

Killing: um pacote de computação algébrica para a teoria de representação das álgebras de Lie

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

22 de abril de 2021

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

1	Introdução	1
2	Álgebras de Lie	2
2.1	Introito	2
2.2	Definições	2
2.2.1	Álgebra linear	2
2.2.2	Álgebra de Lie	3
2.3	Propriedades	4
2.3.1	Ideal	4
2.3.2	Solúvel	4
2.3.3	Radical	4
2.3.4	Semissimples	4
2.3.5	Simple	4
2.3.6	Exemplos	4
2.4	Estrutura	5
2.4.1	Constantes de estrutura	5
2.4.2	Geradores	6
2.4.3	Nomenclatura	7
3	Representações	8
3.1	Introito	8
3.2	Adjunta	9
3.3	Raízes	10
3.3.1	Cartan-Weyl	10
3.3.2	Chevalley	11
3.3.3	Propriedades	12
3.3.4	Dynkin	13
3.3.5	Exemplos	14
3.3.5.1	A_3	14
3.3.5.2	C_3	15
3.4	Pesos	17
3.4.1	Regras de seleção	18

3.4.2	Irreps básicas 2D	18
3.4.2.1	A_2	18
3.4.2.2	B_2	20
3.4.2.3	C_2	20
3.4.3	Irreps básicas 3D	23
3.4.3.1	A_3	23
3.4.3.2	B_3	25
3.4.3.3	C_3	25
3.4.3.4	D_3	26

Capítulo 1

Introdução

Capítulo 2

Álgebras de Lie

2.1 Introito

Em um trabalho fenomenal, [Évariste Galois](#) descobriu os grupos finitos por volta de 1830. Inspirado por Galois, [Sophus Lie](#) e [Wilhelm Killing](#) descobriram, independentemente, os grupos de Lie (e suas álgebras) na virada do Séc. 19. Coube a [Felix Klein](#) (veja também [PKM](#)) o primeiro contato entre Lie e Killing. Killing deu contribuições importantes para a classificação das álgebras de Lie. Após os esforços de Lie, Killing e Klein, o estado de arte na classificação das álgebras de Lie foi elaborado por [Élie Cartan](#) ainda no final do Séc. 19.

A descoberta básica de Lie e Killing é que um grupo de Lie, contínuo, com infinitos elementos, é gerado por uma álgebra, finita. O grupo é a exponencial da álgebra. Naturalmente, as álgebras de Lie tomam o foco na classificação dos grupos de Lie. A seguir, depois de uma breve apresentação da estrutura das álgebras de Lie, diversas propriedades sobre a teoria de representação delas são apresentadas e implementadas via computação algébrica (ou simbólica). O conjunto destas rotinas algébricas foi denominado de “Killing”, em homenagem a W. Killing (bem como Lie e Cartan).

2.2 Definições

2.2.1 Álgebra linear

Uma [álgebra](#) é um espaço vetorial com uma operação binária interna. Por ser um espaço vetorial, podemos realizar combinações lineares entre seus elementos. Usaremos combinações lineares com coeficientes reais, embora seja conveniente, em ocasiões especiais, também usar coeficientes complexos. A operação binária interna significa que o resultado da combinação entre dois elementos da álgebra será também um elemento desta álgebra. Em geral, dada uma álgebra \mathcal{L} podemos escrever a operação binária interna na forma

$$(A, B) \in \mathcal{L}, \tag{2.1}$$

onde A e B são elementos da álgebra \mathcal{L} . A forma específica da operação binária, embora livre para ser criada, surge naturalmente em algum contexto específico. Importante ressaltar que uma álgebra contém apenas seus elementos e combinações lineares dos mesmos. Uma álgebra não contém, por exemplo, polinômios de seus elementos. A **dimensão** de uma álgebra é a quantidade de seus elementos.

Uma álgebra \mathcal{L} é dita **abeliana** quando seus elementos satisfizerem

$$(A, B) = (B, A). \quad (2.2)$$

Uma álgebra \mathcal{L} é dita **linear** quando seus elementos satisfizerem

$$(A, B + \alpha C) = (A, B) + \alpha(A, C), \quad (2.3a)$$

$$(A + \alpha B, C) = (A, C) + \alpha(B, C), \quad A, B, C \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.3b)$$

Uma álgebra \mathcal{L} é dita **associativa** quando seus elementos satisfizerem

$$((A, B), C) = (A, (B, C)). \quad (2.4)$$

2.2.2 Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie \mathcal{L} é uma álgebra linear com a operação binária dada por

$$(A, B) \rightarrow [A, B] \equiv AB - BA, \quad A, B \in \mathcal{L}, \quad (2.5)$$

satisfazendo a **identidade de Jacobi**,

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0, \quad A, B, C \in \mathcal{L}. \quad (2.6)$$

A operação binária (A, B) numa álgebra de Lie é dada pelo comutador $[A, B] = AB - BA$, denominado de **produto de Lie**. Em geral, os elementos de uma álgebra de Lie serão operadores (diferenciais) ou matrizes. Assim, o “produto” AB poderá representar uma composição entre dois operadores ou um produto matricial. Desta forma, dificilmente o produto de Lie será nulo. Naturalmente, o produto de Lie é anti-simétrico: $[A, B] = -[B, A]$. A identidade de Jacobi, quando escrita noutra forma, exhibe a mesma propriedade da derivada de um produto,

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]. \quad (2.7)$$

Note que a identidade de Jacobi impede que uma álgebra de Lie seja associativa. O produto de Lie e a identidade de Jacobi são imposições inerentes ao contexto dos grupos de Lie.

2.3 Propriedades

Uma álgebra pode conter subálgebras. Cada subálgebra precisa ter o mesmo produto de Lie da álgebra maior. A estrutura de uma determinada álgebra de Lie é construída por blocos fundamentais, denominados de álgebras simples ou semissimples cuja a teoria de representação é bem conhecida. Esses blocos fundamentais são evidenciados por subálgebras.

2.3.1 Ideal

Um ideal é uma subálgebra invariante. Os produtos de Lie entre os elementos de um ideal \mathcal{I} e aqueles da álgebra maior \mathcal{L} estão contidos inteiramente no ideal:

$$[\mathcal{L}, \mathcal{I}] \subset \mathcal{I}. \quad (2.8)$$

2.3.2 Solúvel

Alguns produtos de Lie podem ser nulos numa determinada álgebra \mathcal{L} . Seja $\mathcal{L}^{(1)}$ o conjunto de todos os elementos não-nulos resultantes de todos os produtos de Lie em \mathcal{L} . Simbolicamente: $\mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$. Considere a sequência

$$\mathcal{L}^{(n)} = [\mathcal{L}^{(n-1)}, \mathcal{L}^{(n-1)}], \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

A álgebra \mathcal{L} é solúvel (solvable) se existir um n tal que $\mathcal{L}^{(n)} = \emptyset$.

2.3.3 Radical

Um radical é o ideal solúvel de maior dimensão.

2.3.4 Semissimples

Uma álgebra de Lie é semissimples quando não possui um radical.

2.3.5 Simples

Uma álgebra de Lie é simples quando não possui um ideal.

2.3.6 Exemplos

Exemplo 1. A álgebra euclidiana $\mathcal{E}_2 = \{J_z, P_+, P_-\}$ em duas dimensões possui dois geradores P_\pm das translações no plano e um gerador J_z das rotações em torno do eixo perpendicular ao plano das translações. As translações comutam, mas não comutam com a rotação,

$$[J_z, P_\pm] = \pm P_\pm, \quad [P_+, P_-] = 0. \quad (2.10)$$

Claramente $\mathcal{L}^{(1)} = \{P_+, P_-\}$ é o ideal de \mathcal{E}_2 . Portanto ela não é simples. Como $\mathcal{L}^{(2)} = \emptyset$, a álgebra de Lie \mathcal{E}_2 é solúvel. Portanto ela não é semissimples. O radical é $\mathcal{L}^{(1)}$.

Exemplo 2. A álgebra $so(3) = \{J_z, J_+, J_-\}$,

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, [J_+, J_-] = 2J_z, \quad (2.11)$$

gera as rotações espaciais tridimensionais e as rotações espinoriais bidimensionais. Ela é simples e semissimples (verifique).

2.4 Estrutura

2.4.1 Constantes de estrutura

Uma álgebra é completa. O produto entre dois elementos sempre pode ser escrito como uma combinação linear entre os elementos da álgebra, os quais formam uma base. Os coeficientes nestas combinações lineares são denominados de **constantes de estrutura**. Considerando uma álgebra de Lie

$$\mathcal{L} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

de dimensão n . Suas constantes de estrutura são os coeficientes reais C^k_{ij} ,

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C^k_{ij} X_k. \quad (2.12)$$

Dada a antissimetria do produto de Lie, as constantes de estrutura também são antissimétricas em seus dois índices inferiores, $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$.

Exemplo 3. A álgebra $su(2) = \{J_z, J_+, J_-\}$, definida pelas relações de comutação

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, [J_+, J_-] = 2J_z, \quad (2.13)$$

tem as seguintes constantes de estrutura não-nulas:

$$C^{\pm}_{z,\pm} = \pm 1, C^z_{+,-} = 2. \quad (2.14)$$

Observe que esta mesma álgebra pode ser escrita noutra forma, $so(3) = \{L_1, L_2, L_3\}$, onde

$$L_1 = -\frac{i}{2}(J_+ + J_-), L_2 = -\frac{1}{2}(J_+ - J_-), L_3 = -iJ_z, \quad (2.15)$$

com as relações de comutação e constantes de estrutura (verifique)

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k, C^k_{ij} = \epsilon_{ijk}. \quad (2.16)$$

Observe que em ambas as formas, as constantes de estrutura são reais.

2.4.2 Geradores

Uma álgebra de Lie gera um grupo de transformações lineares via uma aplicação exponencial. Como um exemplo construtivista, considere uma rotação espacial por um ângulo θ em torno do eixo Z fixo. Esta rotação, por exemplo, atua nas coordenadas de vetores (flechas) através da matriz (verifique) $R(\theta)$,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.17)$$

Note que o ângulo de rotação é compacto, isto é, ele pode ser limitado a um intervalo finito da reta real. Essas rotações formam um grupo (verifique): (i) a identidade é dada por $\theta = 0$, $\mathbb{I} = R(0)$; (ii) a rotação inversa é dada por $-\theta$, $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$; (iii) a composição de duas destas rotações é outra rotação, $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\gamma)$; (iv) a regra de composição $\gamma = \alpha + \beta$ é analítica, indicando que se trata de um grupo de Lie; (v) esse grupo é associativo, abeliano e compacto. Próximo à identidade temos (verifique),

$$R(\Delta\theta) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\theta & 0 \\ \Delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \Delta\theta L_3, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

É imediato reconhecer L_3 como o gerador das rotações (verifique),

$$R(\theta) = \exp(\theta L_3), \quad L_3 = \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}. \quad (2.19)$$

Note que o gerador L_3 é anti-simétrico. No entanto, o novo gerador $J_z = J_3 = i L_3$ é hermitiano. Tarefa: com interesse apenas na álgebra, escreva as outras duas matrizes representando as rotações em torno dos outros dois eixos independentes e aplique o procedimento anterior para encontrar os respectivos geradores e mostre que eles formam a álgebra $so(3) = \{L_1, L_2, L_3\}$.

Este exemplo mostra como os produtos de Lie surgem naturalmente dos geradores de um dado grupo de Lie. Evidentemente, podemos tomar combinações lineares destes geradores para atender a outros propósitos, como a imposição da condição de hermiticidade. Este exemplo mostra também que as constantes de estrutura sempre podem ser escolhidas como reais. Adiantando, a álgebra $so(3) = \{L_1, L_2, L_3\}$ gera o grupo das rotações espaciais tridimensionais $SO(3)$. Estas rotações, podemos enxergar. Quando impomos a condição de hermiticidade, a álgebra $so(3)$ ganha uma aparência nova, $su(2) = \{J_z, J_+, J_-\}$. As álgebras $so(3)$ e $su(2)$ são isomórficas (uma pode ser transformada na outra via combinações lineares). No entanto, a álgebra $su(2)$ gera o grupo $SU(2)$, o qual produz também rotações em espinores (que não enxergamos), além de vetores. Os grupos de Lie $SO(3)$ e $SU(2)$ não são isomórficos. Veremos que a álgebra $su(2)$

tem mais representações (irredutíveis) que a álgebra $so(3)$. Enquanto a álgebra $so(3)$ possui apenas representações irredutíveis vetoriais (spin inteiro), a álgebra $su(2)$ possui também as representações irredutíveis espinoriais (spin semi-inteiro), além das representações irredutíveis vetoriais (spin inteiro).

2.4.3 Nomenclatura

A letra S (de special) no nome $SU(2)$ indica que o determinante das matrizes representando este grupo tem módulo unitário. A letra U indica transformações unitárias. O número 2 indica a menor dimensão do espaço onde tais transformações atuam. Existem apenas cinco famílias de grupos de Lie: os grupos de transformações ortogonais, $O(n = 2k + 1)$ e $O(n = 2k)$, os grupos de transformações unitárias $U(n)$, os grupos de transformações simpléticas, $Sp(n = 2k)$, e os grupos excepcionais. Cada grupo tem sua versão especial. Usa-se letras minúsculas para escrever os nomes das respectivas álgebras. Os grupos excepcionais são denominados pelos nomes de suas álgebras. A Tabela 2.1 mostra as álgebras de Lie clássicas ($A-D$) e excepcionais ($E-G$) com seus postos como o subíndice r e dimensões, bem como as álgebras semissimples compactas (ASSC) associadas.

\mathcal{L}_r	dim	ASSC	\mathcal{L}_r	dim
A_r	$r(r + 2)$	$su(r + 1)$	E_6	78
B_r	$r(2r + 1)$	$so(2r + 1)$	E_7	133
C_r	$r(2r + 1)$	$sp(2r)$	E_8	248
D_r	$r(2r - 1)$	$so(2r)$	F_4	52
			G_2	14

Tabela 2.1: As álgebras de Lie clássicas (primeira coluna), excepcionais (terceira coluna) e suas dimensões em termos do posto r .

Capítulo 3

Representações

3.1 Introito

Em geral, uma álgebra de Lie pode ser definida através do conhecimento de suas constantes de estrutura. A teoria de representação das álgebras de Lie estabeleceu uma forma canônica de escrever as constantes de estrutura, para todas as álgebras de Lie. Um feito notável, conseguido graças ao estudo da representação adjunta, discutida na próxima seção. As constantes de estrutura na forma canônica são denominadas de raízes.

Uma vez conhecida as constantes de estrutura, podemos associar operadores aos elementos da álgebra e criar um espaço vetorial onde tais operadores atuam. Escolhida uma base neste espaço vetorial, os operadores podem ser representados matricialmente. Este espaço portador das representações pode ser abstrato ou concreto. Quando ele é concreto, os elementos da álgebra podem, por exemplo, ser realizados/concretizados/representados por operadores diferenciais.

A teoria de representação das álgebras de Lie permite a criação de um espaço portador abstrato para todas as representações irredutíveis das álgebras semissimples. Cada vetor de base neste espaço portador é identificado por um vetor, denominado de peso. Exceto para as álgebras simpléticas, há também uma prescrição para escrever elementos de matriz, conhecida por método de Gelfand-Tsetlin.

Raízes e pesos formam o cerne da teoria de representação das álgebras de Lie. Em particular, raízes são os pesos da representação adjunta. Pesos formam um espaço vetorial. Por conveniência, há pelo menos quatro bases para descrever estes pesos.

Em aplicações na Física Quântica, os pesos estão diretamente relacionados com os números quânticos de um conjunto completo de operadores comutantes. Há também uma prescrição para encontrar todos os operadores invariantes funcionalmente independentes numa dada álgebra de Lie. Estes operadores invariantes comutam com todos os elementos da álgebra e fazem o papel dos operadores comutantes em Física Quântica.

Em tempo: numa representação irredutível é impossível encontrar uma transformação que reduza simultaneamente todas as matrizes numa forma diagonal por blocos.

3.2 Adjunta

Toda álgebra de Lie $\mathcal{L} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ possui uma representação irredutível natural, denominada de **representação adjunta**. Nela os elementos da álgebra funcionam ao mesmo tempo como operadores e vetores de base do espaço vetorial onde os operadores atuam. A ação natural é dada pelo produto de Lie,

$$\hat{X}_i X_j \equiv [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C^k_{ij} X_k. \quad (3.1)$$

Como a representação adjunta usa as constantes de estrutura, que são reais, ela não será hermitiana.

Exemplo 4. Considere novamente a a álgebra $so(3) = \{L_1, L_2, L_3\}$, com as constantes de estrutura $[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k$. Apenas desta vez, vamos escrever \hat{L}_i para enfatizar o papel de operadores dos elementos da álgebra. A ação natural é dada pelo produto de Lie:

$$\hat{L}_i L_j \equiv [L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (3.2)$$

Ordenando a base como $\{L_1, L_2, L_3\}$, temos as seguinte representação matricial (verifique):

$$\hat{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Note que os coeficientes na combinação linear da ação de um dos operadores são dispostos nas colunas. Os produtos de Lie entre estas matrizes fornecem as mesmas constantes de estrutura da álgebra $so(3)$. Esta representação é fiel: cada matriz se identifica com um único elemento da álgebra. Como não existe uma transformação para diagonalizar simultaneamente estas três matrizes, esta representação é irredutível.

Tarefa 1. De forma análoga, mostre que a representação adjunta da álgebra $su(2) = \{J_z, J_+, J_-\}$ (nesta ordem), com $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$ e $[J_+, J_-] = 2J_z$, é

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Estas matrizes são irredutíveis. Note que a matriz representando J_z é diagonal e que J_\pm comportam-se como autovetores do operador \hat{J}_z .

Tarefa 2. Considere a álgebra $su(2) = \{J_z, J_+, J_-\}$ (nesta ordem), com $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$ e $[J_+, J_-] = 2J_z$. Faça a modificação $H_1 = J_z$, $E_\alpha = \sqrt{2}J_+$ e $E_{-\alpha} = \sqrt{2}J_-$ e mostre que as novas

constantes de estrutura são $[H_1, E_\alpha] = +E_\alpha$, $[H_1, E_{\bar{\alpha}}] = -E_{\bar{\alpha}}$ e $[E_\alpha, E_{\bar{\alpha}}] = H_1$. Escreva as matrizes da representação adjunta.

Tarefa 3. Considere a álgebra $su(2) = \{J_z, J_+, J_-\}$ (nesta ordem), com $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$ e $[J_+, J_-] = 2J_z$. Faça a modificação $h_1 = 2J_z$, $e_\alpha = J_+$ e $e_{\bar{\alpha}} = J_-$ e mostre que as novas constantes de estrutura são $[h_1, e_\alpha] = +2e_\alpha$, $[h_1, e_{\bar{\alpha}}] = -2e_{\bar{\alpha}}$ e $[e_\alpha, e_{\bar{\alpha}}] = h_1$. Escreva as matrizes da representação adjunta.

3.3 Raízes

As demonstrações dos teoremas assegurando as propriedades apresentadas aqui podem ser consultadas nas referências básicas. Em particular, veja o Cap. 5 da Ref. [1], Seção 5.18 em diante. Veja também a Ref. [2] e o excelente livro texto em português do prof. San Martin [3].¹ Como sempre para um tratamento super rigoroso do ponto de vista matemático, consulte sempre os textos do Grupo Bourbaki, Ref. [4] neste caso, Caps. VII e VIII.

3.3.1 Cartan-Weyl

A álgebra $su(2) = \{H_1, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$, apresentada na Tarefa 2 com $-\alpha = \bar{\alpha}$, tem suas constantes de estrutura na forma canônica de Cartan-Weyl:

$$[H_1, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha}, [E_{+\alpha}, E_{-\alpha}] = H_1. \quad (3.5)$$

As características gerais presentes neste exemplo particular são: (i) o elemento H_1 forma a subálgebra de Cartan, indicando uma álgebra de posto um; (ii) a “raiz” α é um vetor unidimensional, cujo o único elemento é a constante de estrutura em $[H_1, E_\alpha] = E_\alpha$, autovalor do operador na subálgebra de Cartan. Assim, $\alpha = [1]$; (iii) a raiz negativa é $\bar{\alpha} = -\alpha = [-1]$; (iv) há uma raiz única para cada elemento da álgebra fora da subálgebra de Cartan; (v) a raiz nula é associada aos elementos na subálgebra de Cartan.

A generalização para uma álgebra de Lie semissimples \mathcal{L}_r de posto r tem a forma

$$[H_i, H_k] = 0, \quad i \leq k \leq r \quad (3.6a)$$

$$[H_i, E_{\alpha_k}] = (\alpha_k)_i E_{\alpha_k}, \quad (3.6b)$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = \sum_{k=1}^r (\alpha_i)_k H_k, \quad (3.6c)$$

$$[E_{\beta_j}, E_{\beta_l}] = N_{\beta_j\beta_l} E_{\beta_j+\beta_l}. \quad (3.6d)$$

Os r vetores r -dimensionais α_k , denominados de raízes simples, têm as constantes de estrutura em $[H_i, E_{\alpha_k}] = (\alpha_k)_i E_{\alpha_k}$ como componentes:

$$\alpha_k = [(\alpha_k)_1, \dots, (\alpha_k)_r]. \quad (3.7)$$

¹Veja também as notas de aula do Prof. Agostinho.

Note que usamos colchetes para escrever as coordenadas. Diremos que estes vetores estão escritos na base formada pelo sistema de pesos fundamentais (FWS, de *Fundamental Weight System*, a serem discutidos mais adiante). Assim, as componentes das raízes simples são os autovalores dos operadores comutantes H_k , os quais formam a subálgebra de Cartan $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$. O elemento E_{α_k} é um autovetor simultâneo dos operadores na subálgebra de Cartan.

Além das raízes simples (α), as quais são linearmente independentes, existem outras raízes (não-simples). Para cada raiz positiva existe uma negativa. Existe uma raiz não-nula para cada elemento fora da subálgebra de Cartan. Qualquer elemento na subálgebra de Cartan está associado à raiz nula. Por comodidade, o conjunto das raízes simples será denotado por Π e o conjunto de todas as raízes por Σ .

A constante de estrutura $N_{\beta_j\beta_l}$ em (3.6d) é dada pelas seguintes regras:

$$N_{\beta_j\beta_l} = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta_j = -\beta_l \notin \Pi, \\ 0, & \text{se } \beta_j + \beta_l \notin \Sigma, \\ \pm \sqrt{\frac{q(p+1)}{2}} |\beta_j|, & \text{se } \beta_j + \beta_l \in \Sigma, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde um dos sinais na última opção deve ser escolhido livremente e (série descendente)

$$p = m \in \mathbb{N}^+ \text{ para } \beta_l - m\beta_j \in \Sigma \text{ e } \beta_l - (m+1)\beta_j \notin \Sigma \quad (3.9)$$

e (série ascendente)

$$q = m \in \mathbb{N}^+ \text{ para } \beta_l + m\beta_j \in \Sigma \text{ e } \beta_l + (m+1)\beta_j \notin \Sigma. \quad (3.10)$$

Nem todas as constantes de estrutura serão inteiros em geral. A álgebra A_r apresentará uma peculiaridade, a qual será discutida em breve.

3.3.2 Chevalley

A álgebra $su(2) = \{h_1, e_\alpha, e_{-\alpha}\}$, apresentada na Tarefa 3 com $-\alpha = \bar{\alpha}$, tem suas constantes de estrutura na forma canônica de Chevalley:

$$[h_1, e_{\pm\alpha}] = \pm 2e_{\pm\alpha}, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_1. \quad (3.11)$$

As características gerais presentes neste exemplo particular são: (i) o elemento h_1 forma a subálgebra de Cartan, indicando uma álgebra de posto um; (ii) a “raiz” α é um vetor unidimensional, cujo o único elemento é a constante de estrutura em $[h_1, e_\alpha] = 2e_\alpha$, autovalor do operador na subálgebra de Cartan. Assim, $\alpha = (2)$; (iii) a raiz negativa é $\bar{\alpha} = -\alpha = (-2)$; (iv) há uma raiz única para cada elemento da álgebra fora da subálgebra de Cartan; (v) a raiz nula é associada aos elementos na subálgebra de Cartan.

A generalização para uma álgebra de Lie semissimples \mathcal{L}_r de posto r tem a forma

$$[h_i, h_k] = 0, \quad i \leq k \leq r \quad (3.12)$$

$$[h_i, e_{\pm\alpha_k}] = \pm A_{ik} e_{\pm\alpha_k}, \quad (3.13)$$

$$[e_{+\alpha_i}, e_{-\alpha_k}] = \delta_{ik} h_i, \quad (3.14)$$

$$[e_{\beta_j}, e_{\beta_l}] = \pm(p+1)e_{\beta_j+\beta_l}, \quad (3.15)$$

onde

$$p = m \in \mathbb{N}^+ \text{ se } \beta_l - m\beta_j \in \Sigma \text{ e } \beta_l - (m+1)\beta_j \notin \Sigma \quad (3.16)$$

e

$$p = -1 \text{ se } \beta_j = -\beta_l \notin \Pi \text{ ou } \beta_j + \beta_l \notin \Sigma. \quad (3.17)$$

As constantes de estrutura A_{ik} são os autovalores dos operadores h_i da subálgebra de Cartan e formam uma matriz quadrada de ordem r não singular denominada de **matriz de Cartan**,

$$A_{ik} = \alpha_i^\vee \cdot \alpha_k, \quad \alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{|\alpha_i|^2}, \quad i \leq k \leq r, \quad (3.18)$$

onde $\alpha_i \cdot \alpha_k$ denota o produto escalar, $|\alpha_i|^2 = \alpha_i \cdot \alpha_i$ é o módulo ao quadrado e α^\vee é denominada de **corraiz** ou **raiz dual**. Como as componentes de uma raiz simples são os autovalores dos elementos da subálgebra de Cartan, então as colunas da matriz de Cartan são os vetores raízes. Esta forma de escrever as coordenadas $b_i = \alpha_i^\vee \cdot \beta$ de uma raiz qualquer β será denotada por parênteses, como em $\beta = (b_1, \dots, b_r)$. Diremos que a raiz β está escrita na base Dynkin (DYN), formada pelas corraízes simples. Todas as constantes de estrutura na forma de Chevalley são inteiros. Isto significa que os possíveis ângulos entre as raízes simples são limitados. A matriz de Cartan fornece duas informações geométricas importantíssimas sobre as raízes simples α_i e α_k :

1. o ângulo θ_{ik} entre α_i e α_k ,

$$\theta_{ik} = \frac{(7 + m_{ik})\pi}{12}, \quad m = A_{ik}A_{ki} \in \{1, 2, 3\}; \quad (3.19)$$

para $m_{ik} = 0$, o ângulo é $\pi/2$ ou π ;

2. a razão entre os comprimentos,

$$\frac{|\alpha_i|^2}{|\alpha_k|^2} = \frac{A_{ki}}{A_{ik}}. \quad (3.20)$$

A base Dynkin fornece o algoritmo mais eficiente para calcular o sistema de raízes.

3.3.3 Propriedades

1. Uma raiz é positiva se tiver sua primeira componente não-nula em alguma base.
2. Uma raiz β é maior que outra raiz α se a diferença $\beta - \alpha$ for positiva.

3. Uma raiz α não possui qualquer outro múltiplo além de $-\alpha$.
4. A projeção $\alpha^\vee \cdot \beta$ da raiz β na corraiz α^\vee é um inteiro.
5. A única sequência possível de raízes da forma $\alpha + m\beta$ é limitada: $m = \alpha^\vee \cdot \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
6. Os únicos ângulos possíveis entre raízes simples são $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ ou 150° .
7. É possível apenas dois tamanhos para as raízes simples de uma mesma álgebra.

3.3.4 Dynkin

Com base nas propriedades de raízes simples, Dynkin criou um sistema gráfico engenhoso de, literalmente, visualizar a estrutura de uma álgebra de Lie semissimples (clássicas e excepcionais). Nesses diagramas, a raiz menor é representada por um círculo aberto e a maior por um círculo fechado. Quando o ângulo entre elas for de 120° haverá uma linha ligando os círculos. Quando o ângulo entre elas for de 135° haverá duas linhas ligando os círculos. Quando o ângulo entre elas for de 150° haverá três linhas ligando os círculos. Quando o ângulo entre elas for de 90° (ou 180°) haverá nenhuma linha ligando os círculos. A Tabela 3.1 mostra os diagramas de Dynkin para as álgebras de posto $r \leq 3$. Simplesmente observando a igualdade entre dois diagramas, permite a conclusão de isomorfismo entre as álgebras correspondentes. Note que as álgebras B_3 e C_3 não são isomórficas. Nas álgebras clássicas, a raiz maior é $\sqrt{2}$ vezes a raiz menor. Somente na álgebra excepcional G_2 se pode encontrar a raiz maior $\sqrt{3}$ vezes a raiz menor. No entanto, apenas dois tamanhos de raízes aparecem numa mesma álgebra, como mostrado na última coluna da Tabela 3.1 (no formato menor/maior comprimentos ao quadrado).

$A_1 \sim B_1 \sim C_1$	$su(2) \sim so(3) \sim sp(2)$	\circ		
A_2	$su(3)$	$\circ \text{---} \circ$	120°	$1/1$
$B_2 \sim C_2$	$so(5) \sim sp(4)$	$\bullet \text{====} \circ$	135°	$1/2$
$D_2 = A_1 \oplus A_1$	$so(4) = so(3) \oplus so(3)$	$\circ \quad \circ$	90°	$1/1$
G_2		$\bullet \text{====} \circ$	150°	$1/3$
$A_3 \sim D_3$	$su(4) \sim so(6)$	$\circ \text{---} \circ \text{---} \circ$		
B_3	$so(7)$	$\circ \text{---} \circ \text{====} \bullet$		
C_3	$sp(6)$	$\bullet \text{---} \bullet \text{====} \circ$		

Tabela 3.1: Diagramas de Dynkin para as álgebras de Lie de posto $r \leq 3$. A segunda coluna mostra as álgebras mais conhecidas. A penúltima coluna mostra o ângulo entre as raízes e a última coluna mostra a razão entre os comprimentos ao quadrado das raízes (menor/maior). A raiz menor é representada por um círculo fechado.

3.3.5 Exemplos

3.3.5.1 A_2

O sistema de raízes da álgebra A_2 , ou $su(3)$, está mostrado na Tabela 3.2. A raiz maior (ou mais alta) $\Lambda = (1, 1)$ está na camada 0. Existem cinco camadas. As raízes estão em ordem decrescente na base SRS e organizadas em camadas (*layers*). Apenas a raiz nula é degenerada (duplamente). A degenerescência da raiz nula é sempre igual ao posto da álgebra. O soma das raízes positivas é o vetor $(2, 2)$ na base DYN.

$L(\beta)$	DYN	SRS	α_i	FWSm
0	(1, 1)	{1, 1}	$\alpha_1 + \alpha_2$	[2, 1]
1	(2, -1)	{1, 0}	α_1	[1, -1]
1	(-1, 2)	{0, 1}	α_2	[1, 2]
2	(0, 0)	{0, 0}		[0, 0]
3	(1, -2)	{0, -1}		[-1, -2]
3	(-2, 1)	{-1, 0}		[-1, 1]
4	(-1, -1)	{-1, -1}		[-2, -1]

Tabela 3.2: O sistema de raízes da álgebra A_2 ou $su(3)$. A raiz nula é duplamente degenerada. As camadas estão na primeira coluna.

As raízes simples (linearmente independentes) são $\Pi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, onde $\alpha_1 = (2, -1) = \{1, 0\}$ e $\alpha_2 = (-1, 2) = \{0, 1\}$. Note que elas estão na mesma camada 1. A posição da camada indica a quantidade de raízes simples que devem ser subtraídas da raiz máxima para se chegar àquela camada. A matriz de Cartan é formada pelas raízes simples na base DYN:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Sabendo que as raízes simples possuem o mesmo comprimento, o qual podemos escolher livremente, digamos $|\alpha_i| = \sqrt{2}$, e que o ângulo entre elas é 120° , a matriz de Cartan torna-se a métrica no espaço das raízes na base SRS. A matriz de Cartan é a forma analítica do diagrama de Dynkin. Por exemplo, a raiz $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ tem comprimento

$$|\beta_1|^2 = \beta_1 \cdot \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \quad (3.22)$$

Assim, todas as raízes têm o mesmo comprimento. O produto escalar

$$\beta_1 \cdot \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (3.23)$$

indica que a raiz β_1 faz um ângulo de 60° com a raiz α_1 , como esperado da soma $\alpha_1 + \alpha_2$.

A Figura 3.1 mostra o sistema de raízes na forma de vetores. Este sistema de raízes foi usado no modelo *eightfold way* para organizar/classificar diversas propriedades de hádrons (partículas subatômicas massivas, como o próton e o nêutron). Neste modelo, a cada raiz é associada uma partícula. Duas partículas de carga nula são associadas à raiz nula. Como exemplo de organização, as massas das partículas associadas às raízes não-nulas são próximas.

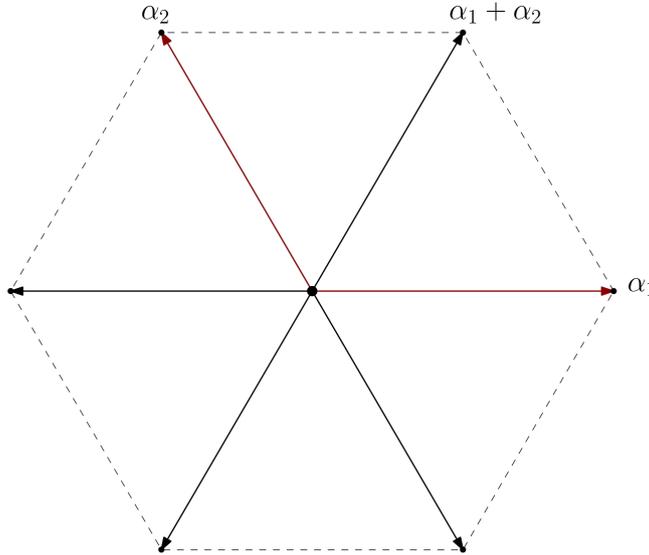


Figura 3.1: O sistema de raízes da álgebra A_2 ou $su(3)$. A raiz nula, duplamente degenerada, está no centro. As raízes simples são α_1 e α_2 . Todas as raízes têm o mesmo comprimento.

3.3.5.2 C_3

O sistema de raízes positivas da álgebra simplética $sp(6)$ (C_3) está mostrado na Tabela 3.3. A raiz maior (ou mais alta) $\Lambda = (2, 0, 0)$ está na camada 0. Existem 11 camadas e 18 raízes não-nulas. As raízes estão organizadas em camadas (*layers*). Elas estão em ordem decrescente (em todas as bases) somente dentro de cada camada. Apenas a raiz nula é degenerada (triplamente). A degenerescência da raiz nula é sempre igual ao posto da álgebra. A soma das raízes positivas é o vetor $(2, 2, 2)$ na base DYN.

A base FWS pode ser usada para representar o sistema de raízes no espaço euclidiano tridimensional, como mostrado na Figura 3.2. Enquanto as raízes maiores estão nos vértices de um octaedro regular, as raízes menores estão nos pontos médios das arestas. A raiz nula está no centro.

A matriz de Cartan, formada pelas raízes simples na base DYN colocadas nas colunas, para esta álgebra C_3 é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Esta matriz contém todas as informações geométricas relevantes sobre as raízes simples. Da Eq. 3.20, esta matriz indica que as raízes α_1 e α_2 possuem o mesmo comprimento e que as raízes

$L(\beta)$	DYN	SRS	α_i	FWS
0	(2, 0, 0)	{2, 2, 1}		[2, 0, 0]
1	(0, 1, 0)	{1, 2, 1}		[1, 1, 0]
2	(1, -1, 1)	{1, 1, 1}		[1, 0, 1]
2	(-2, 2, 0)	{0, 2, 1}		[0, 2, 0]
3	(1, 1, -1)	{1, 1, 0}		[1, 0, -1]
3	(-1, 0, 1)	{0, 1, 1}		[0, 1, 1]
4	(2, -1, 0)	{1, 0, 0}	α_1	[1, -1, 0]
4	(-1, 2, -1)	{0, 1, 0}	α_2	[0, 1, -1]
4	(0, -2, 2)	{0, 0, 1}	α_3	[0, 0, 2]

Tabela 3.3: O sistema de raízes positivas da álgebra C_3 ou $sp(6)$. A raiz nula é triplamente degenerada. As camadas estão na primeira coluna.

α_2 e α_3 possuem comprimentos diferentes:

$$\frac{|\alpha_1|^2}{|\alpha_2|^2} = \frac{A_{21}}{A_{12}} = 1, \quad \frac{|\alpha_2|^2}{|\alpha_3|^2} = \frac{A_{32}}{A_{23}} = \frac{1}{2}. \quad (3.25)$$

Adotaremos $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = 2$. Da Eq. 3.19, sabemos que o ângulo entre α_1 e α_2 é 120° (uma linha, $m_{12} = A_{12}A_{21} = 1$) e que o ângulo entre α_2 e α_3 é 135° (duas linhas, $m_{23} = A_{23}A_{32} = 2$), então a métrica no espaço das raízes simples é

$$g = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Desta vez a métrica no espaço das raízes simples é diferente da matriz de Cartan. Vale lembrar que as raízes precisam ser escritas na base SRS para usarmos esta métrica em produtos escalares.

As raízes são calculadas inicialmente na base DYN, segunda coluna na Tabela 3.3. Para passarmos para a base SRS, basta multiplicar as componentes na base DYN pela inversa da matriz de Cartan, simbolicamente $\{ \} = A^{-1}(\cdot)$. As componentes da base FWS foram obtidas multiplicando as componentes na base SRS pela matriz raiz R , simbolicamente, $[] = R\{ \}$, onde

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

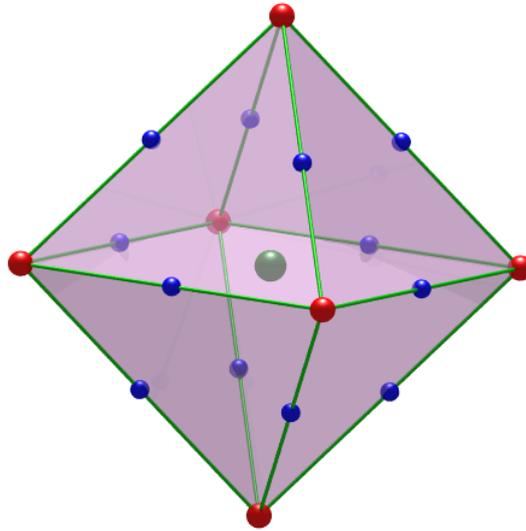


Figura 3.2: O sistema de raízes da álgebra C_3 ou $sp(6)$ forma um octaedro regular com as raízes maiores nos vértices. As raízes menores estão nos pontos médios das arestas.

3.4 Pesos

O sistema de raízes, além de identificar uma determinada álgebra de Lie, forma também um espaço portador da representação irreduzível de dimensão igual à dimensão da álgebra. Esta representação irreduzível proporcionada pelo sistema de raízes é denominada de representação adjunta. Ela é natural, intrínseca, a qualquer álgebra. Tomando a álgebra C_3 ($sp(6)$) como exemplo, a raiz máxima $(2, 0, 0)$ encabeça o conjunto de 21 raízes. Há dois aspectos importantes a serem destacados: (i) as raízes simples são autovalores dos operadores da subálgebra de Cartan; (ii) essencialmente, um produto de Lie não-nulo está associado a alguma raiz pertencente ao sistema de raízes.

Em geral, a raiz mais alta é também denominada de peso. Dado um peso máximo Λ , haverá um sistema de pesos $\Delta(\Lambda)$ constituindo um espaço portador de uma determinada representação irreduzível. O sistema de raízes Σ é um caso particular de uma representação irreduzível, a representação adjunta. Numa álgebra de Lie \mathcal{L}_r de posto r , um peso máximo Λ na base DYN tem todas suas r componentes Λ_i dadas por inteiros não-negativos, $\Lambda_i \geq 0$. Cada peso máximo é único. Em particular, os pesos máximos

$$M_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, M_r = (0, 0, \dots, 1) \tag{3.28}$$

são denominados de representações irredutíveis (irreps) básicas, para qualquer álgebra de Lie. A irrep básica M_1 sempre terá a mesma dimensão do espaço portador do grupo de transformações gerado por álgebra clássica (veja a Tabela 2.1). Por isso, a irrep básica M_1 é denominada de irrep fundamental. Seus pesos positivos λ_i são denominados de sistema de pesos fundamentais, os quais formam a base FWS. Na álgebra C_3 ($sp(6)$), $M_1 = (1, 0, 0)$ tem dimensão seis. A dimensão da representação irredutível $\Delta(\Lambda)$ é dada pela fórmula de Weyl:

$$\dim(\Lambda) = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \frac{\alpha \cdot (\Lambda + \rho)}{\alpha \cdot \rho}, \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha = (1, 1, \dots, 1), \quad (3.29)$$

onde Π^+ é o conjunto das raízes positivas e ρ é conhecido como vetor de Weyl.

Impressiona que todas as representações irredutíveis de todas as álgebras de Lie semissimples (compactas) são classificadas por este esquema de pesos. Uma álgebra compacta gera um grupo compacto. Um grupo compacto tem pelo menos um de seus parâmetros pertencente a um intervalo aberto (ou semi-aberto) da reta real. Mais adiante veremos uma forma analítica de identificar se uma álgebra é semissimples e/ou compacta.

3.4.1 Regras de seleção

O sistema de pesos $\Delta(\Lambda)$ associa um peso λ a cada vetor $|\lambda\rangle$ do espaço portador da representação irredutível dada pelo peso máximo Λ . Pode haver degenerescências. Como no caso da representação adjunta, associado à raiz $\alpha \in \Sigma$, um determinado elemento E_α fora da subálgebra de Cartan atua em um determinado vetor peso $\lambda \in \Delta(\Lambda)$ com as seguintes regras de seleção:

$$E_\alpha |\lambda\rangle = 0 \text{ se } \alpha + \lambda \notin \Delta \quad (3.30)$$

e

$$E_\alpha |\lambda\rangle \propto |\alpha + \lambda\rangle \text{ se } \alpha + \lambda \in \Delta. \quad (3.31)$$

Desta forma, o elemento E_α associado a uma raiz positiva (negativa) atua como um operador de levantamento (abaixamento), como conhecido em Física Quântica. Os elementos da subálgebra de Cartan são diagonais neste espaço vetorial formado pelo sistema de pesos. As componentes dos pesos são autovalores dos elementos da subálgebra de Cartan, por construção.

3.4.2 Irreps básicas 2D

3.4.2.1 A_2

A família de álgebras A_r está associada às álgebras semissimples e compactas $sl(r+1)$ (traço nulo), das quais $su(r+1)$ (traço nulo + hermiticidade) é uma subálgebra. Por uma razão ainda a ser explorada (via topologia?), os pesos na base FWS, com $r+1$ componentes, são

perpendiculares ao peso diagonal p ,

$$p = \sum_{i=1}^{r+1} e_i = [1, 1, \dots, 1], \quad (3.32)$$

onde e_i são os versores da base ortonormal da base euclidiana de dimensão $r+1$ (base cartesiana). Desta forma, apenas r dentre os $r+1$ pesos λ_i da irrep fundamental,

$$\lambda_i = e_i - \frac{1}{r+1}p, \quad \lambda_i \cdot p = 0, \quad \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 0, \quad (3.33)$$

serão linearmente independentes. Isto ocorre somente nesta família A_r . Para as demais famílias, os pesos da irrep fundamental coincidem com os versores da base ortonormal da base euclidiana de dimensão r (base cartesiana). Isto significa que a métrica da base FWS para as álgebras A_r não é euclidiana.

A melhor maneira de escrever os pesos numa base cartesiana (uma versão euclidiana da base FWS) para irreps das álgebras A_r é encontrando as coordenadas cartesianas das irreps básicas M_i diretamente da base DYN. Para a álgebra A_2 , a métrica da base DYN é

$$G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_{ij} = M_i \cdot M_j. \quad (3.34)$$

Uma escolha deve ser feita: colocar uma irrep básica no eixo X, por exemplo. Para não introduzir mais um símbolo, usaremos colchetes para representar as coordenadas cartesianas (base CAR) de um peso. Assim,

$$M_1 = [\sqrt{6}/3, 0], \quad M_2 = [x, y]. \quad (3.35)$$

As duas coordenadas desconhecidas em (3.35) são determinadas pela métrica (3.34). Os produtos escalares na base cartesiana (multiplicando componente a componente) são igualados aos respectivos elementos da métrica (3.34), resultando em (verifique)

$$M_1 = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right], \quad M_2 = \left[\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \quad (3.36)$$

Agora basta rescrever qualquer peso na base DYN, através de uma combinação linear desta base cartesiana (CAR), usando as componentes na base DYN como coeficientes. A métrica da base CAR é euclidiana.

As irreps básicas $M_1 = (1, 0)$ e $M_2 = (0, 1)$ na álgebra A_2 , ou $su(3)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 3, \quad \dim(M_2) = 3. \quad (3.37)$$

A irrep $M_1 = (1, 0)$ é a fundamental. A irrep $M_2 = (0, 1)$, de mesma dimensão da fundamental, é a irrep conjugada da fundamental. Na irrep conjugada, as componentes dos pesos nas bases DYN, SRS e FWS, são as imagens espelhadas das componentes da outra irrep conjugada.

A Tabela 3.4 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um triângulo regular, como mostra a Figura 3.3a. Note que o peso mais baixo $(0, -1)$ não é o negativo do peso mais alto $M_1 = (1, 0)$. Note também que a soma dos pesos na base FWS é nula. Os dois pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS.

A Tabela 3.5 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um triângulo regular, como mostra a Figura 3.3b. Note que o peso mais baixo $(-1, 0)$ não é o negativo do peso mais alto $M_3 = (0, 1)$. Note também que a soma dos pesos na base FWS é nula.

Os triângulos das irreps conjugadas são duais: os vértices de um projetam nos pontos médios das arestas do outro. Polígonos duais possuem as mesmas simetrias pontuais. Note também a inexistência de pesos nos centros (pesos nulos), bem como nos pontos médios das arestas, nestes polígonos das irreps básicas.

3.4.2.2 B_2

As irreps básicas $M_1 = (1, 0)$ e $M_2 = (0, 1)$ na álgebra B_2 , ou $so(5)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 5, \dim(M_2) = 4. \quad (3.38)$$

A irrep $M_1 = (1, 0)$ é a fundamental.

A Tabela 3.6 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um quadrado, como mostra a Figura 3.3d. Os dois pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS.

A Tabela 3.7 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um quadrado, como mostra a Figura 3.3e.

3.4.2.3 C_2

As irreps básicas $M_1 = (1, 0)$ e $M_2 = (0, 1)$ na álgebra C_2 , ou $sp(4)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 4, \dim(M_2) = 5. \quad (3.39)$$

A irrep $M_1 = (1, 0)$ é a fundamental.

A Tabela 3.8 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um quadrado, como mostra a Figura 3.3g. Os dois pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS.

A Tabela 3.9 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . Não há degenerescências. Estes pesos estão nos vértices de um quadrado, como mostra a Figura 3.3h.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	CAR	λ_i
0	(1, 0)	$\frac{1}{3}\{2, 1\}$	$\frac{1}{3}[2, -1, -1]$	$\frac{1}{6}[2\sqrt{6}, 0]$	λ_1
1	(-1, 1)	$\frac{1}{3}\{-1, 1\}$	$\frac{1}{3}[-1, 2, -1]$	$\frac{1}{6}[-\sqrt{6}, 3\sqrt{2}]$	λ_2
2	(0, -1)	$\frac{1}{3}\{-1, -2\}$	$\frac{1}{3}[-1, -1, 2]$	$\frac{1}{6}[-\sqrt{6}, -3\sqrt{2}]$	

Tabela 3.4: O sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra A_2 ou $su(3)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	CAR
0	(0, 1)	$\frac{1}{3}\{1, 2\}$	$\frac{1}{3}[1, 1, -2]$	$\frac{1}{6}[2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}]$
1	(1, -1)	$\frac{1}{3}\{1, -1\}$	$\frac{1}{3}[1, -2, 1]$	$\frac{1}{6}[\sqrt{6}, -3\sqrt{2}]$
2	(-1, 0)	$\frac{1}{3}\{-2, -1\}$	$\frac{1}{3}[-2, 1, 1]$	$\frac{1}{6}[-2\sqrt{6}, 0]$

Tabela 3.5: O sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra A_2 ou $su(3)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(1, 0)	$\{1, 1\}$	$[1, 0]$	λ_1
1	(-1, 2)	$\{0, 1\}$	$[0, 1]$	λ_2
2	(0, 0)	$\{0, 0\}$	$[0, 0]$	
3	(1, -2)	$\{0, -1\}$	$[0, -1]$	
4	(-1, 0)	$\{-1, -1\}$	$[-1, 0]$	

Tabela 3.6: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra B_2 ou $so(5)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 1)	$\frac{1}{2}\{1, 2\}$	$\frac{1}{2}[1, 1]$
1	(1, -1)	$\frac{1}{2}\{1, 0\}$	$\frac{1}{2}[1, -1]$
2	(-1, 1)	$\frac{1}{2}\{-1, 0\}$	$\frac{1}{2}[-1, 1]$
3	(0, -1)	$\frac{1}{2}\{-1, -2\}$	$\frac{1}{2}[-1, -1]$

Tabela 3.7: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra B_2 ou $so(5)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(1, 0)	$\frac{1}{2}\{2, 1\}$	[1, 0]	λ_1
1	(-1, 1)	$\frac{1}{2}\{0, 1\}$	[0, 1]	λ_2
2	(1, -1)	$\frac{1}{2}\{0, -1\}$	[0, -1]	
3	(-1, 0)	$\frac{1}{2}\{-2, -1\}$	[-1, 0]	

Tabela 3.8: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra C_2 ou $sp(4)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 1)	{1, 1}	[1, 1]
1	(2, -1)	{1, 0}	[1, -1]
2	(0, 0)	{0, 0}	[0, 0]
3	(-2, 1)	{-1, 0}	[-1, 1]
4	(0, -1)	{-1, -1}	[-1, -1]

Tabela 3.9: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra C_2 ou $sp(4)$. As camadas estão na primeira coluna.

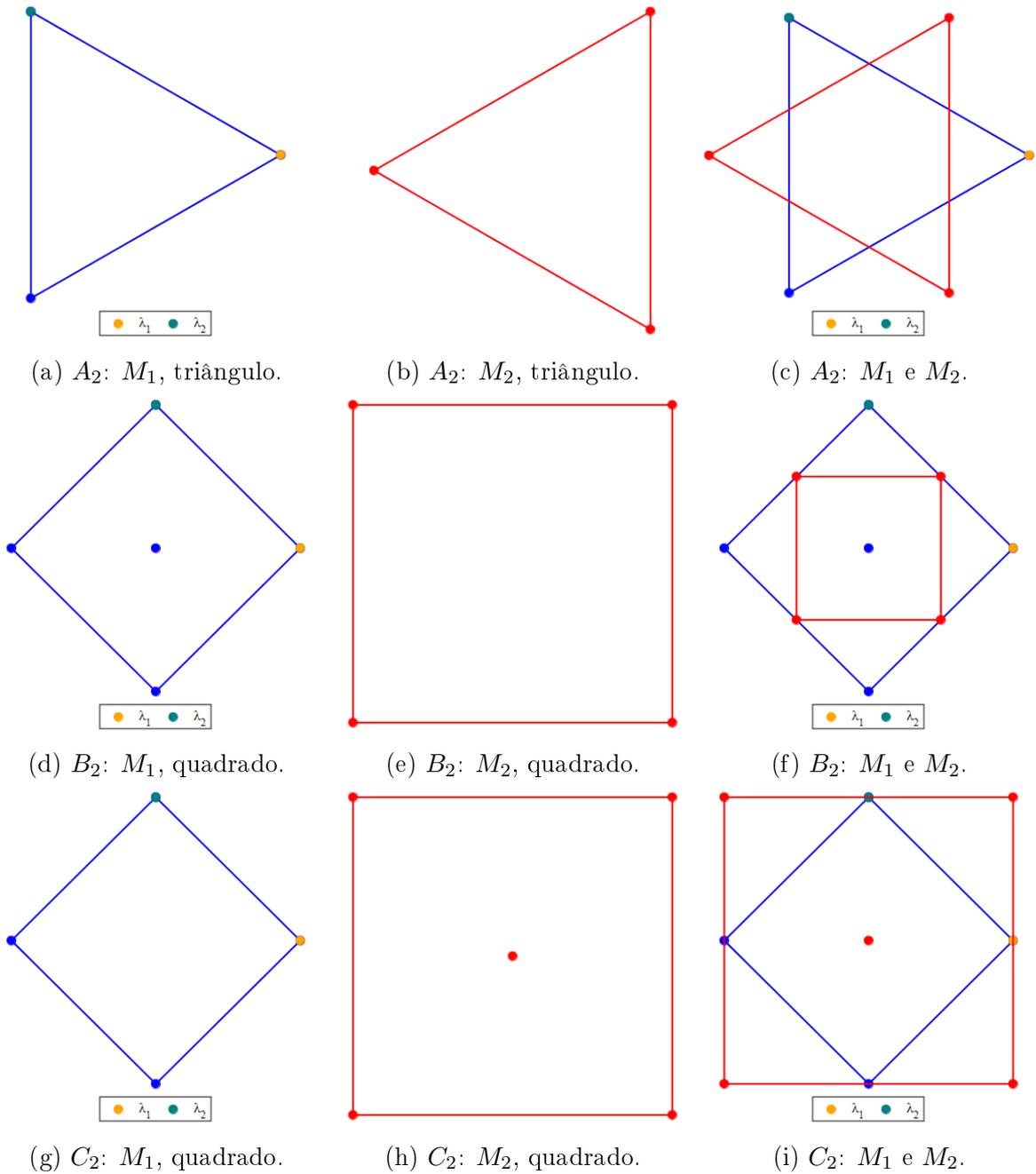


Figura 3.3: Representações irreduzíveis básicas das álgebras clássicas de posto dois, visualizadas na forma de polígonos.

3.4.3 Irreps básicas 3D

3.4.3.1 A_3

A família de álgebras A_r está associada às álgebras semissimples e compactas $sl(r + 1)$ (traço nulo), das quais $su(r + 1)$ (traço nulo + hermiticidade) é uma subálgebra. Por uma razão ainda a ser explorada (via topologia?), os pesos na base FWS, com $r + 1$ componentes, são

perpendiculares ao peso diagonal p ,

$$p = \sum_{i=1}^{r+1} e_i = [1, 1, \dots, 1], \quad (3.40)$$

onde e_i são os versores da base ortonormal da base euclidiana de dimensão $r+1$ (base cartesiana). Desta forma, apenas r dentre os $r+1$ pesos λ_i da irrep fundamental,

$$\lambda_i = e_i - \frac{1}{r+1}p, \quad \lambda_i \cdot p = 0, \quad \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 0, \quad (3.41)$$

serão linearmente independentes. Isto ocorre somente nesta família A_r . Para as demais famílias, os pesos da irrep fundamental coincidem com os versores da base ortonormal da base euclidiana de dimensão r (base cartesiana). Isto significa que a métrica da base FWS para as álgebras A_r não é euclidiana.

A melhor maneira de escrever os pesos numa base cartesiana (uma versão euclidiana da base FWS) para irreps das álgebras A_r é encontrando as coordenadas cartesianas das irreps básicas M_i diretamente da base DYN. Para a álgebra A_3 , a métrica da base DYN é

$$G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad G_{ij} = M_i \cdot M_j. \quad (3.42)$$

Duas escolhas devem ser feitas: colocar o peso maior M_2 no eixo Z (canônica) e colocar o peso M_3 no plano XZ . Esta última escolha torna $\{M_3, M_1, M_2\}$ um sistema destrógiro (segue a regra da mão direita no produto vetorial). Para não introduzir mais um símbolo, usaremos colchetes para representar as coordenadas cartesianas de um peso. Assim,

$$M_2 = [0, 0, 1], \quad M_3 = [u, 0, v], \quad M_1 = [x, y, z]. \quad (3.43)$$

As cinco coordenadas desconhecidas em (3.43) são determinadas pela métrica (3.42). Os produtos escalares na base cartesiana (multiplicando componente a componente) são igualados aos respectivos elementos da métrica (3.42), resultando em (verifique)

$$M_1 = \frac{1}{2}[0, \sqrt{2}, 1], \quad M_2 = [0, 0, 1], \quad M_3 = \frac{1}{2}[\sqrt{2}, 0, 1]. \quad (3.44)$$

Agora basta rescrever qualquer peso na base DYN, através de uma combinação linear desta base cartesiana (CAR), usando as componentes na base DYN como coeficientes. A métrica da base CAR é euclidiana.

As irreps básicas $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$ e $M_3 = (0, 0, 1)$ na álgebra A_3 , ou $su(4)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 4, \quad \dim(M_2) = 6, \quad \dim(M_3) = 4. \quad (3.45)$$

A irrep $M_1 = (1, 0, 0)$ é a fundamental. A irrep $M_3 = (0, 0, 1)$, de mesma dimensão da fundamental, é a irrep conjugada da fundamental. Na irrep conjugada, as componentes dos pesos nas bases DYN, SRS e FWS, são as imagens espelhadas das componentes da outra irrep conjugada.

A Tabela 3.10 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Note que o peso mais baixo $(0, 0, -1)$ não é o negativo do peso mais alto $M_1 = (1, 0, 0)$. Os três pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS. Note que a soma dos pesos na base FWS é nula. Estes pesos estão nos vértices de um tetraedro regular, como mostra a Figura 3.4a.

A Tabela 3.11 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . Não há degenerescências. Note que a soma dos pesos na base FWS é nula. Estes pesos estão nos vértices de um octaedro regular, como mostra a Figura 3.4b.

A Tabela 3.12 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_3)$ da irrep básica M_3 . Não há degenerescências. Note que o peso mais baixo $(-1, 0, 0)$ não é o negativo do peso mais alto $M_3 = (0, 0, 1)$. Note que a soma dos pesos na base FWS é nula. Estes pesos estão nos vértices de um tetraedro regular, como mostra a Figura 3.4c.

Os tetraedros das irreps conjugadas são duais: os vértices de um projetam nos centros das faces do outro. Arestas entre vértices adjacentes de um são perpendiculares às arestas entre vértices adjacentes do outro. Poliedros duais possuem as mesmas simetrias pontuais. Note também a inexistência de pesos nos centros (pesos nulos), bem como nas arestas e nas faces nestes poliedros das irreps básicas.

3.4.3.2 B_3

As irreps básicas $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$ e $M_3 = (0, 0, 1)$ na álgebra B_3 , ou $so(7)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 7, \dim(M_2) = 21, \dim(M_3) = 8. \quad (3.46)$$

A irrep $M_1 = (1, 0, 0)$ é a fundamental.

A Tabela 3.13 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Os três pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS. Os pesos não-nulos estão nos vértices de um octaedro regular, como mostra a Figura 3.4d.

A Tabela 3.14 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . O peso nulo é triplamente degenerado. Os pesos não-nulos estão nos vértices de um cuboctaedro regular, bem como no centro de suas faces quadradas, como mostra a Figura 3.4e.

A Tabela 3.15 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_3)$ da irrep básica M_3 . Os pesos estão nos vértices de um cubo regular, como mostra a Figura 3.4f.

3.4.3.3 C_3

Vamos analisar as representações irredutíveis (irreps) básicas (3.28) da álgebra simplética C_3 ou $sp(6)$. As irreps básicas $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$ e $M_3 = (0, 0, 1)$ têm as seguintes

dimensões:

$$\dim(M_1) = 6, \dim(M_2) = 14, \dim(M_3) = 14. \quad (3.47)$$

A Tabela 3.16 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Os três pesos positivos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS. O sistema de pesos está em ordem decrescente na base FWS. Estes seis pesos estão nos vértices de um octaedro regular, como mostra a Figura 3.4g.

A Tabela 3.17 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep fundamental M_2 , de dimensão 14. O sistema de pesos está em ordem decrescente na base FWS. Os pesos não-nulos estão nos vértices de um cuboctaedro regular, como mostra a Figura 3.4h. O peso nulo (no centro) é duplamente degenerado.

A Tabela 3.18 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_3)$ da irrep fundamental M_3 , também de dimensão 14. O sistema de pesos está em ordem decrescente na base FWS. Não há degenerescências. Os pesos estão nos vértices e centrados nas faces de um cubo regular, como mostra a Figura 3.4i.

É interessante verificar as diversas interconexões entre os três poliedros gerados pelos pesos das irreps básicas. Com exceção do peso nulo, os demais pesos da irrep M_2 estão nos pontos centrais das arestas do cubo formado pelos pesos da irrep M_3 . Já os pesos da irrep M_1 estão nos pontos centrais das faces do cubo formado pelos pesos da mesma irrep M_3 . Para ser explorado: (i) cubo e octaedro são duais; (ii) o cuboctaedro é a retificação do cubo; (iii) simetrias discretas destes poliedros.

3.4.3.4 D_3

As irreps básicas $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$ e $M_3 = (0, 0, 1)$ na álgebra D_3 , ou $so(6)$, têm as seguintes dimensões:

$$\dim(M_1) = 6, \dim(M_2) = 4, \dim(M_3) = 4. \quad (3.48)$$

A irrep $M_1 = (1, 0, 0)$ é a fundamental.

A Tabela 3.19 mostra os pesos positivos do sistema de pesos $\Delta(M_1)$ da irrep fundamental M_1 . Não há degenerescências. Os pesos λ_i são linearmente independentes e formam a base FWS. Estes pesos estão nos vértices de um octaedro regular, como mostra a Figura 3.4j.

A Tabela 3.20 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_2)$ da irrep básica M_2 . Não há degenerescências. Note que o peso mais baixo $(0, 0, -1)$ não é o negativo do peso mais alto $M_2 = (0, 1, 0)$. Estes pesos estão nos vértices de um tetraedro regular, como mostra a Figura 3.4k.

A Tabela 3.21 mostra o sistema de pesos $\Delta(M_3)$ da irrep básica M_3 . Não há degenerescências. Note que o peso mais baixo $(0, -1, 0)$ não é o negativo do peso mais alto $M_3 = (0, 0, 1)$. Estes pesos estão nos vértices de um tetraedro regular, como mostra a Figura 3.4l.

As álgebras A_3 e D_3 são isomórficas. Por isso, suas irreps básicas têm as mesmas dimensões e os mesmos sistemas de pesos (numa ordem diferente).

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	CAR	λ_i
0	(1, 0, 0)	$\frac{1}{4}\{3, 2, 1\}$	$\frac{1}{4}\{3, -1, -1, -1\}$	$\frac{1}{2}\{0, \sqrt{2}, 1\}$	λ_2
1	(-1, 1, 0)	$\frac{1}{4}\{-1, 2, 1\}$	$\frac{1}{4}\{-1, 3, -1, -1\}$	$\frac{1}{2}\{0, -\sqrt{2}, 1\}$	λ_3
2	(0, -1, 1)	$\frac{1}{4}\{-1, -2, 1\}$	$\frac{1}{4}\{-1, -1, 3, -1\}$	$\frac{1}{2}\{\sqrt{2}, 0, -1\}$	λ_1
3	(0, 0, -1)	$\frac{1}{4}\{-1, -2, -3\}$	$\frac{1}{4}\{-1, -1, -1, 3\}$	$\frac{1}{2}\{-\sqrt{2}, 0, -1\}$	

Tabela 3.10: O sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra A_3 ou $su(4)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	CAR
0	(0, 1, 0)	$\frac{1}{2}\{1, 2, 1\}$	$\frac{1}{2}\{1, 1, -1, -1\}$	$\frac{1}{2}\{0, 0, 1\}$
1	(1, -1, 1)	$\frac{1}{2}\{1, 0, 1\}$	$\frac{1}{2}\{1, -1, 1, -1\}$	$\frac{1}{2}\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}$
2	(-1, 0, 1)	$\frac{1}{2}\{-1, 0, 1\}$	$\frac{1}{2}\{-1, 1, 1, -1\}$	$\frac{1}{2}\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$
2	(1, 0, -1)	$\frac{1}{2}\{1, 0, -1\}$	$\frac{1}{2}\{1, -1, -1, 1\}$	$\frac{1}{2}\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}$
3	(-1, 1, -1)	$\frac{1}{2}\{-1, 0, -1\}$	$\frac{1}{2}\{-1, 1, -1, 1\}$	$\frac{1}{2}\{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$
4	(0, -1, 0)	$\frac{1}{2}\{-1, -2, -1\}$	$\frac{1}{2}\{-1, -1, 1, 1\}$	$\frac{1}{2}\{0, 0, -1\}$

Tabela 3.11: O sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra A_3 ou $su(4)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	CAR
0	(0, 0, 1)	$\frac{1}{4}\{1, 2, 3\}$	$\frac{1}{4}\{1, 1, 1, -3\}$	$\frac{1}{2}\{\sqrt{2}, 0, 1\}$
1	(0, 1, -1)	$\frac{1}{4}\{1, 2, -1\}$	$\frac{1}{4}\{1, 1, -3, 1\}$	$\frac{1}{2}\{-\sqrt{2}, 0, 1\}$
2	(1, -1, 0)	$\frac{1}{4}\{1, -2, -1\}$	$\frac{1}{4}\{1, -3, 1, 1\}$	$\frac{1}{2}\{0, \sqrt{2}, -1\}$
3	(-1, 0, 0)	$\frac{1}{4}\{-3, -2, -1\}$	$\frac{1}{4}\{-3, 1, 1, 1\}$	$\frac{1}{2}\{0, -\sqrt{2}, -1\}$

Tabela 3.12: O sistema de pesos da irrep básica M_3 da álgebra A_3 ou $su(4)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(1, 0, 0)	{1, 1, 1}	[1, 0, 0]	λ_1
1	(-1, 1, 0)	{0, 1, 1}	[0, 1, 0]	λ_2
2	(0, -1, 2)	{0, 0, 1}	[0, 0, 1]	λ_3
3	(0, 0, 0)	{0, 0, 0}	[0, 0, 0]	

Tabela 3.13: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra B_3 ou $so(7)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 1, 0)	{1, 2, 2}	[1, 1, 0]
1	(0, -1, 2)	{1, 1, 2}	[1, 0, 1]
2	(1, 0, 0)	{1, 1, 1}	[1, 0, 0]
2	(-1, 0, 2)	{0, 1, 2}	[0, 1, 1]
3	(1, 1, -2)	{1, 1, 0}	[1, 0, -1]
3	(-1, 1, 0)	{0, 1, 1}	[0, 1, 0]
4	(2, -1, 0)	{1, 0, 0}	[1, -1, 0]
4	(-1, 2, -2)	{0, 1, 0}	[0, 1, -1]
4	(0, -1, 2)	{0, 0, 1}	[0, 0, 1]
5	(0, 0, 0)	{0, 0, 0}	[0, 0, 0]

Tabela 3.14: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra B_3 ou $so(7)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 0, 1)	$\frac{1}{2}\{1, 2, 3\}$	$\frac{1}{2}[1, 1, 1]$
1	(0, 1, -1)	$\frac{1}{2}\{1, 2, 1\}$	$\frac{1}{2}[1, 1, -1]$
2	(1, -1, 1)	$\frac{1}{2}\{1, 0, 1\}$	$\frac{1}{2}[1, -1, 1]$
3	(1, 0, -1)	$\frac{1}{2}\{1, 0, -1\}$	$\frac{1}{2}[1, -1, -1]$

Tabela 3.15: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_3 da álgebra B_3 ou $so(7)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(1, 0, 0)	{1, 1, 1/2}	[1, 0, 0]	λ_1
1	(-1, 1, 0)	{0, 1, 1/2}	[0, 1, 0]	λ_2
2	(0, -1, 1)	{0, 0, 1/2}	[0, 0, 1]	λ_3
3	(0, 1, -1)	{0, 0, -1/2}	[0, 0, -1]	$-\lambda_3$
4	(1, -1, 0)	{0, -1, -1/2}	[0, -1, 0]	$-\lambda_2$
5	(-1, 0, 0)	{-1, -1, -1/2}	[-1, 0, 0]	$-\lambda_1$

Tabela 3.16: O sistema de pesos da irrep fundamental M_1 da álgebra C_3 ou $sp(6)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(0, 1, 0)	{1, 2, 1}	[1, 1, 0]	λ_1
1	(1, -1, 1)	{1, 1, 1}	[1, 0, 1]	λ_2
2	(1, 1, -1)	{1, 1, 0}	[1, 0, -1]	λ_3
3	(2, -1, 0)	{1, 0, 0}	[1, -1, 0]	λ_4
2	(-1, 0, 1)	{0, 1, 1}	[0, 1, 1]	λ_5
3	(-1, 2, -1)	{0, 1, 0}	[0, 1, -1]	λ_6
4	(0, 0, 0)	{0, 0, 0}	[0, 0, 0]	λ_7

Tabela 3.17: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra C_3 ou $sp(6)$. As camadas estão na primeira coluna. O peso nulo na camada quatro é duplamente degenerado.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(0, 0, 1)	{1, 2, 3/2}	[1, 1, 1]	λ_1
1	(0, 2, -1)	{1, 2, 1/2}	[1, 1, -1]	λ_2
2	(1, 0, 0)	{1, 1, 1/2}	[1, 0, 0]	λ_3
3	(2, -2, 1)	{1, 0, 1/2}	[1, -1, 1]	λ_4
4	(2, 0, -1)	{1, 0, -1/2}	[1, -1, -1]	λ_5
3	(-1, 1, 0)	{0, 1, 1/2}	[0, 1, 0]	λ_6
4	(0, -1, 1)	{0, 0, 1/2}	[0, 0, 1]	λ_7

Tabela 3.18: Os pesos positivos do sistema de pesos da irrep básica M_3 da álgebra C_3 ou $sp(6)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS	λ_i
0	(1, 0, 0)	$\frac{1}{2}\{2, 1, 1\}$	[1, 0, 0]	λ_1
1	(-1, 1, 1)	$\frac{1}{2}\{0, 1, 1\}$	[0, 1, 0]	λ_2
2	(0, 1, -1)	$\frac{1}{2}\{0, 1, -1\}$	[0, 0, 1]	λ_3

Tabela 3.19: Os pesos positivos da irrep fundamental M_1 da álgebra D_3 ou $so(6)$. As camadas estão na primeira coluna. Os pesos fundamentais são λ_i .

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 1, 0)	$\frac{1}{4}\{2, 3, 1\}$	$\frac{1}{2}[1, 1, 1]$
1	(1, -1, 0)	$\frac{1}{4}\{2, -1, 1\}$	$\frac{1}{2}[1, -1, -1]$
2	(-1, 0, 1)	$\frac{1}{4}\{-2, -2, 1\}$	$\frac{1}{2}[-1, 1, -1]$
3	(0, 0, -1)	$\frac{1}{4}\{-2, -1, -3\}$	$\frac{1}{2}[-1, -1, 1]$

Tabela 3.20: O sistema de pesos da irrep básica M_2 da álgebra D_3 ou $so(6)$. As camadas estão na primeira coluna.

$L(\lambda)$	DYN	SRS	FWS
0	(0, 0, 1)	$\frac{1}{4}\{2, 1, 3\}$	$\frac{1}{2}[1, 1, -1]$
1	(1, 0, -1)	$\frac{1}{4}\{2, 1, -1\}$	$\frac{1}{2}[1, -1, 1]$
2	(-1, 1, 0)	$\frac{1}{4}\{-2, 1, -1\}$	$\frac{1}{2}[-1, 1, 1]$
3	(0, -1, 0)	$\frac{1}{4}\{-2, -3, -1\}$	$\frac{1}{2}[-1, -1, -1]$

Tabela 3.21: O sistema de pesos da irrep básica M_3 da álgebra D_3 ou $so(6)$. As camadas estão na primeira coluna.

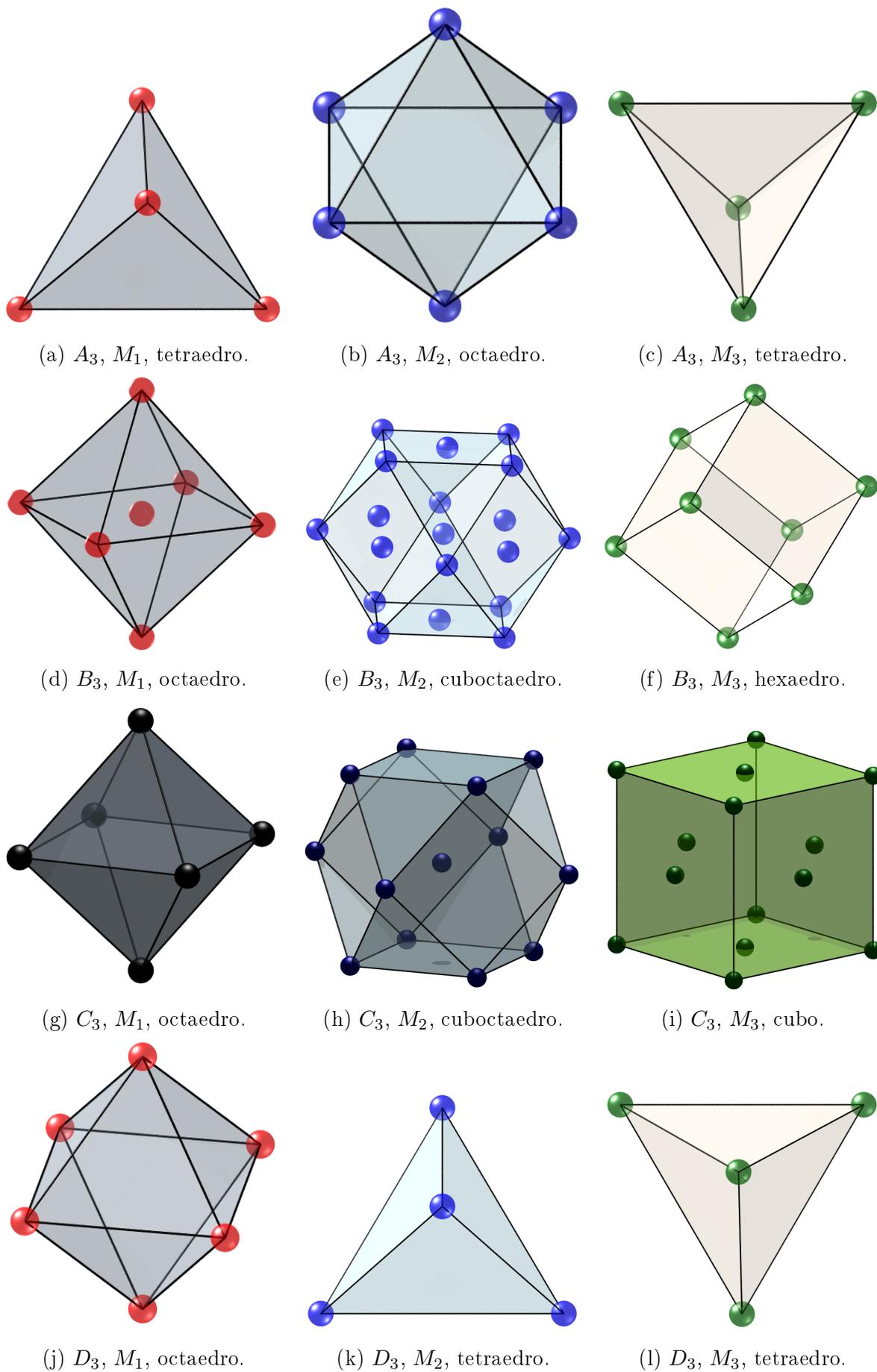


Figura 3.4: Representações irredutíveis básicas das álgebras clássicas de posto três, visualizadas na forma de poliedros.

Referências Bibliográficas

- [1] Jialun Ping, Fan Wang, and Jin-Quan Chen. *Group Representation Theory for Physicists*. World Scientific, 2nd edition, 2002.
- [2] F. Iachello. *Lie Algebras and Applications*. Springer, 2006.
- [3] L. A. B. San Martin. *Algebras de Lie*. Unicamp, 2010.
- [4] N. Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras. Chs. 7–9*. Springer, 2005.