Breve Introdução à Relatividade Especial

Esmerindo Bernardes [1]

L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

19 de outubro de 2023

[1]email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Espaço + Tempo

1.1 Transformações de Galileu

Suponha dois referenciais inerciais quaisquer, digamos $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$, cada um equipado com seu própio relógio. Considere o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em movimento uniforme em relação a $\mathcal{O}$. Para simplificar um pouco, vamos supor que os eixos espaciais X, Y e Z do referencial $\mathcal{O}$ sejam paralelos aos eixos espaciais $\bar{X}$, $\bar{Y}$ e $\bar{Z}$ do referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em qualquer instante de tempo. Vamos supor também que suas origens coincidam em $t = \bar{t} = 0$, onde ambos relógios são sincronizados. Vamos também considerar que o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ se movimente ao longo do eixo X com velocidade constante V, conforme indicado na Figura 1.1.

Muito bem. Imagine agora que algum experimento mecânico seja realizado (no vácuo) no referencial em movimento $\bar{\mathcal{O}}$. Este experimento pode ser (1) o lançamento ou a queda livre de um objeto sob a ação da gravidade ou (2) o movimento de um corpo preso a uma mola (oscilador harmônico sem atrito) ou (3) o movimento de um corpo sob a ação da gravidade, porém preso a uma extremidade de uma haste inextensível e de massa nula com a outra extremidade fixa (pêndulo simples sem atrito), para citar apenas três possibilidades. Como os resultados desses experimentos em $\bar{\mathcal{O}}$ serão vistos no referencial em repouso $\mathcal{O}$? Todos os números serão os mesmos? As trajetórias serão as mesmas? Eventos simultâneos em $\bar{\mathcal{O}}$ serão vistos também simultaneamente no outro referencial $\mathcal{O}$?

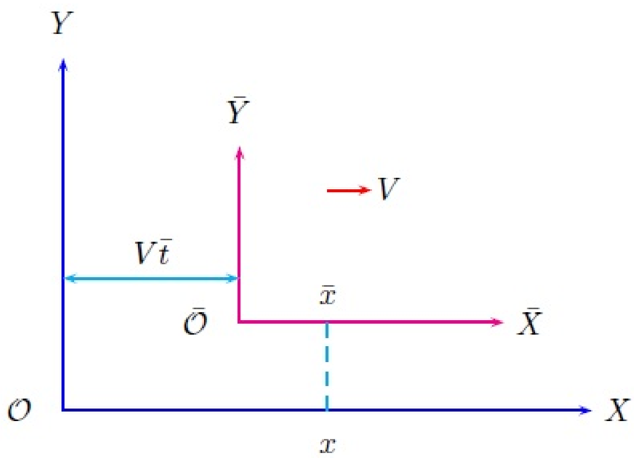

Figura 1.1: Transformações de coordenadas entre referenciais inerciais. A velocidade relativa entre eles é V. Os relógios foram sincronizados no momento em que os dois referenciais coincidiram.

Para respondermos estas questões, precisaremos saber primeiramente como relacionar coordenadas nestes dois referenciais. Segundo Newton, esta relação deve cumprir uma exigência fundamental: ela deve preservar a definição de força, ou seja, o produto massa (constante) por aceleração deve ser o mesmo ou proporcionais nos dois referenciais, pois estes dois referenciais são inerciais. Isto é conhecido como o princípio da relatividade de Galileu-Newton:

Princípio 1. *Todas as leis da Mecânica são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência.*

Note que Galileu e Newton não ousaram incluir as demais leis físicas, além daquelas da Mecânica, neste princípio. Portanto, se queremos aderir ao princípio da relatividade de Galileu-Newton, a única possibilidade de efetuarmos uma transformação de coordenadas que preserve a definição de força (portanto as leis da Mecânica) é uma relação linear no tempo e na posição,

$$x = \gamma(\bar{x} + V\bar{t}), \tag{1.1}$$

quando o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ estiver movimentando-se no sentido positivo do eixo X (veja a Figura 1.1), ou

$$\bar{x} = \gamma(x - Vt), \tag{1.2}$$

quando o referencial $\mathcal{O}$ estiver movimentando-se no sentido negativo do eixo $\bar{X}$. Note que mantivemos a mesma constante γ nestas duas relações. Isto é razoável, pois estamos considerando que o nosso espaço vazio (o palco de todos os movimentos) seja homogêneo e isotrópico. Ser homogêneo significa que a constante γ não pode depender da posição. Em um espaço isotrópico, a constante γ não pode depender nem da direção nem do sentido de qualquer vetor. Consequentemente, se γ tiver qualquer dependência com a velocidade do referencial $\bar{\mathcal{O}}$, poderá ser apenas uma dependência em seu módulo V (rapidez). Até aqui, não mencionamos qualquer relação entre t e $\bar{t}$, a não ser que $x = \bar{x}$ em $t = \bar{t} = 0$. Quem são os possíveis valores de γ?

Galileu e Newton fizeram a hipótese de que o tempo flui uniformemente nos dois referenciais, ou seja, $t = \bar{t}$ sempre. Isto significa que o tempo é absoluto, o mesmo em todos os referenciais inerciais, ou seja, um evento que é simultâneo em um referencial inercial, o será em todos os demais. Newton acreditava também que a existência de um tempo absoluto estivesse ligado com a existência de um Deus supremo. Fazendo $t = \bar{t}$ em (1.1) e (1.2) e depois somando estes dois resultados, obteremos

$$x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1. \tag{1.3}$$

Também fazendo $x = \bar{x}$ em $t = \bar{t} = 0$, determinamos $\gamma = 1$. Também observando Figura 1.1 e usando geometria plana euclidiana, deduzimos que $\gamma = 1$ nas relações (1.1) e (1.2).

As transformações

$$x = \bar{x} + Vt, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \bar{t}, \tag{1.4}$$

$$\bar{x} = x - Vt, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t, \tag{1.5}$$

são conhecidas por **transformações de Galileu**. Note que derivando no tempo estas equações, obtemos a conhecida regra de composição para velocidades,

$$\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V. \tag{1.6}$$

Note também que as transformações de Galileu preservam a aceleração dos corpos. Consequentemente, o produto massa (constante) por aceleração é mantido invariante, ou seja a segunda lei é preservada. Naturalmente, estas transformações têm sido verificadas em todos os casos conhecidos, exceto quando o valor de V é comparável ao valor da velocidade da luz. Surpreso? Isto é realmente surpreendente!

1.2 Espaço euclidiano

Imagine um espaço tridimensional onde um ponto é localizado pelas coordenadas (x, y, z) e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i dx_j, \;\; g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{1.7}$$

onde a métrica g é a identidade. Esta distância infinitesimal (1.7) é invariante mediante translações e rotações espaciais (independentes do tempo; tempo absoluto). Um espaço deste tipo é denominado de euclidiano. A Mecânica newtoniana está inserida num espaço euclidiano tridimensional equipado com relógios que uma vez sincronizados, assim premanecerão mesmo se estiverem em movimento.

Para mostrar que a distância infinitesimal (1.7) é um invariante perante rotações, considere uma rotação em torno do eixo Z,

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta, \tag{1.8}$$

onde θ é o ângulo de rotação (medido no sentido contrário aos ponteiros de um relógio; regra da mão direita). As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ representam um vetor no plano, rodado pelo ângulo θ em torno do eixo Z. Agora escreva a distância $d\bar{s}^2$ no referencial girado e use as transformações de Galileu (1.8) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo, $d\bar{x} = dx\cos\theta - dy\sin\theta$ (θ é constante) e assim por adiante. Como as diferenciais não "enxergam" constantes, é imediato mostrar que translações não afetam a distância infinitesimal (1.7), pois elas apenas somam constantes às coordenadas cujas variações serão tomadas em seguida.

No entanto, curiosamente, a distância infinitesimal (1.7) não é invariante perante às transformações de Galileu (1.4). Para ver isto, escreva a distância $d\bar{s}^2$ no referencial em movimento e use as transformações de Galileu (1.4) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo, $d\bar{x} = dx - V dt$ (a velocidade relativa V é constante) e assim por adiante. Verifique que para (1.7) ser invariante às transformações de Galileu (1.4), teríamos de aceitar $V = 2v_x$, o que é um absurdo.

A discrepância entre a previsão (1.6), fruto das transformações de Galileu (1.4), e experimentos foi consagrada no experimento de Michelson-Morley, realizado pela primeira vez um pouco antes de 1900. Vejamos primeiro o que a teoria de Galileu-Newton prediz quando luz é emitida na origem do referencial em movimento $\bar{\mathcal{O}}$ e observada em $\mathcal{O}$ (nosso referencial, "fixo"). No instante t, a luz está na posição $\bar{x} = ct$ em $\bar{\mathcal{O}}$. Então, no referencial $\mathcal{O}$, segundo a transformação (1.4), ela estará em $x = \bar{x} + Vt = (c + V)t$. Portanto, no referencial $\mathcal{O}$ a luz deve ser vista com uma velocidade $c + V$, maior que c. Entretanto, o experimento de Michelson-Morley diz que a velocidade da luz é a igual a c em todos os referenciais inerciais! Pronto, a confusão estava feita. Albert A. Michelson, por achar que havia alguma coisa errada em seu experimento, continuou a repeti-lo por quase 30 anos! Ele recebeu o prêmio Nobel em 1907 (por estas medidas e por ter inventando o interferômetro, um instrumento ótico de alta precisão).

Capítulo 2

Espaçotempo

2.1 Transformações de Lorentz

No entanto, ainda em 1905, Albert Einstein, um jovem físico, até então completamente desconhecido, disse de forma arrebatedora que a nossa natureza é assim: a velocidade da luz no vácuo é independente do movimento da fonte, ou seja, ela é uma constante universal. Sem ter conhecimento do experimento de Michelson-Morley. Simples assim. E concluiu: então não poderemos ter $\gamma = 1$ e nem $\bar{t} = t$! Devemos ter $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$. Substituindo estes valores em (1.1) e (1.2), teremos (verifique)

$$ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t, \tag{2.1}$$

da qual resulta (a menos de um sinal)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}. \tag{2.2}$$

Note que γ depende somente do módulo da velocidade relativa entre os referenciais inerciais, como previsto. A presença da velocidade da luz é uma surpresa enorme. Podemos ver então que no limite de baixa velocidade $V \ll c$, $\beta \to 0$ e $\gamma \to 1$, que é o seu valor no caso clássico (1.3) se escolhermos γ positivo em (2.2). No entanto, quando V é comparável a c, temos de usar as transformações (1.1) e (1.2) com γ dado em (2.2). Relações similares para o tempo visto nos dois referenciais podem ser obtidas eliminando-se ou x ou $\bar{x}$ em (1.1) e (1.2) (verifique),

$$\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad c\bar{t} = \gamma(ct - \beta\, x). \tag{2.3}$$

Em (2.3), expressamos as coordenadas do referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em termos das coordenadas do referencial $\mathcal{O}$. As transformações inversas (2.4) são obtidas simplesmente invertendo o sinal de V (e, consequentemente, de $\beta = V/c$ também):

$$x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad ct = \gamma(c\bar{t} + \beta\, \bar{x}). \tag{2.4}$$

Estas transformações foram apresentadas por Einstein em 1905 e são conhecidas por transformações de Lorentz. Lorentz havia usado estas mesmas relações por motivos diferentes dos relacionados aqui e anteriores a 1905. Lorentz acreditava num tempo absoluto e, consequentemente, estas relações eram vistas como mero artifício matemático necessário para explicar os resultados dos experimentos de Michelson-Morley, os quais insistiam em negar a existência de um éter responsável pela propagação de ondas eletromagnéticas. Após tomar conhecimento da interpretação de Einstein unificando espaço e tempo, Lorentz aderiu de imediato a esta nova interpretação, tornando-se inclusive um de seus maiores defensores e divulgadores. A partir de então ninguém mais questionou a necessidade de um meio para a propagação de ondas eletromagnéticas (que propagam mesmo no vácuo).

Como as relações (2.3)–(2.4) misturam as posições espaciais com o tempo (e vice-versa), o tempo não é absoluto, como Galileu e Newton imaginaram (e o resto do mundo). Isto significa que um acontecimento não precisa ser simultâneo em todos os referenciais inerciais. Isto trará consequências ainda mais surpreendentes, como veremos a seguir.

Naturalmente, as transformações (2.3) são idênticas às transformações (1.4) quando $V \ll c$ (ou $\beta \ll 1$). Este é um exemplo onde uma teoria foi devidamente corrigida: para velocidades baixas (comparado à velocidade da luz) podemos usar a mecânica newtoniana; para velocidades altas devemos usar a mecânica relativística. Naturalmente, nossas experiências sensoriais estão imersas no mundo newtoniano.

2.1.1 Dilatação temporal

Suponha um relógio em repouso no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. Permanecendo sempre no mesmo lugar ($\bar{x}_1 = \bar{x}_2$), marque um determinado intervalo de tempo, $\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$, usando este mesmo relógio. Este intervalo de tempo medido com o relógio em repouso será denominado de tempo próprio. No outro referencial $\mathcal{O}$, aquele relógio usado para medir o tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$ será visto em movimento. Portanto os dois eventos que determinaram o intervalo de tempo $\bar{T}$ serão vistos no referencial $\mathcal{O}$ nos instantes t_1 e t_2 (em posições diferentes), correspondendo a um intervalo $T = t_2 - t_1$. Usando as transformações (2.4) em T, encontraremos (verifique)

$$T = \gamma\,\bar{T}. \tag{2.5}$$

Esta relação nos mostra que $T > \bar{T}$, ou seja, que o intervalo de tempo T medido (calculado) no referencial $\mathcal{O}$ é maior que o intervalo de tempo $\bar{T}$ medido no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. Isto significa que o relógio no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em movimento é visto como mais lento: o tempo passa mais devagar no referencial em movimento. Este efeito é conhecido por dilatação temporal.

Os observadores solidários ao referencial $\bar{\mathcal{O}}$ chegarão à mesma conclusão a respeito de um relógio usado para medir um tempo próprio em $\mathcal{O}$. Há nenhuma contradição nisto. O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inercias distintos irão medir intervalos de tempo maiores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

Esta previsão, a dilatação temporal, é confirmada em experimentos usando partículas elementares em aceleradores de partículas (para saber mais sobre partículas elementares, consulte Aventuras das Partículas, mantido pelo Instituto de Física Teórica (IFT), Unesp). Em particular, visite o site Experimento com Múons.

2.1.2 Contração espacial

Suponha uma régua em repouso no referencial $\bar{\mathcal{O}}$, de comprimento $\bar{L} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$. Este é o comprimento próprio (régua em repouso). Uma vez que a régua está em repouso, a medida das posições $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ das extremidades podem ser efetuadas em tempos diferentes. No outro referencial $\mathcal{O}$, esta régua será vista em movimento, por isto a leitura de suas extremidades deverão ser efetuadas no mesmo instante de tempo ($t_1 = t_2$). Assim, o comprimento da régua medido em $\mathcal{O}$ será $L = x_2(t) - x_1(t)$. Usando as transformações (2.3) em $\bar{L}$, encontraremos (verifique)

$$L = \frac{\bar{L}}{\gamma}. \tag{2.6}$$

Esta relação nos mostra que $L < \bar{L}$, pois $\gamma > 1$. Portanto, a régua no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em movimento será vista com um comprimento menor no outro referencial $\mathcal{O}$. Este resultado é conhecido por contração espacial.

Os observadores solidários ao referencial $\bar{\mathcal{O}}$ chegarão à mesma conclusão a respeito de uma régua usada para medir um comprimento próprio em $\mathcal{O}$. Novamente, há nenhuma contradição nisto. O comprimento próprio será sempre o maior comprimento e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inercias distintos irão medir comprimentos menores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

Vamos resumir e reescrever estes dois importantíssimos resultados numa forma simétrica. Suponha que o relógio e a régua em movimento estejam no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. No referencial $\mathcal{O}$, vemos o intervalo de tempo $\bar{T}$ e o comprimento $\bar{L}$ como

$$T = \gamma \bar{T} \implies T \geq \bar{T}, \tag{2.7a}$$
$$L = \gamma^{-1} \bar{L} \implies L \leq \bar{L}. \tag{2.7b}$$

Caso o relógio e a régua em movimento estejam no referencial $\mathcal{O}$, então estas medidas serão vistas em $\bar{\mathcal{O}}$ como

$$\bar{T} = \gamma T \implies \bar{T} \geq T, \tag{2.8a}$$
$$\bar{L} = \gamma^{-1} L \implies \bar{L} \leq L. \tag{2.8b}$$

A medida de intervalo de tempo merece um comentário adicional: com um intervalo de tempo menor (maior) se vive mais (menos). Se o tempo não existisse, intervalo nulo, viveríamos eternamente. Dando ao intervalo de tempo uma interpretação antropomórfica, onde a longevidade é inversamente proporcional ao intervalo de tempo, podemos estabelecer uma regra única para as medidas de longevidade e comprimento: a medida própria, feita num referencial em movimento, sempre será vista com um valor menor no outro referencial.

2.1.3 Exercícios

Exercício 1. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por "verifique".*

2.2 Espaço minkowskiano

2.2.1 Métrica

Imagine um espaço quadridimensional onde um ponto (evento) é localizado pelas coordenadas

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \tag{2.9}$$

e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \tag{2.10}$$

onde $x^0 = ct$. A métrica $g_{\mu\nu}$ tem os seguintes elementos não-nulos (diagonal):

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1. \tag{2.11}$$

Um espaço deste tipo é denominado de espaço de Minkowski.

Neste espaço, as coordenadas x^μ de um evento são denominadas de contra-variantes e as coordenadas

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{2.12}$$

são denominadas de co-variantes. Note a presença implícita de um somatório na última igualdade em (2.10) e também em (2.12). O sinal de somatório será omitido sempre que tivermos dois índices, um contra e outro co-variante, numa mesma expressão (convenção de Einstein). A métrica (2.11) deve ser usada para comutarmos entre índices contra e co-variantes (diz-se da subida e descida de índices).

A métrica (2.11) deve ser usada também para alterar seus próprios índices:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \; g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \; g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu, \tag{2.13}$$

onde δ^ν_μ é o delta de Kronecker,

$$\delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = \mu, \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{2.14}$$

Em geral, objetos com dois índices, como a métrica (2.11), podem ser vistos como matrizes. O índice na esquerda será o índice das linhas e o índice na direita será o índice das colunas, independentemente se os índices são contra ou co-variantes.

A distância infinitesimal (2.10) permite classificar eventos separados por esta distância em três tipos:

1. Tipo tempo: $ds^2 > 0$.

2. Tipo luz: $ds^2 = 0$.

3. Tipo espaço: $ds^2 < 0$.

2.2.2 Rotações

As transformações de Lorentz (2.3)–(2.4) deixam a distância infinitesimal (2.10) invariante. Portanto estas transformações devem representar algum tipo de rotação. Antes porém, vamos reescrevê-las numa notação covariante:

$$x^0 = \gamma \bar{x}^0 + \beta\gamma \bar{x}^1, \; x^1 = \beta\gamma \bar{x}^0 + \gamma \bar{x}^1, x^2 = \bar{x}^2, \; x^3 = \bar{x}^3. \tag{2.15}$$

Por ser uma transformação linear entre coordenadas, melhor expresá-la na forma matricial

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Fisicamente, a transformação inversa é dada pela troca $\beta \to -\beta$ aplicada à matriz (2.16). Qual será a forma covariante da matriz representando esta transformação inversa? Por inspeção, encontramos

$$(\Lambda_\mu{}^\nu) = (g_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Esta matriz é a inversa daquela apresentada em (2.16). Porém, para escrevermos o produto matricial entre elas numa forma covariante, precisaremos do transposto de (2.17). Assim, a matriz da transformação inversa é

$$(\Lambda^{-1\mu}{}_\nu) = (\Lambda_\nu{}^\mu)^T = (g_{\nu\alpha}\Lambda^{T\alpha}{}_\beta g^{\beta\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

ou, removendo os índices,

$$\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g. \tag{2.19}$$

Note a semelhança (e a diferença) desta relação com uma matriz ortogonal R (representando uma rotação no espaço euclidiano), $R^{-1} = R^T = g^{-1}R^T g$ (g é a identidade no espaço euclidiano). Note também que a inversa é calculada usando uma conjugação (transformação de similaridade), um dos procedimentos mais úteis em matemática. A conjugação é equivalente a levarmos um eletrodoméstico para ser consertado numa oficina e depois o retornarmos para casa (analogia feita pelo Prof. Antônio Conde).

A transformação linear (2.16) representa uma "rotação" no plano $ct - x$, onde

$$\gamma = \cosh\psi,\ \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \cosh^2\psi - \operatorname{senh}^2\psi = 1, \tanh\psi = \beta. \tag{2.20}$$

Novamente, esta rotação no espaço de Minkowski, realizada por funções trigonométricas (ou circulares), lembra uma rotação no espaço euclidiano, realizadas por funções hiperbólicas.

A semelhança (ou diferença) entre as funções circulares e hiperbólicas impressionam. As funções circulares representam um círculo unitário,

$$x^2 + y^2 = 1,\ x = \cos\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta, \tag{2.21}$$

onde o ângulo θ é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição (x, y), o eixo X (referência) e o arco circular compreendido. As funções hiperbólicas representam uma hipérbole unitária,

$$x^2 - y^2 = 1,\ x = \cosh\psi,\ y = \operatorname{senh}\psi, \tag{2.22}$$

com

$$\cosh\psi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\psi} + \mathrm{e}^{-\psi}),\ \operatorname{senh}\psi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{e}^{-\psi}), \tag{2.23}$$

onde o ângulo ψ é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição (x, y), o eixo X (referência) e o arco hiperbólico compreendido. Desta semelhança podemos perceber o quão diferentes são estes dois espaços.

2.2.3 Composição

Suponha a existência de três referenciais inerciais, A, B, C, com eixos alinhados e coincidentes em algum instante inicial. O referencial A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o referencial B tem uma velocidade relativa a C dada por U. Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V? Em outras palavras, a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz, $A \stackrel{\Psi}{\to} B$ e $B \stackrel{\Phi}{\to} C$, é também uma transformação de Lorentz, $A \stackrel{\Omega}{\to} C$?

Esta situação é melhor analisada em termos dos ângulos de rotação

$$\tanh\psi = \frac{V}{c},\ \tanh\phi = \frac{U}{c},\ \tanh\omega = \frac{W}{c}, \tag{2.24}$$

associados a cada uma desta transformações. Assim, os elementos da matriz resultante da aplicação sucessiva das transformações de Lorentz $A \stackrel{\Psi}{\to} B$ e $B \stackrel{\Phi}{\to} C$ são

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu}(\omega) = \Psi^{\mu}{}_{\alpha}(\psi)\Phi^{\alpha}{}_{\nu}(\phi), \tag{2.25}$$

onde

$$(\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \omega = \psi + \phi. \tag{2.26}$$

Da lei de composição $\omega(\psi, \phi) = \psi + \phi$ em (2.26),

$$\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \frac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}, \tag{2.27}$$

obtemos uma relação entre as velocidades relativas correspontes,

$$W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}. \tag{2.28}$$

Esta é a lei de composição de velocidades relativísticas (todas na mesma direção). Quando as velocidades relativas são pequenas, recuperamos a lei de composição newtoniana $(U + V)$. Note que mesmo impondo $U = V = c$, conseguimos apenas $W = c$. Isto mostra que a velocidade da luz é um invariante, uma constante universal, independente do movimento de sua fonte. Mostra também que não conseguimos produzir uma velocidade superior à da luz. A velocidade da luz é um limite superior para velocidades (espero que não seja definitivo).

O resultado em (2.26) mostra que a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz é também uma transformação de Lorentz; ou seja, as transformações de Lorentz formam um grupo (já verificamos a existência da identidade, $\omega = 0$, e da inversa, $-\omega$). Neste caso particular, onde alinhamos os eixos dos referenciais, este grupo é abeliano (comutativo). Além disso, como a função $\omega(\psi, \phi) = \psi + \phi$ em (2.26) é analítica, então trata-se de um grupo de Lie. Este grupo é não-compacto, pois os ângulos hiperbólicos ψ, ϕ, ... não estão limitados superiormente. Compare este cenário com aquele das rotações em torno de um eixo (fixo): elas formam também um grupo de Lie, porém compacto, pois o ânglo θ pode ser limitado ao intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2.2.4 Exercícios

Exercício 2. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por "verifique".*

2.3 Cinemática

2.3.1 Taxas

Neste espaço da relatividade especial, o espaçotempo de Minkowski, o tempo junta-se às demais coordenadas espaciais e perde o status de absoluto. Se na mecânica newtoniana o tempo absoluto é o parâmetro natural da representação paramétrica de uma trajetória, na mecânica relativística esse parâmetro natural é o próprio comprimento s da trajetória. O comprimento de um trecho infinitesimal é dado por (2.10),

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2, \tag{2.29}$$

onde $v = \|\vec{v}\|$ é o módulo (rapidez) do vetor velocidade (tridimensional),

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.30}$$

e (verifique a taxa de variação de γ)

$$\gamma_v \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d\gamma_v}{dt} = \gamma_v^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}. \tag{2.31}$$

Embora esse corpo possa estar acelerado, podemos associar a ele um referencial inercial a cada instante, sendo $\vec{v}$ a sua velocidade relativa. O cenário é a observação do movimento de um objeto em um referencial $\mathcal{O}$. Um segundo referencial $\mathcal{O}'$ está solidário ao objeto, o qual possui a velocidade (espacial) $\vec{v}$. Esse referencial do objeto muda a cada instante, a não ser que o movimento desse objeto seja uniforme.

No espaçotempo de Minkowski, taxas de variação em relação ao comprimento infinitesimal

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} \tag{2.32}$$

definem quadrivelocidade (ou 4-velocidade) e quadriaceleração (ou 4-aceleração),

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}, \tag{2.33}$$

respectivamente, cujas componentes são (verifique)

$$(u^\mu) = \gamma_v \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right), \tag{2.34}$$

$$(w^\mu) = \gamma_v^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma_v^2\left(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\right) = \dot{\gamma}_v\left(\frac{u^\mu}{c}\right) + \gamma_v^2\left(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\right). \tag{2.35}$$

Esses dois 4-vetores possuem algumas propriedades interessantes e nada intuitivas. A 4-velocidade é adimensional e unitária (verifique):

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\alpha dx_\alpha}{ds^2} = 1. \tag{2.36}$$

A 4-aceleração tem dimensão de inverso de comprimento, é ortogonal à 4-velocidade (verifique),

$$u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \frac{du_\alpha}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0, \tag{2.37}$$

Essa ortogonalidade fornece (verifique), novamente, a taxa de variação temporal do fator γ_v dada em (2.31). O módulo da quadriaceleração é (verifique)

$$w^\alpha w_\alpha = -\frac{\gamma_v^4}{c^4}\left[a^2 + \frac{\gamma_v^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\right]. \tag{2.38}$$

Como será vista no referencial $\mathcal{O}$ a velocidade de um determinado corpo movendo-se com velocidade $\bar{v}_{\bar{x}} = d\bar{x}/d\bar{t}$ no referencial $\bar{\mathcal{O}}$, este movendo-se com velocidade constante V em relação a $\mathcal{O}$? Vejamos. O movimento relativo é ao longo do eixo X. A componente x da velocidade deste corpo em $\mathcal{O}$ é definida como $v_x = dx/dt$, ou seja, a razão entre as diferenciais dx e dt. Então, usando as transformações (2.3)–(2.4), temos (verifique)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + V\,d\bar{t}}{d\bar{t} + \dfrac{V}{c^2}\,d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \dfrac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}. \tag{2.39}$$

Fazendo o mesmo para as demais componentes, temos (verifique)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma_V\left(1 + \dfrac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \tag{2.40}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma_V\left(1 + \dfrac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \tag{2.41}$$

onde $\gamma_V = \gamma(V)$ é a função dada em (2.31) com v substituído por V. Note que $\bar{v}_{\bar{x}} = c$

implica em $v_x = c$. Note também que a regra de adição de velocidades (2.39) é a mesma encontrada em (2.28). A regra relativística de composição de velocidades (2.39)–(2.41) nunca fornece uma velocidade relativa maior que a velocidade da luz. Note também que as duas componentes perpendiculares à direção do movimento relativo (eixo X), v_y e v_z, sofrem uma contração pelo fator γ_V, diferentemente da componente v_x.

2.3.2 Queda livre

Uma situação interessante, análoga ao movimento "queda livre" no cenário newtoniano, é o movimento relativístico de um corpo sujeito a uma aceleração constante. No referencial do corpo, a sua velocidade (espacial) é nula. Portanto, de (2.35) sua 4-aceleração será $(\bar{w}^\mu) = (0, \vec{g}/c^2)$, cujo módulo é $\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -g^2/c^4$. Suponha também que g seja constante (o equivalente de uma queda livre). Como o módulo de um 4-vetor é um invariante, então o módulo da 4-aceleração em (2.38) deve ser igual a $-g^2/c^4$. Sendo g constante, podemos alinhar os vetores espaciais velocidade e aceleração, $(\vec{v} \cdot \vec{a})^2 = (va)^2$ e $a = \dot{v}$, onde $\dot{v}$ significa uma derivada temporal. Neste caso, a expressão do lado direito em (2.38) simplifica para (verifique)

$$w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3}{c^2}\dot{v}\right)^2 = \bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\left(\frac{g}{c^2}\right)^2, \tag{2.42}$$

onde impusemos também que este módulo é uma constante e invariante. Disto resulta a EDO

$$\frac{\dot{v}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g, \tag{2.43}$$

cuja solução é (verifique)

$$\gamma(v)\, v = gt, \;\; v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \tag{2.44}$$

onde impusemos $v(0) = 0$ como condição inicial. No regime não-relativístico, $gt/c \ll 1$, recuperamos uma velocidade linear no tempo, $v = gt$, e, se formos suficientemente pacientes, poderemos ter $v > c$. No regime relativístico, mesmo tendo um tempo de vida tendendo ao infinito, o máximo que consiguiremos é $v \to c$ (verifique), mostrando que mesmo num movimento acelerado (aceleração constante), não conseguimos ultrapassar a velocidade da luz. A velocidade da luz aparece aqui como uma velocidade terminal, característica de objetos em queda livre na presença de uma atmosfera.

Para esse caso unidimensional, $v = \dot{r}$, onde r é a distância radial (ao longo do eixo X, por exemplo). Assim podemos integrar $v(t)$ em (2.44) para obter como a posição varia com o tempo (verifique):

$$r(t) = \int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\Big(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\Big). \tag{2.45}$$

Note que esta expressão tem ct como assímptota; é como se a aceleração desaparecesse depois de um tempo longo, como ocorre no movimento de objetos em queda livre na presença de uma atmosfera. Isto é condizente com o fato da velocidade (2.44) ter c como assímptota. Resta calcular o tempo próprio deste objeto sujeito a esta aceleração constante g. Supondo que o objeto esteja na origem de seu próprio referencial, então da invariância do intervalo (2.10), reescrito na forma (2.29),

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} = cd\tau, \tag{2.46}$$

podemos calcular o tempo próprio τ do objeto (verifique),

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{c}{g}\,\mathrm{senh}^{-1}\big(\frac{gt}{c}\big). \tag{2.47}$$

Esta expressão deve ser comparada com t, o tempo no nosso referencial. Em particular, após um tempo t longo, o tempo próprio tem $(c/g)\ln(2gt/c)$ como assímptota, mostrando que o tempo próprio τ transcorre de forma mais lenta que o nosso tempo t.

2.3.3 Exercícios

Exercício 3. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por "verifique".*

2.4 Dinâmica

2.4.1 Quadrimomentum

Podemos usar a 4-velocidade em (2.34) para definir o 4-momentum linear

$$p^\mu = mcu^\mu,\ p^\mu p_\mu = m^2c^2, \tag{2.48}$$

onde m é a massa do objeto. Note que esse 4-vetor tem as dimensões de momentum linear. É muito interessante observar sua componente temporal, $p^0 = mc\gamma_v$, multiplicada pela velocidade da luz (que produz uma quantidade com dimensão de energia), para velocidades não-relativísticas (verifique),

$$cp^0 = \gamma_v mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{2.49}$$

O primeiro termo mc^2 é denominado de energia de repouso. O segundo termo é a energia cinética newtoniana. Por isso, a quantidade

$$\mathcal{E} = \gamma_v mc^2 \tag{2.50}$$

é denominada de energia (cinética) relativística. Ela é não-nula mesmo na ausência de movimento, resultando na energia de repouso $\mathcal{E} = mc^2$, a qual depende diretamente da massa inercial do objeto. Massa e energia são manifestações de uma mesma quantidade. Massa e energia estão unificadas na Relatividade Especial. Sabemos hoje que podemos transformar uma na outra. Um exemplo dessa transformação é a energia liberada na quebra (junção) de átomos grandes (pequenos), um processo conhecido por fissão (fusão) nuclear.

O 4-momentum linear (2.48) pode ser reescrito em termos da energia e do momentum linear relativísticos,

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\big), \ \vec{p} = \gamma_v m\vec{v}, \tag{2.51}$$

cuja intensidade

$$p^\mu p_\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \tag{2.52}$$

e denominada de relação de dispersão relativística. Por inspeção das definições de energia (2.50) e momentum linear (2.51) relativísticos, encontramos

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}. \tag{2.53}$$

Esta relação não menciona a massa m diretamente e nos diz que um objeto com rapidez $\|\vec{v}\| = c$ tem momentum $p = \mathcal{E}/c$, que é a componente temporal do 4-momentum em (2.51). Esta é a relação de dispersão adequada para objetos que possuem massa nula, como o fóton (e neutrinos).

2.4.2 Quadriforça

É possível construir uma versão relativística de segunda lei de Newton, onde a taxa de variação do quadrimomentum linear,

$$F^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{ds} = mcw^\mu, \tag{2.54}$$

se iguala à quadriaceleração com a massa m constante. Note as dimenões de massa por tempo desse quadrivetor "força". Aqui, o quadrivetor "força" é um nome para a taxa de variação do quadrimomentum linear. Para (2.54) se tornar uma lei, o lado esquerdo precisa ser determinado independentemente e, naturalmente, dar uma descrição correta.

Para massa constante, os quadrivetores força e momentum linear (ou quadrivelocidade) são ortogonais (verifique),

$$p_\alpha F^\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = 0. \tag{2.55}$$

Podemos usar as componentes do quadrivetor momentum linear dadas em (2.51) e da quadriaceleração, dadas em (2.35), bem como a energia relativística definida em (2.50), para escrevermos as componentes do quadrivetor "força" (verifique),

$$c(F^\mu) = \gamma_v \left(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\right), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \ \vec{p} = \gamma_v m\vec{v}. \tag{2.56}$$

Note que o lado esquerdo tem as mesmas dimensões de força, massa vezes aceleração. No lado direito, a taxa temporal da energia é potência, força vezes velocidade. Assim, a componente temporal do quadrivetor no lado direito também tem as dimensões de força.

Usando a representação (2.34) para a quadrivelocidade e (2.56) para a quadriforça, a relação de ortogonalidade (2.55) ou, equivalentemente, $u_\mu F^\mu = 0$, temos (verifique)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{2.57}$$

a qual é a potência cinética (taxa de variação da energia cinética) na mecânica newtoniana.

2.4.3 Princípio

Princípio 2 (Relatividade de Einstein)**.** *O princípio da relatividade de Galileu-Newton agora deve ser enunciado na seguinte forma:*

1. *Todas as leis físicas são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência;*
2. *A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os sistemas inerciais.*

Este princípio é conhecido como o "princípio da relatividade de Einstein". Note que ele é mais geral que o princípio da relatividade de Galileu-Newton (Princípio 1), pois agora todas as leis físicas foram devidamente incluídas.

2.4.4 Exercícios

Exercício 4. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por "verifique".*

Capítulo 3

Leis de transformação

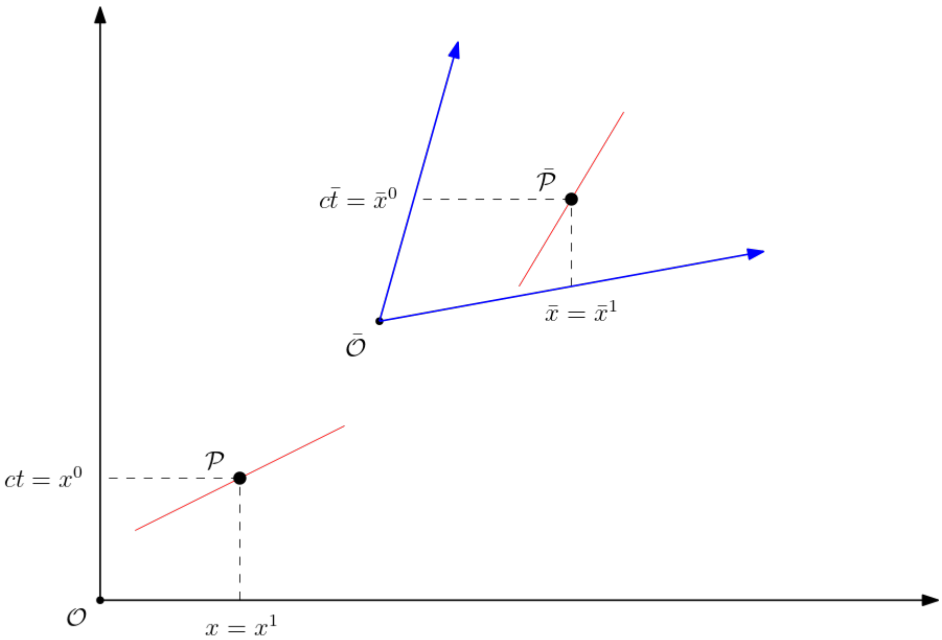

Figura 3.1: Dois referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ com um objeto em movimento visto em ambos.

É útil ter uma quadro exibindo as leis de transformação de quadriposição, quadrivelocidade e quadriforça (um nome para a taxa de variação do quadrimomentum linear). Em todos os casos teremos dois referenciais inerciais, $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$, em movimento relativo uniforme com uma rapidez V. Em cada um destes dois referenciais temos um referencial solidário (próprio) ao objeto em movimento, como mostrado na Figura 3.1. Seja $\mathcal{P}$ o referencial próprio no referencial $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{P}}$ o referencial próprio no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. Esses referenciais próprios são considerados inerciais apenas num determinado instante de tempo. Seja $\vec{v}$ a velocidade instantânea do referencial $\mathcal{P}$ em relação ao referencial $\mathcal{O}$. De forma similar, seja $\vec{\bar{v}}$ a velocidade instantânea do referencial $\bar{\mathcal{P}}$ em relação ao referencial $\bar{\mathcal{O}}$.

A Figura 3.1 exibe os planos ct–x e $c\bar{t}$–$\bar{x}$ dos referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ e os respectivos referenciais instantâneos $\mathcal{P}$ e $\bar{\mathcal{P}}$ do objeto em movimento. Há somente um objeto em movimento, visto em dois referenciais inerciais. Como exemplo, considere o sistema formado por um fio condutor e uma carga teste em sua vizinhança. A carga teste é o objeto em movimento, relativo ao fio conduzindo uma corrente elétrica (em movimento uniforme). O referencial $\mathcal{O}$ é solidário ao fio condutor e o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ é solidário aos elétrons na corrente elétrica, $\bar{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{P}}$. Um terceiro referencial, $\mathcal{P}$, é solidário à carga teste.

Por comodidade, consideraremos os referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ alinhados, com um movimento espacial relativo ao longo do eixo X, de tal forma a termos uma rotação no plano ct–x apenas, como mostrado na Figura 3.1. No referencial $\mathcal{O}$, o vetor velocidade relativa (constante) pode ser escrito como $\vec{V} = V\,\hat{\imath}$. Denotaremos por $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ o vetor posição do objeto em movimento no referencial $\mathcal{O}$ e por $\bar{\vec{r}}$ no referencial $\bar{\mathcal{O}}$.

O fator γ_u é uma função da rapidez relativa u entre quaisquer dois referenciais inerciais,

$$\gamma_u \equiv \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}, \quad \beta_u \equiv \beta(u) = \frac{u}{c}. \tag{3.1}$$

3.1 Quadriposição

1. Quadrivetores nos referenciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$:

$$(x^\mu) = (ct, \vec{r}), \quad (\bar{x}^\mu) = (c\bar{t}, \bar{\vec{r}}). \tag{3.2}$$

2. Rotação no plano x^0–x^1:

$$x^0 = \gamma_{_V}(\beta_{_V}\,\bar{x}^1 + \bar{x}^0),\ x^1 = \gamma_{_V}(\bar{x}^1 + \beta_{_V}\,\bar{x}^0),\ x^2 = \bar{x}^2,\ x^3 = \bar{x}^3. \tag{3.3}$$

3. Transformações de Lorentz:

$$ct = \gamma_{_V}(\beta_{_V}\,\bar{x} + c\bar{t}),\ x = \gamma_{_V}(\bar{x} + \beta_{_V}\,c\bar{t}),\ y = \bar{y},\ z = \bar{z}. \tag{3.4}$$

4. Regra: apenas as componentes espaciais perpendiculares à direção do movimento relativo entre os referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ **não são** afetadas pelo fator $\gamma_{_V}$.

3.2 Quadrivelocidade

1. Quadrivetores nos referenciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$:

$$(u^\mu) = \gamma_v \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right), \quad (\bar{u}^\mu) = \gamma_{\bar{v}} \left(1, \frac{\vec{\bar{v}}}{c}\right). \tag{3.5}$$

2. Rotação no plano u^0–u^1:

   - $u^0 = \gamma_V \left(\bar{u}^0 + \beta_V \bar{u}^1\right) \implies \gamma_v = \gamma_V \gamma_{\bar{v}} \left(1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)$
     - Use $u^0 = \gamma_v$, $\bar{u}^0 = \gamma_{\bar{v}}$ e $\beta_V = V/c$.
   - $u^1 = \gamma_V \left(\beta_V \bar{u}^0 + \bar{u}^1\right) \implies \gamma_v v_x = \gamma_V \gamma_{\bar{v}} \left(V + \bar{v}_{\bar{x}}\right)$
     - Use o resultado anterior para eliminar $\gamma_V \gamma_{\bar{v}}$.
   - $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma_v v_y = \gamma_{\bar{v}} \bar{v}_{\bar{y}}$
     - Elimine $\gamma_{\bar{v}}$ usando o primeiro resultado.
   - $u^3 = \bar{u}^3 \implies \gamma_v v_z = \gamma_{\bar{v}} \bar{v}_{\bar{z}}$
     - Elimine $\gamma_{\bar{v}}$ usando o primeiro resultado.

3. Transformações:

$$\gamma_v = \gamma_V \gamma_{\bar{v}} \left(1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right), \tag{3.6}$$

   e

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}/\gamma_V}{1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}/\gamma_V}{1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}. \tag{3.7}$$

4. Regra: apenas as componentes espaciais perpendiculares à direção do movimento relativo entre os referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ **são** afetadas pelo fator γ_V.

3.3 Quadriforça

Quadriforça cF^μ é um nome para a taxa de variação do quadrimomentum linear, $F^\mu = dp^\mu/ds$. A parte espacial contém a segunda lei de Newton na forma relativística, $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, com $\vec{p} = \gamma_v m\vec{v}$.

1. Quadrivetores nos referenciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$:

$$(cF^\mu) = \gamma_v \left(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\right), \quad (c\bar{F}^\mu) = \gamma_{\bar{v}} \left(\frac{\dot{\bar{\mathcal{E}}}}{c}, \vec{\bar{F}}\right). \tag{3.8}$$

2. Rotação no plano F^0–F^1:

   - $F^0 = \gamma_V \left(\bar{F}^0 + \beta_V \bar{F}^1\right) \implies \gamma_v \dot{\mathcal{E}} = \gamma_V \gamma_{\bar{v}} \left(\dot{\bar{\mathcal{E}}} + V \bar{F}_{\bar{x}}\right)$
     - Use (3.6) para eliminar o termo $\gamma_V \gamma_{\bar{v}}$.
   - $F^1 = \gamma_V \left(\beta_V \bar{F}^0 + \bar{F}^1\right) \implies \gamma_v F_x = \gamma_V \gamma_{\bar{v}} \left(\dfrac{V \dot{\bar{\mathcal{E}}}}{c^2} + \bar{F}_{\bar{x}}\right)$
     - Use (3.6) para eliminar o termo $\gamma_V \gamma_{\bar{v}}$.
   - $F^2 = \bar{F}^2 \implies \gamma_v F_y = \gamma_{\bar{v}} \bar{F}_{\bar{y}}$
     - Use (3.6) para eliminar o termo $\gamma_{\bar{v}}$.
   - $F^3 = \bar{F}^3 \implies \gamma_v F_z = \gamma_{\bar{v}} \bar{F}_{\bar{z}}$
     - Use (3.6) para eliminar o termo $\gamma_{\bar{v}}$.

3. Transformações:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\dot{\bar{\mathcal{E}}} + V \bar{F}_{\bar{x}}}{1 + \dfrac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \tag{3.9}$$

   e

$$F_x = \frac{\bar{F}_{\bar{x}} + \frac{V \dot{\bar{\mathcal{E}}}}{c^2}}{1 + \dfrac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad F_y = \frac{\bar{F}_{\bar{y}}/\gamma_V}{1 + \dfrac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad F_z = \frac{\bar{F}_{\bar{z}}/\gamma_V}{1 + \dfrac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}. \tag{3.10}$$

4. Regra: apenas as componentes espaciais perpendiculares à direção do movimento relativo entre os referenciais inerciais $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ **são** afetadas pelo fator γ_V.