu'}_{\mu} x^\mu. \quad (2.114)$$

Esta igualdade nos permite determinar P e b :

$$P^\mu_{\nu} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \delta^{\alpha'}_{\nu'}, \quad b^\mu = -\Lambda^\mu_{\alpha'} a^{\alpha'}. \quad (2.115)$$

2.4.3 Objetos e quantidades geométricas

Um objeto geométrico Φ em um ponto p de uma variedade \mathcal{M} é uma correspondência entre os sistemas de coordenadas na região contendo p e conjuntos (ordenado) de números satisfazendo duas condições: 1) Há apenas um conjunto de números para cada sistema de coordenadas; 2) Se Φ_Λ representa as componentes do objeto Φ no sistema de coordenadas (μ) e $\Phi_{\Lambda'}$ em (μ') , então $\Phi_{\Lambda'}$ são funções do ponto p , $q = \psi(p)$, Φ_Λ , $\Lambda^{\mu'}_\mu$ e das derivadas de $\Lambda^{\mu'}_\mu$:

$$\Phi_{\Lambda'} = \delta_{\Lambda'}^\Lambda F_\Lambda(p, q, \Phi_\Lambda, \Lambda^{\mu'}_\mu, \dots), \quad \Phi_\Lambda = F_\Lambda(p, q, \Phi_{\Lambda'}, \Lambda^\mu_{\mu'}, \dots). \quad (2.116)$$

Note que a transformação inversa possui a mesma forma funcional (o mesmo F_Λ). Uma quantidade é um objeto geométrico onde $\Phi_{\Lambda'}$ são funções apenas de Φ_Λ e $\Lambda^{\mu'}_\mu$, sendo linear e homogênea em Φ_Λ e algebricamente homogênea em $\Lambda^{\mu'}_\mu$ (isto é, pode envolver várias cópias lineares de Λ). Tensores é um exemplo bem conhecido de quantidades geométricas.

2.4.4 Derivadas de Lie

Permitindo que as componentes de uma quantidade Φ sejam funções analíticas em uma região em torno de um ponto p em \mathcal{M} podemos formar campos Φ_Λ , representados no sistema de coordenadas (μ) . Podemos também formar um campo $\bar{\Phi} = \psi_*(\Phi)$ em uma região em torno do ponto $\psi(p)$, também em \mathcal{M} , tal que suas componentes $\bar{\Phi}_{\Lambda'}$ no sistema de coordenadas (μ') satisfaçam

$$\bar{\Phi}_{\Lambda'}|_{\psi(p)} = \Phi_\Lambda|_p. \quad (2.117)$$

Este processo de “deslocamento” do campo ocorre, em geral, em uma dada direção ao longo de uma curva $\gamma(t)$ determinada por um vetor tangente X . Isto significa que o difeomorfismo ψ_t é gerado pelo vetor tangente X e forma um grupo (local) com um único parâmetro (t , real). A derivada de Lie de um campo Φ em relação ao vetor tangente X em p é definida como

$$\mathcal{L}_X \Phi_\Lambda(p) \equiv - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\Phi}_\Lambda(p) - \Phi_\Lambda(p)}{t}. \quad (2.118)$$

Assim como o vetor tangente X é o gerador da transformação pontual (finita) $p \rightarrow \psi(p)$, dada pela Eq. (2.127), a derivada de Lie \mathcal{L}_X é o gerador da transformação finita $\Phi_\Lambda(p) \rightarrow \bar{\Phi}_\Lambda(p)$,

$$\bar{\Phi}_\Lambda(p) = \psi^* \Phi_\Lambda(p) = \exp(-t \mathcal{L}_X) \Phi_\Lambda(p). \quad (2.119)$$

O sinal negativo nesta transformação é devido ao fato de $\bar{\Phi}_\Lambda$ ter sido definido em $\psi(p)$ e estar sendo calculado em p (veja a Eq. (2.127)). Portanto, \mathcal{L}_X é o gerador de um grupo com um único parâmetro contínuo t (confira a definição (2.118)). Uma outra expressão equivalente para a derivada de Lie pode ser escrita derivando a (2.119) em relação ao parâmetro t :

$$\frac{d}{dt} \psi_t^* \Phi = -\mathcal{L}_X \psi_t^* \Phi + \exp(-t \mathcal{L}_X) \frac{d}{dt} \Phi. \quad (2.120)$$

Re-arranjando os termos, após o limite $t \rightarrow 0$, teremos:

$$\left. \frac{d}{dt} (\psi_t^* \Phi - \Phi) \right|_{t=0} = \delta(\psi_t^* \Phi) - \delta(\Phi) = -\mathcal{L}_X \Phi. \quad (2.121)$$

Portanto, as duas quantidades Φ e $\bar{\Phi}$ contendo as mesmas informações físicas estão relacionadas por transformações infinitesimais ao longo de um vetor tangente arbitrário. Este resultado será muito útil no estudo da formulação lagrangiana do campo gravitacional. Sejam, em \mathcal{M} , T_1 e T_2 tensores arbitrários, f uma função, C uma contração e X, Y e Z vetores tangentes, então a derivada de Lie satisfaz as seguintes propriedades:

$$C \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ C, \quad (2.122)$$

$$\mathcal{L}(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}T_2), \quad (2.123)$$

$$\mathcal{L}_X(Y + fZ) = \mathcal{L}_X Y + f\mathcal{L}_X Z + X(f)Z, \quad (2.124)$$

$$\mathcal{L}_{(X+fY)}Z = \mathcal{L}_X Z + f\mathcal{L}_Y Z - Z(f)Y, \quad (2.125)$$

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}Z = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y Z - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X Z. \quad (2.126)$$

Vamos aqui utilizar a definição da derivada de Lie para obter expressões explícitas para a derivada de Lie de escalares, vetores tangentes e duais. A derivada de Lie de um tensor arbitrário poderá então ser calculada a partir destes resultados. Consideremos uma curva $\gamma(t)$ determinada por $X = X^\alpha e_\alpha$ ($= X^\alpha \partial_\alpha$ em algum sistema de coordenadas). O ponto p , com coordenadas x^μ , é levado ao ponto $q = \psi(p)$, com coordenadas y^μ , ao longo de $\gamma(t)$ pela transformação pontual finita

$$\begin{aligned} y^\mu &= \exp(tX)x^\mu \\ &= (1 + tX^\alpha \partial_\alpha + O(t^2))x^\mu \\ &\cong x^\mu + tX^\mu, \end{aligned} \quad (2.127)$$

onde $t \rightarrow 0$ e em $t = 0$ temos $p = q$. Comparando esta forma infinitesimal com a transformação pontual (2.110), temos

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad b^\mu = tX^\mu. \quad (2.128)$$

Esta transformação pontual corresponde à transformação (infinitesimal) de coordenadas $(\mu) \rightarrow (\mu')$ (confira as relações (2.108) e (2.115)):

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \delta^{\mu'}_\nu, \quad a^{\mu'} = -\delta^{\mu'}_\nu tX^\nu, \quad (2.129)$$

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \delta^\mu_{\nu'}, \quad a^\mu = tX^\mu. \quad (2.130)$$

Assim as transformações de coordenadas (2.106) e (2.107) podem ser reescritas como:

$$x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_\nu (x^\nu - tX^\nu), \quad (2.131)$$

$$x^\mu = \delta^\mu_{\nu'} x^{\nu'} + tX^\mu. \quad (2.132)$$

As matrizes de mudança de base, definidas em (2.109), são determinadas a partir destas

últimas duas relações:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\mu'}_{\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu} - t\partial_{\nu}X^{\alpha}), \quad (2.133)$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu'} = \delta^{\alpha}_{\nu'}(\delta^{\mu}_{\alpha} + t\partial_{\alpha}X^{\mu}). \quad (2.134)$$

Da definição (2.118) e de (2.127) podemos determinar a derivada de Lie de uma quantidade escalar ϕ . A condição $\bar{\phi}(q) = \bar{\phi}(\exp(tX)p) = \phi(p)$ pode ser escrita também como $\bar{\phi}(p) = \phi(\exp(-tX)q)$, onde $q = \psi(p)$. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\phi(p) &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\phi}(p) - \phi(p)}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\exp(-tX)q) - \phi(p)}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - tX)\phi(p) - \phi(p)}{t} \\ &= X(\phi(p)) = \nabla_X\phi(p), \end{aligned} \quad (2.135)$$

onde usamos o fato $\phi(q) = \exp(tX)\phi(p)$. Este mesmo procedimento pode ser seguido para determinarmos a derivada de Lie de um campo vetorial tangente Y^{μ} . Como no caso anterior,

$$\bar{Y}^{\mu'}(q) = \delta^{\mu'}_{\mu}Y^{\mu}(p), \quad (2.136)$$

pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{\mu'}(q) &= \bar{Y}^{\mu'}(\exp(tX)p) \\ &= \exp(tX)\bar{Y}^{\mu'}(p) \\ &= \delta^{\mu'}_{\mu}Y^{\mu}(p). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Portanto,

$$\bar{Y}^{\mu'}(p) = \delta^{\mu'}_{\mu} \exp(-tX)Y^{\mu}(p) \cong \delta^{\mu'}_{\mu}(1 - tX)Y^{\mu}(p). \quad (2.138)$$

Resta apenas passar as componentes $\bar{Y}^{\mu'}$ para o sistema de coordenadas (μ) . Isto é feito com o auxílio da matriz (2.134):

$$\bar{Y}^{\mu}(p) = A^{\mu}_{\mu'}(p)\bar{Y}^{\mu'}(p) \cong \delta^{\alpha}_{\mu'}(\delta^{\mu}_{\alpha} + t\partial_{\alpha}X^{\mu}(p))\bar{Y}^{\mu'}(p). \quad (2.139)$$

Desta forma, a derivada de Lie \mathcal{L}_XY^{μ} pode ser avaliada em p :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_XY^{\mu}(p) &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}^{\mu}(p) - Y^{\mu}(p)}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta^{\alpha}_{\mu'}(\delta^{\mu}_{\alpha} + t\partial_{\alpha}X^{\mu})\delta^{\mu'}_{\beta}(1 - tX)Y^{\beta} - Y^{\mu}}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\delta^{\mu}_{\alpha} + t\partial_{\alpha}X^{\mu})(1 - tX)Y^{\alpha} - Y^{\mu}}{t} \\ &= X(Y^{\mu}) - Y(X^{\mu}) = ([X, Y])^{\mu}. \end{aligned}$$

Este resultado pode ser interpretado numa forma independente de coordenadas. Para tal, basta interpretarmos $\mathcal{L}_X Y^\mu$ como as componentes do vetor $\mathcal{L}_X Y$:

$$\mathcal{L}_X Y = (\mathcal{L}_X Y)^\mu e_\mu = [X, Y], \quad (2.140)$$

onde

$$(\mathcal{L}_X Y)^\mu = \mathcal{L}_X Y^\mu = [X, Y]^\mu. \quad (2.141)$$

Para o caso de uma variedade de torção nula, $T = 0$, temos

$$\mathcal{L}_X Y^\mu = [X, Y]^\mu = \nabla_X Y^\mu - \nabla_Y X^\mu. \quad (2.142)$$

Analogamente, a derivada de Lie de um campo vetorial dual $\omega = \omega_\nu e^\nu$ ($e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu$),

$$\mathcal{L}_X \omega = (\mathcal{L}_X \omega)_\nu e^\nu, \quad (2.143)$$

onde

$$(\mathcal{L}_X \omega)_\nu = \mathcal{L}_X \omega_\nu = X(\omega_\nu) + \omega_\alpha e_\nu(X^\alpha), \quad (2.144)$$

é definida e determinada. A forma independente de coordenadas correspondente é:

$$\mathcal{L}_X \omega_\nu = \nabla_X(\omega_\nu) + \omega_\alpha \nabla_\nu(X^\alpha). \quad (2.145)$$

Em particular, $\mathcal{L}_X g = 0$, onde g é o tensor métrico, é uma isometria (preserva ângulos e distâncias). A distância infinitesimal em p é dada pela métrica g calculada em p ,

$$ds^2|_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'}(p) dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (2.146)$$

enquanto que em $q = \psi(p)$,

$$ds^2|_q = g_{\mu\nu}(q) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(q) \delta_\mu^\mu \delta_{\nu'}^{\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (2.147)$$

onde a última igualdade é devido à condição (2.111), a qual implica em $dy^\mu = \delta_{\mu'}^\mu dx^{\mu'}$ em $q = \psi(p)$. Requerendo a igualdade dos intervalos infinitesimais em p e $q = \psi(p)$, $ds^2|_q = ds^2|_p$, implica em $g_{\mu\nu}(q) \delta_\mu^\mu \delta_{\nu'}^{\nu'} = g_{\mu'\nu'}(p)$. Esta condição implica, por sua vez, em $\bar{g}_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}(p)$ e, portanto, em $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0$. Em geral, para o caso sem torção e conexão simétrica determinada pela métrica, $\nabla_X g_{\mu\nu} = 0$, temos

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = \nabla_X g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu X^\alpha = 2\nabla_{(\mu} X_{\nu)}. \quad (2.148)$$

Portanto, o vetor tangente K que produz uma isometria, $\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0$, deve satisfazer

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0, \quad (2.149)$$

conhecida como equação de Killing (1892) e o campo K é dito ser um campo vetorial de Killing. A segunda derivada covariante de um campo de Killing está relacionada com o tensor de curvatura. Tomemos a relação (2.91) com $T = 0$ e suas permutações cíclicas positivas

para um campo de Killing K :

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu K_\alpha) - \nabla_\nu(\nabla_\mu K_\alpha) = \nabla_\mu(\nabla_\nu K_\alpha) + \nabla_\nu(\nabla_\alpha K_\mu) = -R^\gamma{}_{\mu\nu\alpha} K_\gamma, \quad (2.150)$$

$$\nabla_\alpha(\nabla_\mu K_\nu) + \nabla_\mu(\nabla_\nu K_\alpha) = -R^\gamma{}_{\alpha\mu\nu} K_\gamma, \quad (2.151)$$

$$\nabla_\nu(\nabla_\alpha K_\mu) + \nabla_\alpha(\nabla_\mu K_\nu) = -R^\gamma{}_{\nu\alpha\mu} K_\gamma. \quad (2.152)$$

Subtraindo a última relação da soma das duas primeiras e fazendo uso da propriedade $R^\gamma{}_{[\mu\nu\alpha]} = 0$, obteremos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K_\alpha = -R^\gamma{}_{\alpha\nu\mu} K_\gamma. \quad (2.153)$$

Sendo esta uma equação de segunda ordem, um campo de Killing K_α poderá ser determinado conhecendo-o e sua derivada covariante $M_{\nu\alpha} = \nabla_\nu K_\alpha$ em um ponto arbitrário da variedade. Estas condições iniciais serão então utilizadas para integrarmos o sistema

$$u^\nu \nabla_\nu K_\alpha = u^\nu M_{\nu\alpha}, \quad u^\nu \nabla_\nu M_{\mu\alpha} = -R^\gamma{}_{\alpha\mu\nu} K_\gamma u^\nu \quad (2.154)$$

sobre uma curva $\gamma(t)$ determinada por u^ν ligando o ponto inicial a um outro ponto arbitrário. Devido à equação de Killing, $M_{\nu\alpha} = -M_{\alpha\nu}$. Assim, no máximo $n + n(n-1)/2$ vetores de Killing poderão ser determinados. Um exemplo importante é o espaço $n = 4$ com uma métrica de Minkowski ($R^\gamma{}_{\alpha\mu\nu} = 0$). A condição (2.153) implica em:

$$K_\alpha = p_\alpha + M_{\alpha\nu} x^\nu. \quad (2.155)$$

As quatro componentes p_α determinam as translações, enquanto as seis componentes $M_{\alpha\nu}$ determinam as rotações no espaço-tempo (grupo de Lorentz), gerando assim o grupo de Poincaré.

Os campos de Killing estão intimamente relacionados com teoremas de conservação. Vejamos dois exemplos, ainda que desprovidos de uma motivação física. Seja u^α um vetor tangente a uma geodésica e K_α um vetor de Killing. Então a quantidade $E = u^\alpha K_\alpha$ é uma constante sobre a geodésica:

$$\begin{aligned} u^\nu \nabla_\nu E &= u^\nu \nabla_\nu (u^\alpha K_\alpha) \\ &= K_\alpha (u^\nu \nabla_\nu u^\alpha) + u^\alpha u^\nu (\nabla_\nu K_\alpha) \\ &= u^\alpha u^\nu \nabla_{(\nu} u_{\alpha)} = 0. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Como segundo exemplo, consideremos um tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ (energia-momentum, por exemplo) satisfazendo a equação de continuidade

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.157)$$

Um vetor K de Killing produz correntes

$$J^\mu = K_\nu T^{\mu\nu}, \quad (2.158)$$

as quais são conservadas

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} J^{\mu} &= \nabla_{\mu} (K_{\nu} T^{\mu\nu}) \\ &= T^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} K_{\nu}) + K_{\nu} (\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}) \\ &= T^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0.\end{aligned}\tag{2.159}$$

Capítulo 3

As Equações de Einstein

3.1 Formulação Lagrangiana

3.1.1 Espaço-tempo plano

Consideremos o espaço-tempo como uma variedade Riemanniana (M, η) com uma métrica do tipo Lorentz-Minkowski $\eta = (1, -1, -1, -1)$. Designaremos por τ o tempo próprio (medido pelo relógio em movimento) e por u^α o quadrivetor tangente à geodésica $\gamma(s)$, parametrizada pelo seu comprimento s , de uma partícula de massa m . Então, da invariância do intervalo infinitesimal ds , em um determinado sistema de coordenadas \mathcal{O} ,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = dx_\alpha dx^\alpha, \quad (3.1)$$

em relação ao grupo de Poincaré, temos

$$u^\alpha u_\alpha = 1, \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (3.2)$$

O quadrivetor momentum correspondente será denotado por

$$p^\alpha = mc u^\alpha = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right), \quad (3.3)$$

onde \mathcal{E} é energia e \vec{p} o momentum linear. Um observador em um outro sistema de coordenadas \mathcal{O}' , com velocidade \vec{v} em relação a \mathcal{O} , mede a energia da partícula como

$$p^{0'} = \Lambda^{0'}{}_\alpha p^\alpha = \gamma(\mathcal{E}/c - \vec{p} \cdot \vec{v}/c) = p^\alpha v_\alpha, \quad (3.4)$$

onde

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = v/c, \quad v^\alpha = (\gamma, \gamma \vec{v}/c), \quad (3.5)$$

e $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ é um elemento do grupo de Poincaré. Portanto, a componente temporal de qualquer tensor no sistema \mathcal{O}' pode ser calculada contraindo este tensor com o vetor quadri-velocidade v^α de \mathcal{O}' . Caso a partícula tenha uma carga q , ela experimentará uma força de Lorentz, na

presença de um campo eletromagnético, dada por

$$\frac{d}{ds}p^\mu = mc \frac{d}{ds}u^\mu = mc u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (3.6)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = -(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = -F_{\nu\mu}, \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (3.7)$$

e

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \nabla \phi, \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.8)$$

Note que o campo \vec{H} é um pseudo-vetor (suas componentes não trocam de sinal com uma inversão do sistema de coordenadas). As equações de Maxwell são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}, \quad (3.9)$$

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{H}, \quad (3.10)$$

onde

$$J^\alpha = (c\rho, \vec{J}), \quad (3.11)$$

e

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (3.12)$$

é o dual do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad ({}^*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Note que ${}^{**}F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$. Outras duas observações importantes: i) a equação de Maxwell (3.10) também pode ser escrita como

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow F_{[\mu\nu,\alpha]} = 0 \Rightarrow F_{\mu\nu} \propto A_{[\mu,\nu]}, \quad (3.14)$$

onde a última igualdade é devido ao Lema de Poincaré (formas diferenciais), cuja validade é garantida localmente; ii) a equação de Maxwell (3.9) já contém a conservação da carga e da corrente devido à anti-simetria do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = -\frac{4\pi}{c} \partial_\nu \partial_\mu A^\mu J^\nu \Rightarrow \partial_\nu J^\nu = 0. \quad (3.15)$$

Vale observar que há uma liberdade na escolha (*gauge*) do vetor potencial A^μ em (3.14) da forma

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Xi. \quad (3.16)$$

Isto nos possibilita resolver a equação

$$\partial^\mu \partial_\mu \Xi = -\partial_\mu A^\mu \quad (3.17)$$

para podermos fazer a escolha $\partial_\mu A^\mu = 0$ (gauge de Lorentz). As equações de Maxwell (3.9) no gauge de Lorentz podem ser reescritas como

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (3.18)$$

As equações de Maxwell também podem ser obtidas pelo formalismo lagrangiano. Apenas duas quantidades invariantes ao grupo de Poincaré podem ser construídas com o tensor eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2), \quad (3.19)$$

$$F_{\mu\nu} {}^* F^{\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{H}. \quad (3.20)$$

Note que apenas a primeira identidade é um escalar, a outra é um pseudo-escalar. Assim, a densidade lagrangiana de campo vetorial de massa m pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\alpha J^\alpha + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha. \quad (3.21)$$

Esta densidade lagrangiana é uma função do potencial A_α e de suas derivadas primeiras $A_{\alpha,\nu}$. A ação tem a forma usual:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V \mathcal{L} dV. \quad (3.22)$$

Vamos supor que esta ação entre dois pontos fixos no espaço-tempo possa ser deformada de forma contínua em algum parâmetro λ :

$$\delta S = \left. \frac{dS}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (3.23)$$

As equações de movimento são determinadas pela condição $\delta S = 0$ ou, equivalentemente, $\delta \mathcal{L} = 0$. Assim, tendo em vista $\mathcal{L} = f(A_\alpha, A_{\alpha,\nu})$,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} \delta A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} \delta A_{\alpha,\nu} \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} \right) \right] \delta A_\alpha + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} \delta A_\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como sempre, o termo de superfície não contribui e, portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} \right) = 0 \quad (3.25)$$

representa o as equações de Maxwell em (3.9). No entanto, estas equações não contém as equações de movimento dadas pela (3.6). Mas ela contém leis de conservação. Sendo $\mathcal{L} = f(A_\alpha, A_{\alpha,\nu})$, teremos

$$\begin{aligned}\partial_\nu \mathcal{L} &= A_{\alpha,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} + A_{\alpha,\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} \\ &= A_{\alpha,\nu} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} \right) + A_{\alpha,\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} \\ &= \partial_\mu \left(A_{\alpha,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} \right),\end{aligned}\tag{3.26}$$

de onde podemos concluir

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} A_{\alpha,\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}.\tag{3.27}$$

O tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum do campo vetorial A^μ . Para o caso do campo eletromagnético com a densidade lagrangiana (3.21), ele é

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}.\tag{3.28}$$

A componente temporal T^{00} é a densidade de energia do campo eletromagnético enquanto que as componentes tempo-espaciais T^{0k}/c são as componentes da densidade de momentum (cT^{0k} são as componentes da densidade do fluxo de energia, vetor de Poynting). As demais componentes espaciais T^{kl} são as tensões (força por área) devido ao fluxo da densidade de momentum. As equações (3.28) podem ser integradas e fornecem leis de conservação para a energia e momentum.

3.1.2 Espaço-tempo curvo

O modelo matemático para o espaço-tempo curvo será uma variedade diferenciável \mathcal{M} quadridimensional com uma métrica riemanniana $g_{\mu\nu}$. A passagem do espaço plano para o espaço curva será feita através do princípio da co-variância geral: i) a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ é substituída pela métrica curva $g_{\mu\nu}$; ii) as derivadas ∂_μ (derivadas covariantes associadas com $\eta_{\mu\nu}$) são substituídas pelas derivadas covariantes ∇_μ (associadas com a métrica $g_{\mu\nu}$). Isto corresponde ao acoplamento mínimo da eletrodinâmica quântica e, neste caso, diz-se que a matéria é acoplada à gravitação; iii) todas as leis físicas do espaço-tempo deverão ser escritas em termos de uma quantidade fundamental, a saber, o campo tensorial $g_{\mu\nu}$ (métrica).

Como o elemento de volume do espaço-curvo depende também da métrica, é útil adotar o ponto de vista de um elemento de volume $d\Omega$ fixo (associado à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$) sendo transformado em um outro $d\Omega'$ associado à métrica $g_{\mu\nu}$ através de uma transformação inversível de coordenadas $(\mu) \rightarrow (\mu')$:

$$g_{\mu\nu} = A^{\alpha'}{}_\mu A^{\beta'}{}_\nu \eta_{\alpha'\beta'},\tag{3.29}$$

onde $(A^{\alpha'}_{\mu})$ é a matriz mudança de base. O teorema da “lei da inércia” de Sylvester garante que a métrica $g_{\mu\nu}$ também, como $\eta_{\mu\nu}$, terá um autovalor positivo e outros três negativos. Vamos denotar por J o determinante (jacobiano) da matriz $(A^{\alpha'}_{\mu})$. Tomando o determinante nos dois membros da equação anterior, lembrando que o determinante da matriz $(\eta_{\mu\nu})$ é ± 1 ou 0, teremos

$$|g| = J^2, \quad (3.30)$$

onde g é o determinante da matriz $(g_{\mu\nu})$. O elemento de volume orientado numa variedade é representado em termos de formas diferenciais

$$\begin{aligned} d\Omega &= dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \\ &= A^{\alpha_1}_{\nu'_1} A^{\alpha_2}_{\nu'_2} \cdots A^{\alpha_n}_{\nu'_n} dx^{\nu'_1} \wedge dx^{\nu'_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu'_n} \\ &= J^{-1} d\Omega', \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou

$$d\Omega' = \sqrt{|g|} d\Omega. \quad (3.32)$$

Assim, todas as densidades tensoriais correspondentes à métrica $(\eta_{\mu\nu})$ devem ser multiplicadas pelo jacobiano $\sqrt{|g|}$ para continuarem independentes do elemento de volume quando houver variações.

Aplicando as regras da substituição mínima para o campo eletromagnético, teremos uma densidade lagrangiana da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EM} &= \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_{\alpha} J^{\alpha} + \frac{1}{2} m^2 A_{\alpha} A^{\alpha} \right) \sqrt{|g|} \\ &= \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4c} g_{\mu\alpha} g_{\mu\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} g_{\mu\alpha} A^{\alpha} J^{\mu} + \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\alpha} A^{\alpha} A^{\mu} \right) \sqrt{|g|}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = -2\nabla_{[\mu} A_{\nu]}. \quad (3.34)$$

Note que agora o campo gravitacional também aparece na lagrangiana da matéria \mathcal{L}_{EM} . O mesmo procedimento aplicado ao tensor de energia-momentum, Eq. (3.28), nos permite reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} T_{EM}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM} \\ &= -\frac{1}{4\pi c} g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM} \end{aligned} \quad (3.35)$$

As equações de Maxwell são reescritas na forma

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^{\nu}, \quad \nabla_{\mu} {}^* F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.36)$$

e as equações de movimento na forma

$$u^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu} = \frac{q}{mc^2} F^{\mu\nu} u_{\nu}. \quad (3.37)$$

Algumas observações são pertinentes: i) apesar de ainda podermos resolver a equação

$$\nabla_\nu A^\nu = -\nabla_\nu \nabla^\nu \Xi, \quad (3.38)$$

sendo Ξ uma função arbitrária, para podermos escrever a primeira equação de Maxwell em (3.36) no gauge de Coulomb, $\nabla_\nu A^\nu = 0$, ela contém um termo dependente do tensor de Ricci,

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu = R^{\mu\alpha} A_\alpha - \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (3.39)$$

em contraste com a expressão equivalente (3.18) no espaço-tempo plano. Isto indica prudência no uso da substituição mínima; ii) como não há mais observadores inerciais em geral, o observador não poderá utilizar-se da facilidade $p_\alpha v^\alpha$ para medir a energia de uma partícula de momentum p^α , embora tal medida possa ser realizada localmente (numa região restrita). Isto acarreta outro problema. Numa região restrita pode não haver conservação da energia, uma vez que o campo gravitacional pode realizar trabalho. A conservação da energia poderá apenas ser definida numa região isolada; iii) nada foi dito aqui sobre como obter o tensor de energia-momentum (3.35) da densidade lagrangiana (3.33).

3.1.3 Formulação lagrangiana

Vamos considerar aqui uma teoria envolvendo um conjunto de campos, por exemplo, o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, o campo eletromagnético A_μ , etc. Vamos denotar todos os campos por ψ . Entã ψ representa uma coleção de campos em uma variedade \mathcal{M} . Seja S um funcional em \mathcal{M} , isto é:

$$S : \mathcal{F} \in M \rightarrow R / S[\psi] \in R. \quad (3.40)$$

Seja ψ_λ uma família de possíveis configurações dos campos. Assim, haverá um valor para o parâmetro real λ , por exemplo $\lambda = 0$, correspondente à configuração que representa as equações de campo de um determinado sistema físico (ψ_0 satisfaz certas condições de contorno). Vamos supor que existam campos χ , duais a ψ , satisfazendo

$$\delta S = \int_{U \subset M} \chi \delta \psi, \quad (3.41)$$

onde a integração é feita numa região U de \mathcal{M} e o integrando é um escalar (há uma contração em todos os índices omitidos). Estamos usando a notação

$$\delta \psi \equiv \left. \frac{d\psi}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (3.42)$$

Neste caso, dizemos que o funcional S é diferenciável e escrevemos

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \psi} \right|_{\psi_0} = \chi, \quad (3.43)$$

onde χ é a derivada funcional. Consideremos agora um funcional diferenciável da forma

$$S[\psi] = \int_U \mathcal{L}[\psi, \nabla\psi, \dots], \quad (3.44)$$

onde \mathcal{L} é um funcional local de ψ e suas derivadas. Quando a configuração dos campos ψ for aquela que satisfaça as equações de campo e dê $\delta S = 0$,

$$\delta S = \int_U \chi \delta\psi = \int_U \delta\mathcal{L} = 0, \quad (3.45)$$

então, a quantidade \mathcal{L} é denominada de densidade lagrangiana e o funcional S de ação. Certas condições de contorno deverão ser obedecidas pelos campos no contorno \dot{U} da região U . O tensor (simétrico) de energia-momentum T é definido como

$$T = \frac{\beta}{\sqrt{|g|}} \chi = \frac{\beta}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta\psi}, \quad (3.46)$$

onde β é uma constante arbitrária. Este tensor é nulo nas regiões ausentes de matéria. Consideremos como exemplo, a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético no vácuo

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4c} g^{\mu\alpha} g^{\mu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \sqrt{|g|}. \quad (3.47)$$

A ação correspondente é

$$S_{EM} = \int_U \mathcal{L}_{EM}. \quad (3.48)$$

Assim, o tensor de energia-momentum (3.46) é dado por

$$T_{\rho\sigma} = \frac{\beta}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_G}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{16\pi c} g_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi c} g^{\mu\nu} F_{\rho\mu} F^{\sigma\nu}, \quad (3.49)$$

com $\beta = 2$ e

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\rho\sigma}} \delta g^{\rho\sigma} &= -\frac{1}{16\pi c} \left[\delta(\sqrt{|g|}) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta(g^{\mu\alpha} g^{\mu\beta}) F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \sqrt{|g|} \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi c} \left(-\frac{1}{2} g_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} F_{\rho\mu} F^{\sigma\nu} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De volta ao espaço-tempo quadridimensional, isto é, à relatividade geral, é possível escrever uma lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \beta_G \mathcal{L}_G + \beta_M \mathcal{L}_M \quad (3.51)$$

para o acoplamento da matéria ao espaço-tempo. Em geral, a lagrangiana \mathcal{L}_M da matéria

também conterá o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$. Assim,

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L}_G = \delta\mathcal{L}_M = 0. \quad (3.52)$$

Como a ação S_M correspondente à matéria deve ser invariante por difeomorfismos, ou seja, se $\phi_\lambda : M \rightarrow M$ é uma família de difeomorfismos gerada pelo vetor tangente v , então $S_M[g_{\mu\nu}, \psi]$ é equivalente a $S_M[\phi_\lambda^* g_{\mu\nu}, \phi_\lambda^* \psi]$. Em geral,

$$\delta S_M = \int \frac{\delta S_M}{\delta \psi} \delta \psi + \int \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.53)$$

Vamos supor que o primeiro termo do lado direito seja nulo, isto é, o campo ψ satisfaz as equações de campo para a matéria. Então,

$$\int \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \int \frac{\delta S_M}{\delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu}} \delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.54)$$

ou, requerendo invariância de $T^{\mu\nu}$ e devido à invariância do determinante da métrica,

$$\int \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \int \sqrt{|g|} \phi_\lambda^* T^{\mu\nu} \delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu} = \int \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.55)$$

onde nem todas as dez componentes $\delta g_{\mu\nu}$ são independentes (difeomorfismo é equivalente a uma transformação de coordenadas). Assim, podemos escrever

$$\int \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu} - \delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.56)$$

Dos resultados (2.121) e (2.145), temos

$$\delta g_{\mu\nu} - \delta \phi_\lambda^* g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} v_{\nu)}. \quad (3.57)$$

Substituindo este resultado na equação anterior, obtemos

$$\int_U \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} v_{\nu)} = 2 \int_U \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \nabla_\mu v_\nu = 2 \int_U \sqrt{|g|} \nabla_\mu (T^{\mu\nu} v_\nu) + 2 \int_U \sqrt{|g|} (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) v_\nu = 0. \quad (3.58)$$

O termo de superfície não contribui (explique), portanto,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.59)$$

Desta forma, o tensor de energia-momentum é localmente conservado como uma consequência da invariância por difeomorfismos e das equações de campo para a matéria. No entanto, nem sempre é possível integrar as equações (3.59) para obter leis de conservação para a energia (escalar) e momentum (vetor), pois a integração implicaria na existência de vetores de Killing, os quais podem não existir em um espaço-tempo curvo.

Vimos em (2.102) que o tensor de Einstein também é conservado, independentemente de quaisquer equações de campo e da forma das variações, sendo, portanto, um candidato

natural para o tensor de energia-momentum do campo gravitacional. De fato, a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{|g|} R = \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

onde R é o traço do tensor de Ricci, Eq. (2.99), estabelece as equações de Einstein quando a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ é utilizada como o campo gravitacional e suas variações consideradas independentes. A ação correspondente,

$$S_G = \int_U \mathcal{L}_G, \quad (3.61)$$

é conhecida como ação de Hilbert (1915). Ela estabelece o tensor de Einstein como o tensor de energia-momentum correspondente:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\beta_G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_G}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.62)$$

Então, as equações de campo para o campo gravitacional devem ser fornecidas pela condição

$$\delta \mathcal{L}_G = R \delta(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|} R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.63)$$

O último termo contribui apenas na superfície e pode ser ignorado (paciência!). A variação do determinante g da matriz $(g_{\mu\nu})$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{|g|}) &= \frac{1}{2} |g|^{-\frac{1}{2}} \delta |g| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

A primeira igualdade é decorrente da propriedade (2.84) para uma matriz A arbitrária:

$$\delta \det(A) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} \delta A). \quad (3.65)$$

A segunda igualdade é devido a

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (3.66)$$

a qual implica em

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}. \quad (3.67)$$

Portanto, a ação de Hilbert fornece

$$\delta S_G = \int_U \delta \mathcal{L}_G = \int_U \sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \int_{\dot{U}} \delta K = 0, \quad (3.68)$$

onde K é uma quantidade definida na superfície \dot{U} contendo a região U . Este termo de

superfície pode ser reabsorvido na definição da ação. Assim, as equações de Einstein para o campo gravitacional na ausência de matéria,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (3.69)$$

são obtidas da condição (confira a equação (3.45))

$$\delta S_G = \int_U \delta \mathcal{L}_G = \int_U \chi_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.70)$$

onde

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{|g|} G_{\mu\nu}. \quad (3.71)$$

Substituindo este resultado na (3.62) obteremos $\beta_G G_{\mu\nu}$ como o tensor de energia-momentum para o campo gravitacional. Note que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ satisfaz as identidades de Bianchi-Ricci, $\nabla^\mu G_{\mu\nu}$, Eq. (2.98), independentemente das equações de campo. Tais considerações nos leva a supor que as equações de campo para o campo gravitacional na presença de matéria são dadas por

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.72)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia momentum da matéria e κ uma constante arbitrária a ser determinada pelo limite newtoniano.

3.2 Linearização

Uma condição necessária para a obtenção do limite newtoniano contido nas equações de Einstein (3.72) é a condição de um campo gravitacional fraco:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad (3.73)$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ representa uma perturbação pequena na métrica $\eta_{\mu\nu}$ do espaço-tempo plano do tipo Minkowski (+, -, -, -). O processo de linearização das equações de Einstein consiste em substituir a métrica original $g_{\mu\nu}$ pela métrica perturbada (3.73) e reescrever o tensor de Ricci (2.99) até primeira ordem na perturbação $\gamma_{\mu\nu}$. Vale salientar que: I) a métrica não-perturbada em (3.73) nem sempre precisa ser a métrica $\eta_{\mu\nu}$ do espaço-tempo plano. Ela pode ser qualquer métrica para a qual as soluções das equações de Einstein são conhecidas; II) em geral, não há garantias de que as soluções reais, obtidas das equações não-linearizadas, quando linearizadas coincidam com as soluções obtidas das equações linearizadas. Podemos encontrar, portanto, soluções espúrias das equações linearizadas. No entanto, há maneiras de checar a estabilidade das soluções das equações linearizadas.

A perturbação $\gamma_{\mu\nu}$ também pode ser interpretada da seguinte maneira: suponha que o campo gravitacional $g_{\mu\nu}(\lambda)$ dependa de um parâmetro real λ , associado a uma família de difeomorfismos (transformações de coordenadas) ϕ_λ no espaço-tempo a qual induz uma

transformação $\phi^* g_{\mu\nu}$ no campo gravitacional. Assim, a menos de uma constante,

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv \left. \frac{d}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right|_{\lambda=0} = \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.74)$$

Portanto, lembrando do princípio da invariabilidade das leis físicas por difeomorfismos, $\gamma_{\mu\nu}$ e $\gamma'_{\mu\nu} = \phi^* \gamma_{\mu\nu}$ devem representar a mesma perturbação. No entanto, vimos em (2.121) que há uma liberdade na escolha de $\gamma'_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \pm \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \pm (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu), \quad (3.75)$$

onde ξ_μ é um vetor arbitrário (relacionado com os difeomorfismos ϕ_λ).

Os símbolos de Christoffel (2.74) linearizados assumem a forma

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\gamma_{\mu\nu,\alpha} + \gamma_{\alpha\nu,\mu} + \gamma_{\mu\alpha,\nu}) = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\mu\nu}. \quad (3.76)$$

Note que estamos utilizando a métrica não perturbada $\eta_{\alpha\beta}$ para modificar as componentes de um tensor. Isto pode ser justificado tendo em vista que todas as grandezas físicas devam ser escritas como relações tensoriais envolvendo a métrica perturbada $g_{\mu\nu}$ (tensor fundamental). A única exceção será a métrica inversa não perturbada:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \neq \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (3.77)$$

Substituindo os símbolos de Christoffel linearizados (3.76) no tensor de curvatura (2.89) e retendo apenas os termos lineares em $\gamma_{\mu\nu}$, teremos

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} (\gamma_{\mu\sigma,\beta\nu} - \gamma_{\nu\sigma,\beta\mu} + \gamma_{\nu\beta,\sigma\mu} - \gamma_{\mu\beta,\sigma\nu}). \quad (3.78)$$

Contraíndo os índices α e μ teremos o tensor de Ricci (2.99) linearizado (substituindo β por μ no final):

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2} [\partial^\alpha (\partial_\mu \gamma_{\nu\alpha} + \partial_\nu \gamma_{\mu\alpha}) - (\partial_\mu \partial_\nu \gamma + \partial^\alpha \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu})], \quad \gamma = \gamma^\alpha_{\alpha}, \quad (3.79)$$

cujo traço é

$$R = R^\mu_{\mu} = \partial^\mu \partial^\nu \gamma_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \gamma. \quad (3.80)$$

Portanto, o tensor de Einstein linearizado pode ser escrito como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R = \partial^\alpha \partial_{(\mu} \bar{\gamma}_{\nu)\alpha} - \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta}), \quad (3.81)$$

onde

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \gamma. \quad (3.82)$$

Este novo tensor $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ pode ser invertido facilmente. Lembrando que $\gamma^\alpha_{\alpha} = 4$, então o traço

de $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ é

$$\bar{\gamma}_\alpha^\alpha = \bar{\gamma} = \gamma. \quad (3.83)$$

Portanto,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{\gamma}. \quad (3.84)$$

Vale notar que este tensor novo, $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$, aparece também naturalmente na linearização da densidade de campo (veja (3.32)):

$$\sqrt{|g|}g_{\mu\nu} = (1 - \frac{1}{2}\gamma)(\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu} + \bar{\gamma}_{\mu\nu}, \quad (3.85)$$

onde g é o determinante do campo $g_{\mu\nu}$ (veja (2.83)),

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \sum_{p \in S_n} \delta_p g_{1p_1} \cdots g_{np_n} = \det(\eta_{\mu\nu}) + \gamma. \quad (3.86)$$

O tensor de Einstein (3.81) pode ser escrito numa forma mais simples fazendo uso do *gauge* (3.75):

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \bar{\gamma}'_{\alpha\nu} &= \partial^\alpha \gamma'_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu \gamma' \\ &= \partial^\alpha (\gamma_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\alpha) - \frac{1}{2} \partial_\nu (\gamma - 2\partial^\alpha \xi_\alpha) \\ &= \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\nu} - \partial^\alpha \partial_\alpha \xi_\nu. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Podemos ver desta equação que a escolha

$$\partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\nu} = \partial^\alpha (\sqrt{|g|}g_{\alpha\nu}) = 0, \quad (3.88)$$

correspondendo ao *gauge* de Lorentz do eletromagnetismo, sempre pode ser feita, pois ξ é um vetor arbitrário, o qual pode ser escolhido para satisfazer

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \xi_\nu = \pm \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\nu}. \quad (3.89)$$

Fazendo a escolha (3.88), as equações de Einstein linearizadas (3.81) simplificam em

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.90)$$

3.2.1 Limite newtoniano

Além da condição de campo fraco (ou linearização), Eq. (3.73), há mais duas condições para a obtenção do limite newtoniano: i) velocidades baixas $v \ll c$ implica em $T^{0k} \approx 0$, isto é, o fluxo de energia (vetor de Poynting) é desprezível, e em $T^{kl} \approx 0$, isto é, o fluxo de momentum (pressão) é desprezível; ii) todas as quantidades são estáticas (ou variam muito pouco no tempo). Isto significa que podemos desprezar todas as derivadas temporais da métrica e do tensor de energia-momentum. Assim, em primeira aproximação, correspondendo a uma

distribuição de matéria-energia rarefeita (poeira), apenas a energia de repouso contribuirá para o campo gravitacional: $T_{00} = \rho c^2$. As demais componentes de $T_{\mu\nu}$ são todas nulas. Neste caso, as equações de Einstein no gauge de Lorentz podem ser escritas como:

$$-\frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{\gamma}_{00} = \kappa T_{00} = \kappa c^2\rho, \quad -\frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{\gamma}_{00} = 0, \quad \mu\nu \neq 0. \quad (3.91)$$

Considerando que os campos são estáticos e a métrica de Minkowski com autovalores $(1, -1, -1, -1)$, então estas equações podem ser reescritas como:

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{00} = 2\kappa c^2\rho, \quad \nabla^2\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0, \quad \mu\nu \neq 0. \quad (3.92)$$

A última equação diferencial admite apenas a solução trivial $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$. A primeira equação é uma equação de Poisson para a densidade de massa ρ . Esta equação é análoga à equação de Poisson para a gravitação newtoniana:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad \phi = -G \int \frac{\rho dV}{|r - r'|}, \quad (3.93)$$

onde $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3/kg/s^2$ é a constante universal da gravitação. A fim de determinar univocamente $\bar{\gamma}_{00}$ e κ , devemos fazer uso das equações de movimento dadas pela geodésica:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}, \quad ds = cd\tau = c\sqrt{1 - (v/c)^2} dt. \quad (3.94)$$

Para velocidades baixas, $u^\nu \approx (1, 0, 0, 0)$ e $d\tau \approx dt$. Desta forma, podemos reescrever a equação da geodésica como

$$\ddot{x}^k = -c^2\Gamma_{k00} = \frac{1}{2}c^2\partial^k\gamma_{00} = \partial^k\phi, \quad (3.95)$$

onde a última igualdade é a aceleração da lei de Newton. Lembre-se que $\partial^k\phi = -\partial_k\phi$, $k = 1, 2, 3$. Então,

$$\gamma_{00} = \frac{2}{c^2}\phi = 2\bar{\gamma}_{00}. \quad (3.96)$$

Substituindo este resultado na (3.92) e comparando o resultado com a (3.93), teremos

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,07 \times 10^{-43} \frac{s^2}{kg m}. \quad (3.97)$$

Este sinal positivo no valor da constante κ indica que fizemos uma boa escolha para o sinal do tensor de curvatura quando trabalhamos com a métrica do tipo $(1, -1, -1, -1)$. Considerando a terra como uma esfera de 6374 km de raio e uma massa de 6×10^{24} kg, a perturbação γ_{00} no espaço-tempo plano é da ordem de 10^{-9} . Vale observar também que $\kappa T_{00} \approx 2 \times 10^{-22} m^{-2}$.

3.2.2 Ondas gravitacionais

Supondo o gauge de Lorentz,

$$\partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\nu} = 0, \quad (3.98)$$

a equação de Einstein linearizado no vácuo torna-se em

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.99)$$

a qual é uma equação de uma onda propagando-se com a velocidade da luz c , sem sofrer qualquer auto-interação, cuja função pode ser escrita em termos de ondas planas

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.100)$$

onde k^ν é o vetor de propagação e $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$ o tensor de polarização. A equação de Einstein obriga a norma do vetor de onda k^ν seja nula:

$$k^\nu k_\nu = 0. \quad (3.101)$$

O gauge de Lorentz possibilita escrevermos quatro relações as componentes $\epsilon_{\mu\nu}$,

$$k^\nu \epsilon_{\mu\nu} = 0, \quad (3.102)$$

reduzindo assim para seis o número de componentes independentes do tensor de polarização. No entanto, outras quatro componentes podem ser eliminadas por transformações de coordenadas (difeomorfismos)

$$\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \gamma_{\mu\nu} \pm (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu), \quad (3.103)$$

com

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \xi_\nu = 0, \quad (3.104)$$

pois as equações (3.98) e (3.99) permanecem invariantes. Uma possível escolha é o gauge de radiação:

$$\epsilon_{0\nu} = 0, \quad \epsilon = \epsilon^\nu{}_\nu = 0. \quad (3.105)$$

Neste gauge $\gamma = 0$ o que implica em $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$. Portanto, o campo $\gamma_{\mu\nu}$ possui apenas dois graus de liberdade, correspondendo aos dois únicos estados independentes de polarização.

Para determinarmos a eliticidade do vetor de onda k^ν , vamos supor que uma onda plana movendo-se na direção do eixo z : $k^\nu = (k, 0, 0, k)$. O tensor de polarização neste caso, levando em conta as relações (3.102) e (3.105), será a matriz

$$(\epsilon_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ 0 & \epsilon_{12} & -\epsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Vamos efetuar agora uma rotação em torno do eixo z por um ângulo θ . A matriz de Lorentz correspondente é

$$(\Lambda_{\mu}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Assim, nossa rotação pode ser efetuada matricialmente como

$$(\Lambda_{\mu}{}^{\sigma})(\Lambda_{\mu}{}^{\alpha})(\epsilon_{\alpha\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & 0 \\ 0 & \epsilon'_{12} & -\epsilon'_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \epsilon_{11} \cos(2\theta) + \epsilon_{12} \sin(2\theta), \\ \epsilon'_{12} &= -\epsilon_{11} \sin(2\theta) + \epsilon_{12} \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Isto é uma rotação com um ângulo de 2θ . Em geral, a helicidade h de uma onda plana arbitrária ψ é definida como a fase da onda plana resultante,

$$\psi' = e^{ih\theta} \psi, \quad (3.110)$$

de uma rotação em torno da direção de propagação por um ângulo θ . Portanto, a helicidade do campo $\gamma_{\mu\nu}$ é ± 2 .

Capítulo 4

Cosmologia

4.1 Espaços com simetria maximal

4.1.1 Condições sobre tensores.

Tensores pagam um preço para manterem sua forma invariante perante uma transformação linear de coordenadas. Dada uma transformação $x \rightarrow \bar{x}$, um tensor mantém sua forma invariante se satisfizer a condição

$$\bar{T}(y) = T(y), \quad \forall y. \quad (4.1)$$

Queremos que tensores mantenham sua forma invariante perante transformações lineares de coordenadas, pois caso contrário, eles seriam de pouca utilidade.

Como Lie mostrou, podemos conhecer praticamente tudo sobre uma transformação linear de coordenadas analisando seu comportamento em torno da identidade,

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.2)$$

Vejamos o comportamento de tensores perante à transformação infinitesimal (4.2). Consideremos inicialmente um tensor de posto zero, ou seja, um escalar,

$$S(x) = \bar{S}(\bar{x}) = S(\bar{x}) = S(x) + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \xi^\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.3)$$

Como as quantidades $\xi^\mu(x)$ são arbitrárias, então (4.3) implica que que escalares manterão sua forma invariante se não dependerem das coordenadas,

$$\bar{S}(\bar{x}) = S(x) \quad \iff \quad \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.4)$$

Para um tensor de posto um, um vetor, manter sua forma invariante,

$$A_\mu(x) = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu(\bar{x}) = A_\mu(x) + \varepsilon \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu + \xi^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.5)$$

ele deve satisfazer

$$\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu + \xi^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \xi^\nu{}_{;\mu} A_\nu + A_{\mu;\nu} \xi^\nu = \xi_{\nu;\mu} A^\nu + A_{\mu;\nu} \xi^\nu = \xi_{\nu;\alpha} \delta_\mu^\alpha A^\nu + A_{\mu;\nu} \xi^\nu = 0, \quad (4.6)$$

onde usamos a definição da derivada covariante $\xi_{\nu;\mu} = \nabla_\mu \xi_\nu$ dada na Tabela 2.1 e o fato da métrica ser compatível com a conexão ($\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$). Aplicando o mesmo procedimento para um tensor de posto dois, que mantém sua forma invariante,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} T_{\alpha\beta}(\bar{x}), \quad (4.7)$$

somente se a condição

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} T_{\alpha\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} T_{\mu\alpha} + \xi^\alpha \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \xi_{\alpha;\mu} T^\alpha{}_\nu + \xi_{\alpha;\nu} T_\mu{}^\alpha + T_{\mu\nu;\alpha} \xi^\alpha = \\ \xi_{\alpha;\beta} (\delta_\mu^\beta T^\alpha{}_\nu + \delta_\nu^\beta T_\mu{}^\alpha) + T_{\mu\nu;\alpha} \xi^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

for satisfeita. Por analogia, a condição em um tensor de posto quatro, como o tensor de Riemann, deve ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} T_{\sigma\nu\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} T_{\mu\sigma\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\alpha} T_{\mu\nu\sigma\beta} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} T_{\mu\nu\alpha\sigma} + \xi^\sigma \frac{\partial T_{\mu\nu\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} = \\ \xi_{\sigma;\lambda} (\delta_\mu^\lambda T^\sigma{}_{\nu\alpha\beta} + \delta_\nu^\lambda T_\mu{}^\sigma{}_{\alpha\beta} + \delta_\alpha^\lambda T_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\beta + \delta_\beta^\lambda T_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma) + T_{\mu\nu\alpha\beta;\sigma} \xi^\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Quando o tensor de posto dois na condição (4.8) é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, a condição de manter a forma invariante é denominada de isometria. Neste caso a condição (4.8) pode ser re-escrita na forma

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (4.10)$$

pois a métrica ser compatível com a conexão ($g_{\mu\nu;\alpha} = 0$). Uma quantidade ξ^μ satisfazendo a condição (4.10) é denominado de vetor de Killing (outro que também descobriu os grupos de Lie). Os vetores de Killing são geradores de grupos de Lie. Cada vetor de Killing $\xi_\mu(x)$, em qualquer posição x , é determinado conhecendo apenas $\xi_\mu(\tilde{x})$ e $\xi_{\mu;\nu}(\tilde{x}) = \nabla_\nu \xi_\mu(\tilde{x})$ num ponto escolhido \tilde{x} . Devido à propriedade de anti-simetria em (4.10), $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$, pode existir no máximo $N(N-1)/2$ vetores de Killing num espaço de dimensão N . Um espaço que admite o número máximo de vetores de Killing é denominado de espaço maximal. Num espaço maximal, o valor de um vetor de Killing num ponto particular \tilde{x} pode ser escolhido livremente, por exemplo $\xi_\mu(\tilde{x}) = 0$. A mesma escolha não pode ser feita para a derivada covariante $\xi_{\mu;\nu}(\tilde{x})$ de um vetor de Killing.

Condições adicionais importantes podem ser obtidas para os tensores de posto um e dois satisfazendo as condições (4.6) e (4.8), respectivamente, para manterem suas formas invariantes. Por comodidade, vamos escolher $\xi_\mu(\tilde{x}) = 0$ num ponto arbitrário \tilde{x} . Assim, a condição (4.10) fornece

$$\left. \nabla_\mu \xi_\nu \right|_{\tilde{x}} = g_{\nu\alpha} \left. \nabla_\mu \xi^\alpha \right|_{\tilde{x}} = g_{\nu\alpha} \left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right|_{\tilde{x}} = -g_{\mu\alpha} \left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \right|_{\tilde{x}} \quad (4.11)$$

em \tilde{x} , onde usamos o fato da métrica ser compatível com a conexão, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Desta forma, a condição (4.6) para um tensor de posto um manter sua forma pode ser reescrita como

$$\left[\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu + \xi^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right]_{\tilde{x}} = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu \Big|_{\tilde{x}} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g^{\alpha\nu} A_\nu \Big|_{\tilde{x}} = \xi_{\alpha;\mu} A^\alpha \Big|_{\tilde{x}} = \xi_{\alpha;\beta} \delta_\mu^\beta A^\alpha \Big|_{\tilde{x}} = 0. \quad (4.12)$$

Devido à anti-simetria de $\xi_{\alpha;\beta}$, então seu coeficiente em (4.12) deve ser simétrico,

$$\delta_\mu^\beta A^\alpha \Big|_{\tilde{x}} = \delta_\mu^\alpha A^\beta \Big|_{\tilde{x}}. \quad (4.13)$$

A contração dos índices μ e β nos dá

$$(N - 1) A^\alpha \Big|_{\tilde{x}} = 0. \quad (4.14)$$

Como o ponto \tilde{x} é arbitrário, a condição (4.14) é válida em qualquer ponto. Assim, fica proibido a presença de tensores de posto um (vetores) num espaço maximal de dimensão maior ou igual a dois. Vetores podem existir apenas em espaços maximais unidimensionais.

Repetindo este procedimento para um tensor de posto dois, a condição (4.8) torna-se

$$\xi_{\alpha;\beta} (\delta_\mu^\beta T^\alpha{}_\nu + \delta_\nu^\beta T_\mu{}^\alpha) \Big|_{\tilde{x}} = 0, \quad (4.15)$$

a qual implica em

$$\delta_\mu^\beta T^\alpha{}_\nu + \delta_\nu^\beta T_\mu{}^\alpha = \delta_\mu^\alpha T^\beta{}_\nu + \delta_\nu^\alpha T_\mu{}^\beta \quad (4.16)$$

devido à anti-simetria de $\xi_{\alpha;\beta}$. Contraíndo os índices μ e β e abaixando o índice α , obtemos

$$(N - 1) T_{\alpha\nu} + T_{\nu\alpha} = g_{\alpha\nu} T_\mu{}^\mu. \quad (4.17)$$

O lado direito desta relação pode ser eliminado subtraindo dela ela mesma com os índices α e ν trocados,

$$(N - 2) (T_{\alpha\nu} - T_{\nu\alpha}) \Big|_{\tilde{x}} = 0. \quad (4.18)$$

Assim, apenas tensores de posto dois simétricos podem existir em espaços maximais de dimensão um e maior ou igual a três. Admitindo a simetria $T_{\alpha\nu} = T_{\nu\alpha}$, a condição (4.17) fornece outra restrição importante:

$$T_{\mu\nu} = \frac{T_\alpha{}^\alpha}{N} g_{\mu\nu} = f g_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (4.19)$$

Ou seja, um tensor de posto dois num espaço maximal de dimensão diferente de dois deve ser proporcional ao tensor métrico. Podemos usar a condição (4.8) para determinarmos que a função $f(x)$ em (4.19) deve ser uma constante. De fato, substituindo (4.19) em (4.8), temos

$$f(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + g_{\mu\nu} \xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\nu} \xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (4.20)$$

onde usamos a condição (4.10). Como os vetores de Killing ξ^α são arbitrários, então a função f em (4.19) é uma constante. Como o tensor de Ricci é de posto dois (e aparece nas equações

de Einstein), então ele deve ser escrito na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{N} g_{\mu\nu}, \quad R = R^\alpha{}_\alpha, \quad N \neq 2, \quad (4.21)$$

de acordo com a condição (4.19), em um espaço maximal.

4.1.2 A volta do tempo universal

Logo após Einstein amarrar o tempo com o espaço, construindo um espaço quadridimensional denominado de espaço-tempo por Minkowski, surge um grande problema na Relatividade Geral aplicada à Cosmologia: quem é o tempo? Como podemos afirmar que o espaço-tempo possui uma dinâmica sem re-introduzir um tempo, um segundo tempo, sobre o qual a evolução ocorre? A solução encontrada, a qual perdura até hoje, foi separar o tempo do espaço, numa forma branda. Branda ou não, o fato é que tivemos de separar o tempo do espaço. Esta separação é similar ao preenchimento de uma esfera por cascas esféricas concêntricas, onde a direção radial, sempre perpendicular às cascas esféricas, faz o papel do tempo. Esse tempo ortogonal às hipersuperfícies espaciais é o tempo universal, o tempo cosmológico. é o tempo absoluto de volta? Como esse tempo foi criado? Questões a parte, esse é o tempo próprio do espaço que está sendo criado.

Um espaço-tempo quadridimensional com uma métrica lorentziana $(-+++)$, cujas hipersuperfícies espaciais sejam maximais e apresentem curvaturas não-nulas, tem uma métrica que pode ser escrita na forma

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2(t)}{1 - k\bar{r}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & a^2(t)\bar{r}^2 & 0 & 0 \\ & & a^2(t)\bar{r}^2 \sin^2 \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad a(t) > 0, \quad k \in \{1, 0, -1\}, \quad (4.22)$$

tal que

$$-c^2 d\tau^2 = \langle ds | g | ds \rangle = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad \langle ds | = (cdt, d\bar{r}, d\theta, d\phi), \quad (4.23)$$

correspondendo a um espaço com curvatura positiva ($k = +1$), nula ($k = 0$) ou negativa ($k = -1$), respectivamente, onde a coordenada radial \bar{r} é medida em unidades a . Podemos reparametrizar a coordenada radial \bar{r} em (4.23) como

$$\bar{r} = \sin \chi, \quad (k = +1), \quad \bar{r} = \chi, \quad (k = 0), \quad \bar{r} = \sinh \chi, \quad (k = -1), \quad (4.24)$$

para reescrever as três métricas possíveis na forma

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & (k = +1), \\ d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & (k = 0), \\ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & (k = -1). \end{cases} \quad (4.25)$$

Vale ressaltar que as coordenadas (t, χ, θ, ϕ) são todas independentes, em princípio.

Como calculamos distâncias, áreas e volumes neste espaço-tempo? Num dado instante t , a distância radial de um objeto que move junto com o referencial é

$$r(t) = \sqrt{\langle 0, d\bar{r}, 0, 0 | g | 0, d\bar{r}, 0, 0 \rangle} = a(t) \int_0^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}} = a(t) \begin{cases} \sin^{-1} \bar{r}, & k = +1, 0 \leq \bar{r} \leq 1. \\ \bar{r}, & k = 0, \bar{r} \geq 0. \\ \sinh^{-1} \bar{r}, & k = -1, \bar{r} \geq 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

A distância radial $r(t)$ em (4.26) é denominada de distância própria. Como \bar{r} é independente de t , então a razão entre a distância própria r e o fator de escala do universo a é constante,

$$\frac{r}{a} = cte. \quad (4.27)$$

Isto é uma lei de conservação, a qual implica que variação logarítmica temporal da distância radial r é igual àquela do fator de escala a do universo,

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{a}}{a} \equiv H. \quad (4.28)$$

A derivada logarítmica $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ as vezes é denominada de “constante” de Hubble, a qual, em geral, depende do tempo.

4.1.3 O *redshift* cosmológico

Suponha que a luz emitida por um objeto distante chegue até o observador (situado na origem do nosso sistema de coordenadas) de forma radial. Como a luz permanece imóvel no espaço-tempo (geodésica nula), $d\tau = 0$ e de (4.23) temos

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}. \quad (4.29)$$

Como o lado direita desta equação é independente do tempo, então o seu lado esquerdo é uma quantidade conservada. Tomando o intervalo de tempo dt como o período temporal da luz emitida ou recebida, então sua frequência é $\nu = 1/dt$ e a lei de conservação (4.29) pode ser reescrita na forma

$$a\nu = \frac{a}{dt} = cte. \quad (4.30)$$

A mudança relativa na frequência de uma fonte distante, mais conhecida como *redshift*, é

$$z = \frac{\nu_e - \nu_o}{\nu_o} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (4.31)$$

onde ν_o é a frequência observada (na origem) e ν_e é a frequência emitida pela fonte distante. Mesmas observações para o comprimento de onda λ , onde $\lambda\nu = c$. Assim, o *redshift* pode ser relacionado ao parâmetro estrutural via a lei de conservação (4.30),

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (4.32)$$

Note que $t_o > t_e$, onde t_o é o tempo durante a observação, portanto posterior ao tempo da emissão t_e . Assim, podemos ter $a(t_o) > a(t_e)$ e $z > 0$ (*redshift*), correspondendo ao aumento do fator de escala do universo. Caso o fator de escala do universo esteja diminuindo, então $a(t_o) < a(t_e)$ e $z < 0$ (*blueshift*).

Conhecendo as derivadas do fator de escala num determinado tempo, digamos t_i , então podemos usar o teorema de Taylor para avaliá-lo num tempo t próximo de t_i ,

$$a(t) = a(t_i) + \dot{a}(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_i)(t - t_i)^2 + \dots \quad (4.33)$$

ou

$$\frac{a(t)}{a(t_i)} = 1 + H(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2}S(t_i)(t - t_i)^2 + \dots, \quad H(t_i) \equiv \frac{\dot{a}(t_i)}{a(t_i)}, \quad S(t_i) \equiv \frac{\ddot{a}(t_i)}{a(t_i)}. \quad (4.34)$$

Escolhendo usar as quantidades H (Hubble) e S (Slipher) no tempo de observação, $H_o = H(t_o)$ e $S_o = S(t_o)$, então devemos fazer $t_i = t_o$ e $t = t_e$ para usar (4.32) e reescrever (4.34) como

$$\frac{a(t_e)}{a(t_o)} = \frac{1}{1 + z} \approx 1 - H_o(t_o - t_e) + \frac{1}{2}S_o(t_o - t_e)^2. \quad (4.35)$$

Esta é uma boa aproximação para t_o próximo de t_e . Isto significa que ela presupõe que a fonte luminosa esteja próxima. Combinando (4.26) e (4.29), temos $c(t_o - t_e) = r_e$, onde r_e é a distância real da fonte luminosa, e considerando z pequeno, $z \ll 1$, então outra aproximação pode ser feito no lado esquerdo da Eq. (4.35),

$$z c \approx H_o r_e, \quad (4.36)$$

onde mativemos somente o termo linear em $c(t_o - t_e) = r_e$. Assim, esperamos que a mudança na frequência relativa da luz emitida por fontes próximas seja proporcional à distâncias que estamos delas (lei de Hubble-Slipher).

A derivada logarítmica $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ em (4.28) pode ser avaliada no tempo de emissão t_e (passado) conhecendo a taxa de variação do *redshift* z no presente. Para tal, basta calcularmos a taxa de variação de z em relação a t_o , usando a Eq. (4.32)

$$\frac{d}{dt_o}(1 + z) = \frac{dz}{dt_o} = \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_e)} - \frac{a(t_o)\dot{a}(t_e)}{a^2(t_e)} \frac{dt_e}{dt_o} = \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - \frac{\dot{a}(t_e)}{a(t_e)}, \quad (4.37)$$

onde usamos a lei de conservação (4.30). Deste resultado, combinado com (4.32), temos

$$H(t_e) = H(t_o)(1+z) - \frac{dz}{dt_o}. \quad (4.38)$$

4.1.4 O tensor energia-momentum

Precisamos observar a estrutura do tensor energia-momentum

$$(T_{\mu\nu}) = \left[\begin{array}{c|cccc} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ \hline T_{01} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{02} & T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{03} & T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{escalar} & \text{vetor} \\ \hline & \text{tensor de} \\ & \text{ordem dois} \end{array} \right], \quad (4.39)$$

onde a submatriz formada pela componente tempo-tempo (T_{00}) tem o caráter de um tensor de ordem zero (escalar), a submatriz formada pelas componentes tempo-espaço (T_{0i}) tem o caráter de um tensor de ordem um (vetor) e a submatriz formada pelas componentes espaço-espaço (T_{ij}) tem o caráter de um tensor de ordem dois.

No entanto, vimos que num espaço isotrópico e homogêneo maximal, um escalar deve ser constante, o vetor deve ser nulo e o tensor de ordem dois deve ser proporcional à métrica. Assim, o tensor energia-momentum no espaço-tempo deve assumir a forma

$$(T_{\mu\nu}) = \left[\begin{array}{c|c} \rho(t)c^2 & \\ \hline P(t)g_{ij} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} \rho(t)c^2 & & & & \\ \hline & P(t)g_{11} & & & \\ & & P(t)g_{22} & & \\ & & & P(t)g_{33} & \end{array} \right], \quad (4.40)$$

onde $\rho(t)$ é a densidade de massa ($\rho(t)c^2$ é a densidade de energia), $P(t)$ a pressão (fluxo do momentum linear) e g_{ij} são os elementos puramente espaciais de uma das métricas em (4.25). Como as métricas em (4.25) são diagonais, o tensor energia-momentum (4.40) representa um fluido perfeito, descrito pela sua densidade ρ e sua pressão P .

4.1.5 Termodinâmica

Considere uma região de volume V contendo uma massa m e uma energia U a uma pressão P . A primeira lei da Termodinâmica diz respeito ao balanço energético deste sistema: a energia térmica (infinitesimal) dQ que entra ou sai desta região é usada para variar a energia interna (dU) e o volume (dV). A variação do volume ocorre via trabalho mecânico, PdV . Assim, podemos escrever a primeira lei na forma

$$dQ = dU + PdV, \quad (4.41)$$

a qual representa a conservação de energia. Considerando que o universo esteja sendo criado e já possua um volume V e que há nada além dele, então não pode haver uma troca de energia térmica. Desta forma devemos ter um processo adiabático, $\bar{d}Q = 0$. Como a entropia S é definida por $TdS = \bar{d}Q$, onde T é a temperatura, então a entropia não pode variar num processo adiabático. A segunda lei da Termodinâmica diz que a entropia do universo deve aumentar sempre em processos reais (como em máquinas térmicas) e permanecer constante em processos ideais (como na máquina térmica de Carnot). Portanto, do ponto de vista da Termodinâmica clássica, a criação do universo é um processo ideal.

Considerando então um processo adiabático, $\bar{d}Q = 0$, a primeira lei (4.41) nos fornece a equação de estado

$$P = -\frac{dU}{dV} = -\rho_e, \quad (4.42)$$

onde ρ_e é a densidade de energia interna. Nesta densidade de energia não está incluída a matéria. Em geral, a densidade de energia energia-matéria deve ser escrita na forma

$$\rho = \rho_e + \rho_m, \quad (4.43)$$

onde ρ_m está relacionada à matéria e ρ_e está relacionada à energia interna. Um exemplo de energia interna no nosso cotidiano é a energia associada aos modos de vibração e rotação de moléculas.

4.1.6 Equações de Einstein

As equações de Einstein e as leis de conservação,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.44)$$

determinarão o fator de escala $a(t)$ presente nas métricas (4.25) quando uma equação de estado for dada, relacionando a densidade ρ e a pressão P presentes no tensor energia-momentum (4.40).

Considerando as métricas (4.25) e o tensor energia-momentum (4.40), as equações diferenciais correspondentes estão mostradas na Tabela 4.1. Podemos notar (na segunda linha) que apenas uma das equações diferenciais vindas das equações de Einstein é que distingue os três casos. A última linha mostra a curvatura R (traço do tensor de Ricci) do espaço-tempo.

A segunda equação de Einstein nos diz que o fator de escala (do universo) $a(t)$ varia no tempo com uma aceleração sempre negativa caso a pressão P e a densidade de energia ρ sejam positivas, como normalmente esperamos. Isto significa que em qualquer cenário, expansão ou contração, a dinâmica do universo está em desaceleração. A única forma de obtermos uma dinâmica acelerada é admitindo uma pressão negativa, como aquela apresentada em (4.42). Admitindo a equação de estado (4.42) e que a densidade de energia-matéria possa ser escrita na forma

$$\rho = \rho_e + \rho_m, \quad (4.45)$$

onde ρ_e é a densidade de energia interna e ρ_m é a densidade de energia ligada à matéria, então da segunda equação de Einstein na Tabela 4.1 temos três regimes possíveis para a

$k = +1$	$k = 0$	$k = -1$	
$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - 1$	$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2$	$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 + 1$	Einstein-1
$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P)a$	$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P)a$	$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P)a$	Einstein-2
$\dot{\rho}a = -3(\rho + P)\dot{a}$	$\dot{\rho}a = -3(\rho + P)\dot{a}$	$\dot{\rho}a = -3(\rho + P)\dot{a}$	Conservação
$R = 48\pi(\rho - 3P)$	$R = 48\pi(\rho - 3P)$	$R = 48\pi(\rho - 3P)$	Curvatura

Tabela 4.1: Equações diferenciais satisfeitas pelo fator de escala $a(t)$ considerando um espaço homogêneo e isotrópico com curvatura positiva ($k = +1$), nula ($k = 0$) e negativa ($k = -1$). A curvatura R do espaço-tempo é mostrada na última linha.

dinâmica do universo,

$$\rho + 3P = \rho_m - 2\rho_e \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{desacelerado,} \\ = 0 & \Rightarrow \text{estacionário,} \\ < 0 & \Rightarrow \text{acelerado.} \end{cases} \quad (4.46)$$

os quais dependem da relação entre as densidades de energia interna e de matéria. O regime estacionário $\rho_m = 2\rho_e$ é instável. Se ρ_m é ligeiramente superior (inferior) a $2\rho_e$, o regime é desacelerado (acelerado). (analisar a derivada)

A opção pelo regime estacionário tem um interesse histórico se combinado com a exigência de ser estático. Ser estático implica numa velocidade nula ($\dot{a} = 0$) para o fator de escala a . Então da primeira equação de Einstein na Tabela 4.1, temos

$$\rho = 3\rho_e = \frac{3k}{8\pi a} > 0 \quad \Rightarrow \quad k > 0. \quad (4.47)$$

A única possibilidade $k > 0$ é $k = +1$ na Tabela 4.1. Este universo estático possui um fator de escala estático dado por

$$a_E^2 = \frac{1}{8\pi\rho_e} = \frac{1}{\Lambda}. \quad (4.48)$$

Note que a condição $\dot{a} = 0$ garante que $\rho = 3\rho_e$ seja constante, como podemos inferir da equação proveniente da lei de conservação mostrada na Tabela 4.1. Admitindo a equação de estado (4.42) e a densidade de energia-matéria na forma (4.45), as equações de Einstein (4.44) podem ser reescritas na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad \Lambda = 8\pi\rho_e, \quad (4.49)$$

pois o tensor energia-matéria-momentum pode ser escrito na forma $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(e)} + T_{\mu\nu}^{(m)}$, onde $T_{\mu\nu}^{(e)} = -\rho_e g_{\mu\nu}$. Esta é uma possível interpretação do modelo de Einstein: um universo finito (fechado e sem fronteiras), estático e instável. Einstein denominou Λ em (4.49) de constante

cosmológica.

4.1.7 Nosso universo I

Como um exercício de criar universos a la bossa nova, pequenas variações sobre o mesmo tom, vamos considerar as sugestões seguintes como inéditas e procurar adaptá-las aos dados experimentais do momento sobre o movimento de galáxias e ou eventos distantes e a radiação de fundo. A criação do espaço produz ondas gravitacionais?

Inspirados pelo modelo do Einstein, vamos usar a equação de estado (4.42) e a densidade de energia-matéria na forma (4.45), porém sem a restrição da densidade de energia interna ρ_e ser constante. Desta forma, as equações de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad \Lambda = 8\pi\rho_e, \quad T_{00}^{(m)} = \rho_m, \quad T_{ii}^{(m)} = 0, \quad (4.50)$$

onde a “constante” cosmológica Λ não é mais constante. As equações Curvatura, Conservação e Einstein-2 na Tabela 4.1 tornam-se em

$$R = 48\pi(4\rho_e + \rho_m), \quad \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho_m}, \quad \ddot{a} = \frac{4\pi}{3}(2\rho_e - \rho_m), \quad (4.51)$$

respectivamente, para qualquer um dos três modelos (fechado ou aberto plano ou aberto curvo).

Momento de fazermos nossas escolhas, principalmente se tivermos dados experimentais para nos guiar. Para um universo com uma dinâmica estacionária (aceleração nula), devemos ter $\rho_m = 2\rho_e$ ($\rho = 3\rho_e$). Para um universo com uma dinâmica acelerada, devemos ter $\rho_m < 2\rho_e$ ($\rho < 3\rho_e$). Porém, podemos propor uma equação de estado da forma

$$\rho_e = w\rho_m \quad (4.52)$$

e usar a segunda equação em (4.51) para determinar a relação

$$\rho_m = c_1 a^{-\frac{3}{w+1}}. \quad (4.53)$$

A escolha $w = 0$ corresponde a situação em que a energia interna não existe ($\rho_e = 0$, *cold matter*) e a terceira equação em (4.51) fornece

$$t(\eta) = C_0(\eta - \sin \eta), \quad a(\eta) = C_0(1 - \cos \eta), \quad C_0 = \frac{4\pi c_1}{3}. \quad (4.54)$$

Estas são as equações paramétricas de uma cicloide, cuja circunferência geratriz tem raio C_0 . Este universo é periódico, de período $2\pi C_0$. O valor máximo do fator de escala é $2C_0$ no tempo πC_0 . Das propriedades geométricas da cicloide ser uma curva braquistócrona e tautócrona, podemos afirmar que o fator de escala deste universo atinge seu valor máximo no menor tempo e que dois universos inicializados em instantes diferentes irão atingir o mesmo valor máximo do fator de escala no mesmo intervalo de tempo, respectivamente.

A escolha $w = 1/2$ ou $2\rho_e = \rho_m$ (*hot matter*) fornece uma aceleração nula para o fator

de escala,

$$a(t) = \sqrt{4\pi c_1 - 1} t + c_2, \quad (4.55)$$

o qual cresce linearmente com o tempo. Note que a singularidade $a = 0$ pode ser evitada neste caso.

A escolha $w = 2$ ou $\rho_e = 2\rho_m$ fornece uma aceleração negativa e constante para o fator de escala,

$$a(t) = \frac{1}{8\pi c_1} + 2\pi c_1 t^2. \quad (4.56)$$

Neste caso, a singularidade $a = 0$ é proibida. No instante inicial, o universo tinha um fator de escala finito. O que fez este universo entrar em movimento? O fator de escala deste universo cresce parabolicamente para sempre, com uma aceleração constante e positiva. Como estamos no modelo fechado, a parte espacial deste universo é uma "casca" esférica de raio $a(t)$. Após um tempo longo a parte espacial deste universo se assemelhará a um espaço euclidiano (chato). Estamos lá?

Curiosamente os três casos acima são as únicas possibilidades de obtermos soluções analíticas (dadas por expressões algébricas) das equações de Einstein (mais leis de conservação). analise?

4.2 Espaços estacionários

4.2.1 Introdução

Definição 1 (Métrica estacionária). Uma métrica é estacionária se existe um sistema de coordenadas particular onde ela é explicitamente independente do tempo,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0, \quad (4.57)$$

onde x^0 representa a coordenada tipo tempo, $ds^2 = g_{00}x^0x^0 > 0$ (assumindo a assinatura $+, -, -, -$).

Essa definição é equivalente a essa outra, a qual é independente de um sistema de coordenadas:

Definição 2 (Espaço estacionário). Um espaçotempo é estacionário se, e apenas se, ele admite um vetor de Killing do tipo tempo.

Para verificarmos esta equivalência, basta definirmos o campo vetorial particular $X^\mu = \delta_0^\mu$ (do tipo tempo; verifique). Assim, a derivada de Lie da métrica,

$$L_X g_{\mu\nu} = \Delta_X g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \Delta_\nu X^\alpha + g_{\nu\alpha} \Delta_\mu X^\alpha = \Delta_\mu X_\nu + \Delta_\nu X_\mu, \quad (4.58)$$

se torna nula para $X^\mu = \delta_0^\mu$,

$$L_X g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,0} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0, \quad (4.59)$$

implicando que a métrica é estacionária e que $X^\mu = \delta_0^\mu$ é um vetor de Killing. Como $L_X g_{\mu\nu}$ é um tensor, teremos $L_X g_{\mu\nu} = 0$ em qualquer sistema de coordenadas.

Definição 3 (Métrica estática). Uma métrica é **estática** se sua forma quadrática $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é invariante a uma reversão temporal.

De acordo com essa definição, uma métrica estática não pode conter termos mistos (tempo-espaço), ou seja $g_{0i} = 0$, onde estamos admitindo x^0 do tipo tempo (verifique).

Definição 4 (Espaço estático). Um espaçotempo é **estático** se, e apenas se, ele admite um vetor de Killing do tipo tempo, ortogonal às hipersuperfícies (tipo espaço) deste espaçotempo.

Como esse espaço admite um vetor de Killing do tipo tempo, ele é também um espaço estacionário.

Uma hipersuperfície é dada pela condição $f(x^\mu) = cte.$, onde f é uma função bem comportada (admite uma série de Taylor),

$$f(x^\mu + dx^\mu) = f(x^\mu) + f_{,\alpha} dx^\alpha + \dots = cte. \quad (4.60)$$

Como f é constante, então, até primeira ordem, o gradiente $f_{,\mu}$ é ortogonal ao vetor tangente dx_μ (verifique),

$$n_\mu = f_{,\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad n_\mu dx^\mu = 0. \quad (4.61)$$

Qualquer campo vetorial da forma $X_\mu = \lambda(x)n_\mu$ será ortogonal à hipersuperfície $f(x^\mu) = cte.$ Esse campo satisfaz (verifique)

$$X_{[\mu} \partial_\alpha X_{\nu]} = X_{[\mu} \nabla_\alpha X_{\nu]} = 0. \quad (4.62)$$

Essa condição é necessária para mostrar que se o campo X_μ for de Killing, então $\lambda = X^2 = X_\mu X^\mu$. Impondo que este campo X_μ seja de Killing, do tipo tempo e ortogonal a hipersuperfícies, então a função f torna-se em $f = \bar{x}^0 = Ax^0 + B$, com A e B constantes. Isto significa que num espaço estático, a noção de tempo universal da mecânica Newtoniana é recuperada. De fato, se...

Definição 5 (Espaço esféricamente simétrico). Um espaçotempo é **esféricamente simétrico** se, e apenas se, ele admite três vetores de Killing do tipo espaço, linearmente independentes, com órbitas fechadas, satisfazendo

$$[X^i, X^j] = \epsilon^{ij}_k X^k. \quad (4.63)$$

4.2.2 Schwarzschild

A métrica de um espaçotempo esféricamente simétrico pode ser escrita na forma

$$ds^2 = g_{00}(r, t) c^2 dt^2 + g_{01}(r, t) c dt dr + g_{11}(r, t) dr^2 + f(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.64)$$

onde fizemos

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \sin \theta \cos \phi, \quad x^3 = \sin \theta \sin \phi. \quad (4.65)$$

Usando as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = K_g T_{\mu\nu} = 0, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad K_g = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (4.66)$$

obtemos ?

4.2.3 *Motivação*

Potencial (escalar)	$\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$	$-\frac{M_G G}{r}$
Energia potencial	$\mathcal{V} = m_G \phi$	$-\frac{m_G M_G G}{r}$
Campo gravitacional	$\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$-\frac{M_G G}{r^2} \hat{r}$
Força gravitacional	$\mathbf{F} = m_G \mathbf{E}$	$-\frac{m_G M_G G}{r^2} \hat{r}$
Segunda lei	$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$	
Princípio da equivalência	$m_G = m_I$	
Energia cinética	$\mathcal{T} = \frac{m_I}{2} v^2$	
Energia mecânica	$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$	

Tabela 4.2: Elementos fundamentais da teoria newtoniana da gravitação.

Trabalho (energia mecânica trocada):

$$\mathcal{W} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -m_G \int \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -m_G \int d\phi = -m_G \phi + cte \implies \Delta\mathcal{W} = -\Delta\mathcal{V}. \quad (4.67)$$

$$\mathcal{W} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m_I \int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = m_I \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{m_I}{2} v^2 + cte \implies \Delta\mathcal{W} = +\Delta\mathcal{T}. \quad (4.68)$$

Conservação da energia mecânica gravitacional:

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{T} + \Delta\mathcal{V} = 0. \quad (4.69)$$

Energia	$\mathcal{E} = \hbar\omega = h\nu$
momentum linear	$p = \hbar k = h/\lambda$
espectro	$\nu\lambda = c$ ou $\mathcal{E} = pc$

Tabela 4.3: Elementos da teoria do fóton.

1. Variação da energia do fóton em termos de sua frequência: $\Delta\mathcal{E} = h\Delta\nu$;
2. A energia trocada com o campo gravitacional é dada pelo trabalho: $\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{W} = -m_G\Delta\phi$;
3. Usar o princípio da equivalência: $h\Delta\nu = -m_I\Delta\phi$;
4. Supor que o fóton tem uma “massa inercial” dada pela relação $\mathcal{E} = m_Ic^2$: $h\Delta\nu = -\frac{\mathcal{E}}{c^2}\Delta\phi = -\frac{h\nu}{c^2}\Delta\phi$;
5. Frequência em função do potencial:

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{1}{c^2}d\phi \implies \nu = \nu_0 e^{-\phi/c^2}. \quad (4.70)$$

Quanto maior o potencial, menor a frequência (*red shift*). A frequência do relógio em B deve ser alterada para medir o mesmo intervalo de tempo entre dois sinais luminosos emitidos em A. O tempo de vôo de um sinal entre dois pontos sempre será o mesmo.

4.2.4 Propriedades

1. Eventos (luz) na mesma posição (x^i fixo):

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = (e^{\phi/c^2} cdt)^2, \quad \phi = \phi(x^i), \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \quad (4.71)$$

2. Métrica como uma forma quadrática (espaço riemanniano):

$$ds^2 = (e^{\phi/c^2} cdt)^2 + A_i dx^i dt + B_i (dx^i)^2 + C_{i<j} dx^i dy^j. \quad (4.72)$$

3. Estacionário:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = 0. \quad (4.73)$$

- (a) Cada relógio trabalha com uma frequência que é um múltiplo de sua frequência natural.
- (b) Cada sinal luminoso (ou queda livre) entre dois pontos pode ser repetido indefinidamente com a mesma duração.

4. Estático: $A_i = 0$

- (a) A duração de um sinal luminoso entre dois pontos é a mesma para os dois sentidos.

4.2.4.1 Provas

Considere um sinal luminoso entre dois pontos vizinhos numa dada direção x^I ($dx^j = 0$, $j \neq I$):

$$ds^2 = (e^{\phi/c^2} cdt)^2 + A_I dx^I dt + B_I (dx^I)^2 = 0. \quad (4.74)$$

Esta é uma equação (algébrica) quadrática em $dt/dx^I = \alpha$:

$$\alpha^2 + \frac{A_I}{c^2} e^{-2\phi/c^2} \alpha + \frac{B_I}{c^2} e^{-2\phi/c^2} = 0. \quad (4.75)$$

As raízes (s_1 e s_2) desta equação satisfazem

$$s_1 + s_2 = -\frac{A_I}{c^2} e^{-2\phi/c^2}, \quad s_1 s_2 = \frac{B_I}{c^2} e^{-2\phi/c^2}. \quad (4.76)$$

Cada raiz é proporcional ao tempo de vôo dt , o qual deve ser sempre o mesmo no trajeto dx^I . Então estas raízes não podem depender do tempo t .

Considere agora um sinal luminoso envolvendo as direções x^I e x^J ($dx^k = 0$, $k \neq I$ e $k \neq J$) num tempo t :

$$ds^2 = (e^{\phi/c^2} c dt)^2 + A_I dx^I dt + A_J dx^J dt + B_I (dx^I)^2 + B_J (dx^J)^2 + C_{IJ} dx^I dx^J = 0. \quad (4.77)$$

Sendo dx^I e dx^J distâncias fixas, então num tempo posterior t' teremos esta mesma equação com C_{IJ} trocado por C'_{IJ} . Desta forma, a diferença entre estas duas equações é

$$(C_{IJ} - C'_{IJ}) x^I dx^J = 0 \implies C_{IJ} = C'_{IJ}. \quad (4.78)$$

Caso as duas raízes s_1 e s_2 difiram apenas por um sinal significa que o tempo de vôo em sentidos opostos é o mesmo. Assim, se $s_1 + s_2 = 0$, então $A_I = 0$.

4.2.5 Forma canônica

Completando quadrados na métrica (4.72), ela pode ser reescrita na forma

$$ds^2 = e^{2\phi/c^2} \left(c dt - \frac{1}{c^2} w_i dx^i \right)^2 - h_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.79)$$

1. ϕ : potencial escalar,
2. w_i : potencial vetor,
3. h_{ij} : métrica espacial.

Invariância de calibre:

1. $x^i \rightarrow \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^i)$,
2. $t \rightarrow \bar{t} = \alpha t + \alpha f(x^i)$:
 - (a) $\bar{\phi} = \phi - c^2 \ln \alpha$,
 - (b) $\bar{\mathbf{w}} = \alpha(\mathbf{w} + c^3 \nabla f)$.

4.2.6 Campos

Para compreendermos o significado dos campos ϕ e \mathbf{w} , devemos ir para a situação de campos fracos ($\ll c^2$) e velocidades baixas ($\ll c$), onde a gravitação newtoniana pode ser usada. Assim, a métrica canônica (4.79) pode ser reescrita numa forma aproximada:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\phi/c^2} \left(cdt - \frac{1}{c^2} w_i dx^i \right)^2 - h_{ij} dx^i dy^j \\ &\approx \left[\left(1 + 2\frac{\phi}{c^2} \right) \left(1 - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c} \frac{1}{c^2} \right) - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] (cdt)^2 \\ &\approx \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 + 2\frac{\phi}{c^2} - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c} \frac{1}{c^2} \right] (cdt)^2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

ou

$$\begin{aligned} ds &= \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 + 2\frac{\phi}{c^2} - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c} \frac{1}{c^2} \right]^{1/2} cdt \\ &\approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c} \frac{1}{c^2} \right] cdt. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Considere a ação dada por

$$\frac{1}{c} \int_1^2 ds = \Delta t - \frac{1}{c^2} \int_1^2 \left(\frac{1}{2} v^2 - \phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \right) dt = \Delta t - \frac{1}{c^2} \int_1^2 \mathcal{L} dt, \quad (4.82)$$

onde \mathcal{L} é a lagrangiana por unidade de massa (após usar o princípio da equivalência, $m = m_I = m_G$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} v^2 - \phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (4.83)$$

Usando as equações de Euler,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad (4.84)$$

obtemos as equações de movimento para os campos ϕ e \mathbf{w} :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}), \quad (4.85)$$

até primeira ordem nos campos (fracos). Estas equações têm a mesma forma das eletromagnéticas, com \mathbf{w} fazendo o papel do potencial vector. O último termo em (4.85) é do tipo força de Lorentz (por unidade de carga). Assim, uma partícula com velocidade \mathbf{v} perpendicular ao campo “magnético” $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{w}$ executará uma trajetória circular (frequência B e raio v/B) e, caso contrário, uma trajetória helicoidal.

O primeiro termo em (4.85) é o campo gravitacional produzido pelo espaço estacionário. O segundo termo é a aceleração de Coriolis, produzida por um referencial girante com

velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$,

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e^{2\phi/c^2}}{2c}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}. \quad (4.86)$$

Até primeira ordem nos campos, esta expressão coincide com o último termo em (4.85). Vale lembrar que a taxa de variação em um referencial inercial de um vetor (posição, por exemplo) descrito num referencial girante com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (4.87)$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ é a taxa de variação medida no referencial girante. Desta forma, a aceleração no referencial inercial (onde vale a segunda lei de Newton) será

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (4.88)$$

O segundo termo é a aceleração (inercial) de Coriolis, o terceiro termo contém a aceleração (inercial) centrífuga. Na comparação com (4.85), temos $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, a velocidade angular (4.86) (até primeira ordem nos campos), e o campo gravitacional

$$\mathbf{a} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \quad (4.89)$$

O termo centrífugo não aparece em (4.85) por que mantivemos lá apenas os termos em primeira ordem nos campos.

Consideremos um disco girando com uma velocidade angular constante ω em torno do eixo Z . O espaço-tempo estacionário é o de Minkowski, cuja métrica é melhor descrita pelas coordenadas cilíndricas,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - dz^2. \quad (4.90)$$

Os relógios do disco girante estão sincronizados com os relógios do espaço estacionário. A variável t na métrica (4.90) representa o tempo marcado pelo relógio (do espaço estacionário) colocado na origem \mathcal{O} (Figura 4.1). Vamos trocar a coordenada angular θ por φ , medida a partir do plano A solidário ao disco girante,

$$\theta = \omega t + \varphi. \quad (4.91)$$

Assim, a métrica (4.90) torna-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 (\omega dt + d\varphi)^2 - dz^2 = (c^2 - \omega^2 \rho^2) dt^2 - 2\omega \rho^2 dt d\varphi - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - dz^2. \quad (4.92)$$

Após completar o quadrado envolvendo o três primeiros termos da última igualdade, temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\gamma^2} \left(c dt - \frac{\omega}{c} \rho^2 \gamma^2 d\varphi \right)^2 - d\rho^2 - \rho^2 \gamma^2 d\varphi^2 - dz^2 \\ &= e^{2\phi/c^2} (c dt - w_2 d\varphi)^2 - h_{11} d\rho^2 - h_{22} d\varphi^2 - h_{33} dz^2, \end{aligned} \quad (4.93)$$

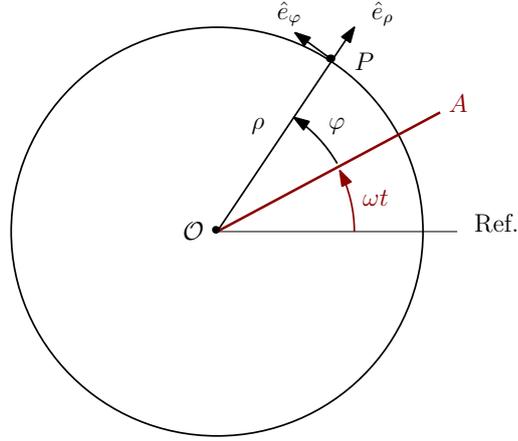


Figura 4.1: Disco girante com velocidade angular constante ω . O plano A é solidário ao disco.

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots, \quad v = \omega\rho, \quad \frac{d\gamma}{d\rho} = \frac{\omega^2}{c^2} \rho \gamma^3, \quad (4.94)$$

sendo $v = \omega\rho$ a velocidade tangencial num raio ρ no disco girante. Da última igualdade em (4.93) temos os potenciais escalar e vetorial,

$$e^{2\phi/c^2} = \frac{1}{\gamma^2}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \left(0, \frac{\omega}{c} \rho^2 \gamma^2, 0\right), \quad (4.95)$$

respectivamente, e a métrica (do espaço tridimensional)

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^2 \gamma^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (h^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\rho^2 \gamma^2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

O campo (ou aceleração) gravitacional é o gradiente do potencial escalar ϕ , dado em (4.95),

$$\mathbf{a} = \nabla = (\phi_{,\rho}, \phi_{,\varphi}, \phi_{,z}) = (-\omega^2 \rho \gamma^2, 0, 0) = \left(-\frac{v^2}{\rho} \gamma^2, 0, 0\right), \quad (4.97)$$

cujos módulo é (aceleração centrípeta)

$$a_c = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\phi_{,i} \phi_{,j} h^{ij}} = |\phi_{,\rho}| = \frac{v^2}{\rho} \gamma^2. \quad (4.98)$$

O rotacional do potencial vetor \mathbf{w} dado em (4.95),

$$\nabla \times \mathbf{w} = (0, 0, w_{2,1}), \quad w_{2,1} = \frac{dw_2}{d\rho} = 2\frac{\omega}{c}\rho\gamma^4, \quad (\nabla \times \mathbf{w})_{ij} = w_{i,j} - w_{j,i} = B_{ij}, \quad (4.99)$$

cujo módulo

$$\|\nabla \times \mathbf{w}\| = \sqrt{B_{ij}B_{kl}h^{ik}h^{jl}} = \sqrt{2B_{2,1}^2h^{11}h^{22}} = \frac{2\sqrt{2}}{c}\omega\gamma^3 \quad (4.100)$$

nos dá a velocidade angular

$$\Omega = \frac{c}{2\sqrt{2}}e^{\phi/c^2}\|\nabla \times \mathbf{w}\| = \omega\gamma^2. \quad (4.101)$$

Esta é a velocidade angular de um girocompasso colocado no disco girante a uma distância ρ de seu centro. Após uma volta completa do disco girante,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \gamma T_0, \quad (4.102)$$

onde T_0 é o período medido pelo relógio solidário ao disco girante (tempo próprio), esse girocompasso terá exibido uma rotação dada pelo ângulo

$$\Omega T_0 = 2\pi\gamma \approx 2\pi + \pi\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 2\pi + \pi\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)^2, \quad (4.103)$$

onde a expansão dada em (4.94) para velocidades baixas foi usada. Esta rotação do girocompasso é conhecida por precessão de Thomas.

4.2.7 Universo de Gödel

Apêndice A

Topologia

A.1 Introito

Uma visão mais recente de Topologia, e muito didática, é apresentada na Ref. [1], a qual contrasta ligeiramente com a visão rigorosa do grupo Bourbaki [2]. Os clássicos [3, 4] são sempre úteis como uma primeira leitura. Ref. [4] é uma ótima primeira leitura sobre variedades diferenciáveis.

A.2 Estrutura

Definição 1 (Topologia). Uma topologia (ou estrutura topológica) num conjunto X é uma estrutura dada por um conjunto \mathcal{X} de subconjuntos de X satisfazendo os seguintes axiomas:

1. Cada união de conjuntos de \mathcal{X} é um conjunto de \mathcal{X} . A topologia \mathcal{X} é fechada com relação à união.
2. Cada intersecção de um número finito de conjuntos de \mathcal{X} é um conjunto de \mathcal{X} . A topologia \mathcal{X} é fechada com relação à intersecção (finita).
3. O conjunto \mathcal{X} contém o próprio conjunto X e o conjunto vazio \emptyset .

Um elemento A da topologia \mathcal{X} é denominado de conjunto aberto ou simplesmente aberto. O complemento de um aberto em relação a X é denominado de fechado.

Note que o conjunto vazio \emptyset e o conjunto X são abertos e fechados ao mesmo tempo. As propriedades aberto e/ou fechado são complementares. Uma estrutura topológica pode muito bem ser definida em termos dos conjuntos fechados.

Quando \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 são topologias num mesmo conjunto X com $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$, então \mathcal{X}_1 é mais refinada que \mathcal{X}_2 .

Uma topologia discreta em X é formada por todos os subconjuntos de X . Esta é a maior topologia possível, também considerada a mais refinada. Uma topologia trivial em X é um conjunto $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$ contendo apenas dois elementos: o conjunto vazio \emptyset e o próprio conjunto X . Esta é a menor topologia possível, também considerada a menos refinada. O complemento de qualquer aberto numa topologia discreta ou trivial é fechado (por definição),

mas também pertence à topologia. Assim, os abertos são também simultaneamente fechados numa topologia discreta ou trivial.

A topologia canônica \mathcal{X} no conjunto $X = \mathbb{R}$ dos números reais é formada pelas uniões arbitrárias de intervalos abertos (a, b) , com $a, b \in \mathbb{R}$.

Definição 2 (Espaço topológico). Um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é um conjunto X munido de uma estrutura topológica \mathcal{X} . Um elemento x de um espaço topológico X é denominado de ponto.

Um espaço topológico com uma topologia discreta (trivial) é denominado de espaço discreto (trivial). O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a sua topologia canônica é o espaço topológico denominado de reta real.

Definição 3 (Homeomorfismo). Um homeomorfismo entre dois espaços topológicos (X, \mathcal{X}) e (Y, \mathcal{Y}) é um isomorfismo entre suas topologias \mathcal{X} e \mathcal{Y} .

Quando existe um homeomorfismo, os dois espaços topológicos são homeomórficos.

Definição 4 (Vizinhança). Seja U um subconjunto de um conjunto X com uma topologia \mathcal{X} . Uma vizinhança de U é qualquer subconjunto V de X que contenha um conjunto aberto A contendo U .

Esta definição de vizinhança de um ponto, devida ao grupo Bourbaki, generaliza a noção que temos dela na reta, no plano e no espaço euclidiano em geral: de um conjunto aberto contendo este ponto, ou seja um conjunto contendo todos os pontos suficientemente próximos de cada um de seus pontos..

Proposição 1. *Um conjunto aberto é a vizinhança de cada um de seus elementos.*

Para cada ponto x do espaço topológico (X, \mathcal{X}) seja $\mathcal{V}(x)$ o conjunto das vizinhanças dos “singletos” $\{x\}$, também referidas como vizinhanças do ponto x . Esse conjunto $\mathcal{V}(x)$ tem quatro propriedades:

1. O ponto x pertence a cada conjunto de $\mathcal{V}(x)$.
2. Cada subconjunto de X contendo um conjunto de $\mathcal{V}(x)$ também pertence a $\mathcal{V}(x)$.
3. $\mathcal{V}(x)$ contém suas intersecções finitas.
4. Para $x \in V$ e $V \in \mathcal{V}(x)$ existe um ponto $y \in U$, suficientemente próximo de x , tal que $U \in \mathcal{V}(x)$ e $V \in \mathcal{V}(y)$.

Proposição 2. *Um espaço topológico (X, \mathcal{V}) é um conjunto X onde podemos associar a cada elemento x um conjunto $\mathcal{V}(x)$ de suas vizinhanças.*

Definição 5 (Base). Uma base da topologia \mathcal{X} de um espaço topológico X é um conjunto \mathcal{B} de abertos de X tal que cada subconjunto aberto de X seja a união de conjuntos de \mathcal{B} .

Uma topologia é determinada completamente por sua base. Por exemplo, a topologia discreta em X tem uma base canônica (ou fundamental) formada pelo conjunto de “singletos” $\{x\}$, $x \in X$. É canônica (ou fundamental) por ser a menor base possível.

Definição 6 (Interior). Um ponto x de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é um ponto interior de um subconjunto A de X se A for uma vizinhança de x . O conjunto $\overset{\circ}{A}$ dos pontos interiores de A é denominado o interior de A .

Como A é uma vizinhança do ponto x , A contém abertos contendo x . A união de todos esses abertos contidos em A é um aberto, o interior de A , o maior aberto contido em A . O subconjunto A não precisa ser necessariamente aberto.

Proposição 3. *Um conjunto é aberto se, e somente se, ele coincide com seu interior.*

Definição 7 (Exterior). Um ponto x de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é um ponto exterior de um subconjunto A de X se pertencer ao interior do complemento $X - A$ de A em X . O conjunto A' dos pontos exteriores de A é denominado o exterior de A .

Assim, um ponto exterior de A tem uma vizinhança que não encontra/alcança A .

Definição 8 (Fecho). O fecho \bar{A} de um subconjunto A de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é o conjunto de todos os pontos $x \in (X, \mathcal{X})$ tais que cada vizinhança de x encontra A .

Significa então que há pontos em A tão próximos de x quanto quisermos. Colocado de outra forma, o fecho é a intersecção de todos os fechados contendo A , o menor fechado contendo A . O subconjunto A não precisa ser necessariamente fechado.

Proposição 4. *Um conjunto é fechado se, e somente se, ele coincide com o seu fecho.*

Também podemos afirmar que o fecho de A é o complemento do exterior de A , $\bar{A} = X - A'$, e, naturalmente, o exterior de A é o complemento do fecho de A ,

$$\bar{A} = X - A', \quad (\text{A.1a})$$

$$A' = X - \bar{A}. \quad (\text{A.1b})$$

Esta é uma relação de dualidade entre fecho e exterior.

A relação entre um subconjunto A de X e seu complemento $X - A$ é uma dualidade: um é o dual do outro. Essa dualidade pode ser estendida a muitas outras operações, por exemplo união e intersecção, as quais são duais no seguinte sentido:

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B), \quad (\text{A.2a})$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \quad (\text{A.2b})$$

Fecho e interior também são definições duais: o interior do complemento de A em X (diga-se exterior) é o complemento do fecho e o fecho do complemento de A em X é o complemento do interior de A em X . Seja $C = X - A$ o complemento de A em X . Então, as duas afirmações anteriores podem ser escritas matematicamente como

$$\overset{\circ}{C} = X - \bar{A}, \quad (\text{A.3a})$$

$$\bar{C} = X - \overset{\circ}{A}. \quad (\text{A.3b})$$

Definição 9 (Fronteira). Um ponto x de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é um ponto fronteiro de um subconjunto A de X se pertencer ao fecho de A e ao fecho do complemento $X - A$ de A em X . O conjunto \tilde{A} dos pontos fronteiros de A é denominado a fronteira de A .

O interior de A , o exterior de A e a fronteira de A são mutuamente disjuntos e a união deles é $X \supset A$. Da hierarquia $\dot{A} \subset A \subset \bar{A}$ temos que a fronteira de A pode ser vista também como o complemento do interior de A em relação ao fecho de A , $\tilde{A} = \bar{A} - \dot{A}$, a qual é uma dualidade,

$$\tilde{A} = \bar{A} - \dot{A}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\dot{A} = \bar{A} - \tilde{A}. \quad (\text{A.4b})$$

A.3 Propriedades

Definição 10 (Hausdorff). Um espaço topológico é Hausdorff (ou com separação) se quaisquer dois pontos distintos têm vizinhanças disjuntas ou, equivalentemente, pontos distintos sempre pertencem a abertos distintos.

Atualmente esta condição de separabilidade (Hausdorff) é terceira, denotada por T_2 , numa série de restrições que podem ser impostas num espaço topológico cujas consequências implicam em propriedades úteis em certas situações.

Todo espaço discreto é Hausdorff e é o único do tipo Hausdorff num conjunto finito. Qualquer espaço métrico é Hausdorff.

Proposição 5. *A intersecção de todas as vizinhanças fechadas de um ponto de um espaço Hausdorff contém somente este ponto.*

Definição 11 (Cobertura). Uma família de conjuntos A_i , $i \in I$, é uma cobertura de um conjunto X se $X \subset \cup_i A_i$. Se $J \subset I$ e A_i , $i \in J$, ainda é uma cobertura de X , então ela é um refinamento.

Quando todos os conjuntos de uma cobertura são abertos (fechados), a cobertura é aberta (fechada).

Definição 12 (Localmente finito). Uma família A_i , $i \in I$, de subconjuntos de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é denominada de localmente finita se para cada ponto $x \in (X, \mathcal{X})$ existir uma vizinhança V de x tal que $V \cap A_i \neq \emptyset$ para uma quantidade finita de índices $i \in I$.

Definição 13 (Compacto). Um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é compacto se cada cobertura aberta de X contém uma cobertura aberta finita de X (axioma de Borel-Lebesgue).

O grupo Bourbaki inclui também a condição de separabilidade Hausdorff.

Definição 14 (Compacto-Bourbaki). Um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é compacto se cada cobertura aberta de X contém uma cobertura aberta finita de X (axioma de Borel-Lebesgue) e se for Hausdorff.

Um espaço topológico finito e compacto é discreto. De forma equivalente, porém mais interessante, cada espaço discreto compacto é finito. Bom ter em mente que os grupos de Lie são espaços topológicos métricos, portanto de Hausdorff, e que as representações irredutíveis compactas unitárias (hermitianas nas álgebras) são finitas.

O espaço euclidiano não é compacto, mas suas esferas, de qualquer dimensão, são compactas.

Proposição 6. *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Proposição 7. *Cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado.*

Proposição 8. *Um subconjunto de um espaço compacto somente é compacto se for fechado.*

Assim, um subconjunto compacto num espaço métrico (que é Hausdorff) é fechado. Um subconjunto compacto significa um subespaço compacto num espaço métrico.

Definição 15 (Localmente compacto). Um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é localmente compacto se cada ponto dele contiver uma vizinhança compacta. Bourbaki: se ele é também Hausdorff.

Assim, todo espaço compacto é localmente compacto, mas o contrário não é verdadeiro. Todo espaço discreto é localmente compacto.

Definição 16 (Para-compacto). Um espaço topológico (X, \mathcal{X}) é para-compacto se cada cobertura dele tiver um refinamento localmente finito. Bourbaki: se ele é também Hausdorff.

Naturalmente, cada espaço compacto é para-compacto. Todo espaço discreto é para-compacto, pois a cobertura aberta formada pelos singletos é localmente finita e a mais fina possível (um refinamento). O espaço euclidiano é paracompacto.

Uma hierarquia pode ser estabelecida: ser compacto é mais forte que ser localmente compacto e é mais forte que ser para-compacto. Note que todo espaço discreto é localmente compacto e também para-compacto, mas somente os finitos são compactos. Como podemos comparar espaços localmente compactos com espaços para-compactos?

Definição 17 (Homeomorfismo). Um homeomorfismo entre um espaço topológico (X, \mathcal{X}) e outro espaço topológico (Y, \mathcal{Y}) é um isomorfismo entre as suas topologias \mathcal{X} e \mathcal{Y} .

Quando há um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, se diz que eles são homeomórficos. Para que haja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que haja uma bijeção a qual transforme abertos de um espaço em abertos do outro espaço e vice-versa.

Definição 18 (Mapa contínuo). Um mapa (aplicação ou função) f de um espaço topológico (X, \mathcal{X}) noutro espaço topológico (Y, \mathcal{Y}) é contínuo num ponto $x_0 \in X$ se, em qualquer vizinhança V de $f(x_0)$ em Y , há uma vizinhança U de x_0 em X tal que a relação $x \in U$ implique em $f(x) \in V$. Um mapa é simplesmente contínuo se for contínuo em cada ponto.

Proposição 9. *O mapa $f : X \rightarrow Y$ é contínuo no ponto x_0 se, em qualquer vizinhança V de $f(x_0)$ em Y , a inversa $f^{-1}(V)$ for uma vizinhança de $x_0 \in X$.*

Teorema 1. *Se as funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, então a composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.*

Teorema 2. *Para uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ ser um homeomorfismo é necessário e suficiente que f e sua inversa f^{-1} sejam contínuas.*

A.4 Construções

Definição 19 (Produto direto). O produto direto (ou cartesiano) entre dois conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y$ dos pares ordenados (x, y) , com $x \in X$ e $y \in Y$. Os conjuntos $X \times b$, com $b \in Y$, e $a \times Y$, com $a \in X$, são denominados de fibras do produto $X \times Y$. Os mapas (contínuos)

$$\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x, \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y, (x, y) \rightarrow y, \quad (\text{A.5b})$$

são denominados de projeções naturais.

Definição 20 (Topologia produto). Sejam (X, \mathcal{X}) e (Y, \mathcal{Y}) espaços topológicos. O conjunto de abertos da forma $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ é uma base para a topologia produto em $X \times Y$. O espaço produto é $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

O espaço real \mathbb{R}^n de dimensão n é o produto de n cópias da reta real \mathbb{R} .

Definição 21 (Trajetória). Uma trajetória $u : I \rightarrow X$ é um mapa contínuo do espaço topológico $I = [0, 1]$ num espaço topológico (X, \mathcal{X}) . Uma trajetória conecta os pontos $u(0)$ e $u(1)$ em X .

A Figura A.1 mostra uma trajetória u em X e o produto de duas trajetórias. O nome trajetória é para lembrar o movimento de um objeto de $u(0)$ para $u(1)$. Trajetórias possuem as seguintes propriedades:

1. Inverso. No trajeto inverso u^{-1} , o movimento é de $u(1)$ para $u(0)$:

$$u^{-1} : t \rightarrow u(1 - t). \quad (\text{A.6})$$

A inversa é contínua.

2. Produto. O produto uv de duas trajetórias u e v , restrito à condição $u(1) = v(0)$, é definido como

$$uv : t \rightarrow \begin{cases} u(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ v(2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}. \quad (\text{A.7})$$

O produto é contínuo. Veja a Figura A.1.

Definição 22 (Espaço conectado). Um espaço topológico onde quaisquer dois pontos são conectados por uma trajetória é denominado conectado.

Um espaço euclidiano de qualquer dimensão é conectado. O conjunto das matrizes inversíveis (determinante diferente de zero) não é conectado, mas contém duas componentes (partes) conectadas: o conjunto com determinante positivo, conectado à identidade, e o conjunto com determinante negativo.

Definição 23 (Homotopia). Um mapa contínuo $H : X \times I \rightarrow Y$ entre espaços topológicos X e Y , com $I = [0, 1]$, é uma homotopia se $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para dois mapas contínuos $f, g : X \rightarrow Y$. Os mapas f e g são ditos homotópicos.

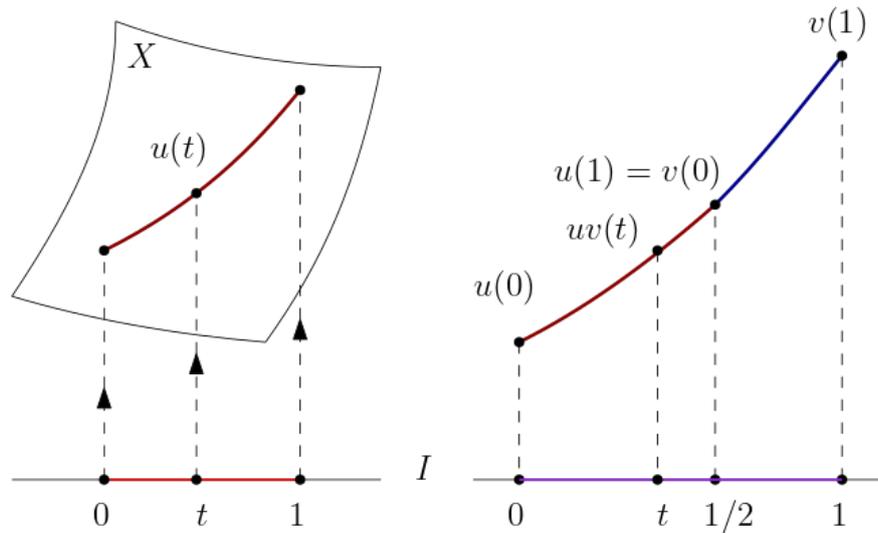


Figura A.1: Uma trajetória num espaço topológico X e o produto de duas trajetórias.

Para $x \in X$ e $t \in I$ é conveniente escrevermos $H(x, t) = h_t(x)$. Assim, para cada t fixo, $h_t : X \rightarrow Y$ é um mapa contínuo e a homotopia H será uma família de mapas contínuos h_t etiquetadas pelo parâmetro $t \in I$. Uma homotopia $H(x, t)$ conecta continuamente dois mapas f e g ou, equivalentemente, deforma continuamente o mapa f no mapa g , nesta ordem. Na ordem inversa, a homotopia $H(x, 1 - t)$ deforma continuamente o mapa g no mapa f . Cada mapa contínuo é autohomotópico.

Definição 24 (Mapa homotópico nulo). Um mapa homotópico a um mapa constante é denominado de mapa homotópico nulo.

Definição 25 (Homotopia estacionária). Uma homotopia H é estacionária (ou fixa) em $A \subset X$ se $H(x, t) = H(x, 0) = f(x)$ para cada $x \in A$ e $t \in I$.

Homotopia é uma relação de equivalência.

Teorema 3. Sejam H uma homotopia entre f e f' e H' uma homotopia entre f' e f'' . Então H'' é uma homotopia entre f e f'' , definida por

$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ H'(x, 2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Assim, uma homotopia separa o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de todos os mapas contínuos entre X e Y em classes de equivalência, ou classes de homotopia, conjuntos contendo todas os mapas homotopicamente equivalentes.

Definição 26 (Classes de homotopia). Classes de homotopia são classes de equivalência homotópica. O conjunto de todas as classes de equivalência de todos os mapas contínuos entre X e Y é denotado por $\pi(X, Y)$.

Como uma trajetória u é um mapa contínuo, podemos falar em homotopia de uma trajetória e a correspondente classe de homotopia. Seja $[u]$ a classe de homotopia de uma trajetória u . O produto entre classes de homotopia de trajetórias é bem definido.

Definição 27 (Produto de classes de homotopia). Sejam $[u]$ e $[v]$ as classes de homotopia das trajetórias u e v . Então

$$[uv] = [u][v], \quad (\text{A.9})$$

é o produto entre as classes de homotopia $[u]$ e $[v]$, com o produto uv definido em (A.7).

O produto entre classes de homotopia satisfaz as seguintes propriedades:

- Associatividade. $[u[vw]] = [[uv]w]$.
- Unidade. $[e_a u] = [u]$.
- Inverso. $[u][u^{-1}] = [e_a]$.

Desta forma, o produto de classes de homotopia (A.9) forma um grupo para as trajetórias fechadas, para as quais a condição de existência do produto entre trajetórias (A.7) está garantida. Considere duas trajetórias fechadas u e v em x_0 , isto é, iniciando e terminando no ponto x_0 . Então, $x_0 = u(0) = u(1) = v(0) = v(1)$. Seja $\Omega_1(X, x_0)$ o conjunto das trajetórias fechadas em $x_0 \in X$, num espaço topológico X . Seja $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto das classes de homotopia de $\Omega_1(X, x_0)$.

Teorema 4 (Grupo fundamental). *O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ forma um grupo, denominado de grupo fundamental (ou grupo de Poincaré).*

O grupo fundamental é unidimensional. Trocando o intervalo I (reta) por um cubo I^r , os grupos de classes de homotopia π_r terão dimensões maiores.

Apêndice B

Variedade diferenciável

Definição 28 (**Função diferenciável**). Seja f uma função (ou mapa) definida em U , um conjunto aberto do espaço euclidiano de dimensão n . Então, f é denominada diferenciável se possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens em todos os pontos de U .

Em geral se usa C^∞ para indicar a existência de todas as derivadas parciais contínuas.

Definição 29 (**Variedade diferenciável**). Seja M um espaço topológico de dimensão n com uma cobertura formada por contáveis abertos U_i . Então, M é denominado de uma variedade diferenciável se estes abertos U_i satisfizerem as seguintes propriedades:

1. Para cada aberto U_i há um homeomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, onde V_i é um aberto de um espaço euclidiano de dimensão n .
2. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então o homeomorfismo $\phi_{ji} = \phi_j \phi_i^{-1}$ é um mapa diferenciável, tal que $\phi_{ji} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$.

O homeomorfismo ϕ define um sistema de coordenadas em um aberto U de um espaço topológico M , aproveitando o sistema de coordenadas natural num aberto V de um espaço euclidiano. É um sistema local de coordenadas. Isso é o que possibilita a introdução do conceito de diferenciabilidade num espaço topológico.

Definição 30 (**Coordenadas locais**). O homeomorfismo ϕ na Definição 29 é denominado de um sistema local de coordenadas na vizinhança de um ponto $x \in U$.

Definição 31 (**Sub-variedade diferenciável**). Um sub-espaço N de uma variedade diferenciável M é uma sub-variedade diferenciável se um sistema local de coordenadas em N pode ser induzido do sistema local de coordenadas da variedade M .

Referências Bibliográficas

- [1] O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, and V. M. Kharlamov. *Elementary Topology*. AMS, 2000.
- [2] N. Bourbaki. *General Topology. Part I*. Hermann-Addison-Wesley, 1966.
- [3] W. G. Chinn and N. E. Steenrod. *First Concepts of Topology*. Yale, 1966.
- [4] A. Wallace. *Differential Topology*. Benjamin, 1968.