

Gravitação

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

27 de novembro de 2023

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

1	Gravitação	1
1.1	Um sistema de dois corpos	2
1.1.1	Centro de massa	2
1.1.2	Energia cinética	4
1.1.3	Forças e torques	5
1.2	Força gravitacional	6
1.2.1	Proposta newtoniana	6
1.2.2	Força central	8
1.3	Trajetoórias	10
1.3.1	Sistema reduzido	10
1.3.2	Energia mecânica + momentum angular	10
1.3.3	Segunda lei + momentum angular	14
1.3.4	Segunda lei + energia mecânica + momentum angular + excentricidade	16
1.3.5	O desvio da luz	18
1.4	Exercícios	19

Capítulo 1

Gravitação

Gravitação é a parte da ciência que estuda a atração mútua entre corpos materiais. A gravitação como ciência iniciou-se com o modelo heliocêntrico proposto por Copérnico em 1543. Suas idéias, extremamente revolucionárias para a época, influenciaram profundamente Kepler, o qual, após examinar um volume gigantesco de observações astronômicas durante o período de 1609 a 1619, foi capaz de descobrir as leis fundamentais do sistema heliocêntrico, conhecidas hoje como leis de Kepler. Detalhe importante, a idéia de atração mútua, isto é, da existência de uma força de atração entre massas foi introduzida por Newton, muito tempo depois.

Newton foi capaz de deduzir as leis de Kepler em 1680 a partir de suas leis da mecânica, com base no conceito de força como causa de qualquer movimento. Ter associado o movimento de planetas a uma força foi um feito realmente impressionante para a época dele. Segundo Newton, os planetas seguem em suas órbitas estáveis em um espaço imutável, descrito pela geometria Euclideana, com um tempo absoluto, graças a uma força de atração agindo a distância e instantaneamente, a qual passou a ser conhecida por força gravitacional. Para haver esta força,

corpos precisam ter massa (ou carga) gravitacional, a qual se mostrou idêntica à massa inercial aparecendo na segunda lei de Newton. Portanto, Newton foi o primeiro a explorar quantitativamente este fato curioso sobre a nossa natureza: a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. Newton também realizou muitos experimentos para verificar esta igualdade, tendo constatado sua veracidade com uma precisão de uma parte em dez. é ainda mais surpreendente que esta mesma igualdade entre massa inercial e massa gravitacional tenha também aberto as portas para o advento da teoria da relatividade geral de Einstein em 1915, a qual corrige e reinterpreta a teoria Newtoniana da gravitação.

Na teoria da relatividade geral de Einstein, o tempo não é absoluto e nem o espaço é imutável. Agora tempo e espaço se juntam para formar um novo espaço: o espaçotempo. Este espaçotempo não é Euclideano, pois ele pode ser curvado. Einstein conseguiu descrever intrinsicamente (sem termos que sair dele) as propriedades geométricas deste espaçotempo, como curvatura e torção, através de um conjunto de equações diferenciais. Segundo Einstein, a forma do espaçotempo é ditada pela presença de matéria (e energia). Na ausên-

cia de matéria, o espaçotempo é plano, obedecendo a métrica de Minkowski da relatividade especial, com um subespaço tridimensional idêntico ao espaço Euclidiano usado por Newton. Segundo Einstein, a força Newtoniana é o efeito de movimentarmos num espaçotempo curvado pela presença do Sol e da Terra, ou seja, que gravidade é equivalente a um movimento acelerado. Naturalmente, muitos experimentos comprovam a existência de um espaçotempo curvo (nao-Euclidiano) bem como os resultados previstos pelas equações de Einstein.

Na Seção 1.1, veremos como um problema de dois corpos, representando um sistema solar formado pelo Sol e pela Terra, isolados no universo, pode ser reduzido ao problema de um único corpo. Na Seção 1.2, estudaremos a energia potencial de Kepler, a qual dá origem à força gravitacional Newtoniana. Veremos na Seção 1.3 como as leis de Kepler podem ser derivadas explicitamente da força gravitacional Newtoniana.

1.1 Um sistema de dois corpos

1.1.1 Centro de massa

Naturalmente, consideraremos aqui uma versão bastante simplificada do nosso sistema solar: o Sol com massa $m_1 = M$ e um planeta apenas, a Terra, por exemplo, de massa $m_2 = m$, como indicado na Figura 1.1. Por comodidade, consideraremos este sistema com isolado no universo.

Este é um sistema de dois corpos, o

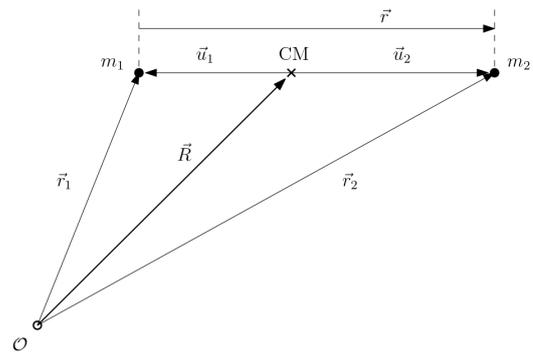


Figura 1.1: Coordenadas de um sistema formado por dois corpos m_1 e m_2 . O vetor \vec{R} indica a posição do centro de massa (CM).

qual será mantido isolado dos demais corpos. Desta forma, teremos uma excelente oportunidade de aplicar as leis de Newton a um sistema constituído por mais de um corpo. Supondo que este sistema esteja isolado, então a força resultante $\vec{F}_R = \vec{P}_R$, onde \vec{P}_R é o momentum linear resultante, é nula,

$$\vec{F}_R = \vec{P}_R = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0. \quad (1.1)$$

Portanto, de acordo com o Teorema da Conservação do Momentum Linear, há conservação do vetor momentum linear total,

$$\vec{P}_R = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2, \quad \dot{\vec{P}}_R = 0. \quad (1.2)$$

Desta forma, de acordo com a primeira lei de Newton, este sistema solar ou está em movimento uniforme ou está em repouso. No entanto, os dois corpos que compõem este sistema estão interagindo através de uma força (gravitacional), como proposto pela primeira vez por Newton em meados do Séc. XVII. Isto significa que há movimento relativo entre estes dois corpos, movimento este não uniforme. Como podemos descrever este movi-

mento relativo? Qual será o melhor sistema de coordenadas? Qual será a melhor maneira de encontrarmos as equações horárias destes dois corpos? Por construção, o sistema Sol-Terra está em movimento uniforme. Assim, a primeira providência é eliminar esse movimento uniforme. A forma mais eficiente de fazermos isto é introduzindo o vetor posição centro de massa \vec{R} mostrado na Figura 1.1

Em geral, em um sistema contendo N corpos discretos, o vetor posição Centro de massa (CM) \vec{R} é definido por uma média ponderada de todas as posições individuais \vec{r}_i com as respectivas massas m_i atuando como pesos,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (1.3)$$

A Figura 1.1 mostra o vetor posição centro de Massa para um sistema de dois corpos. Como veremos, este vetor posição do centro de massa tem um papel muito importante na dinâmica de um sistema de muitos corpos. Vale ressaltar que, sendo o sistema formado por uma distribuição contínua de massa, as massa e somas em (1.3) devem ser trocadas, respectivamente, por massas infinitesimais e integrais na região contendo massa,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V dm \vec{r}, \quad M = \int_V dm, \quad (1.4)$$

onde dm é uma quantidade infinitesimal de massa ocupando o volume (ou área, ou comprimento) infinitesimal dV e \vec{r} é o vetor posição da massa dm . A integração deve ser feita sobre toda a região V contendo massa e $\rho = dm/dV$ é a densidade de massa nesta região. Cálculos de centros de massa de dis-

tribuições contínuas são exercícios excelentes de cálculo com muitas variáveis.

Os novos vetores posições $\vec{u}_i = \vec{r}_i - \vec{R}$, relativos ao centro de massa, como mostrados na Figura 1.1, possuem uma propriedade interessante. Inserindo as coordenadas relativas ao centro de massa via $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{u}_i$ na definição do centro de massa (1.3) (faça o Exercício 3), obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{u}_i = 0, \quad \vec{u}_i = \vec{R} - \vec{r}_i. \quad (1.5)$$

Este resultado será muito útil logo adiante. Este resultado simplesmente diz que o vetor centro de massa em relação ao centro de massa (CM) é nulo.

De volta ao nosso sistema inicial de dois corpos: o sistema solar Sol-Terra (veja a Figura 1.1). Segundo a definição (1.3), o centro de massa do sistema Sol-Terra é

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2), \quad M = m_1 + m_2. \quad (1.6)$$

A posição do centro de massa de um sistema de dois corpos pertence à curva de menor comprimento ligando estes dois corpos. Esta curva é denominada de geodésica. No caso de um espaço Euclidiano, onde o nosso sistema solar está inserido, esta geodésica é uma reta. A demonstração deste resultado é um exercício muito interessante de Geometria Analítica (faça o Exercício 2). Contraste este resultado com um espaço formado por uma casca esférica, onde geodésicas são arcos de circunferências (as quais não são retas).

Suponha que as massas em (1.6) sejam constantes. Então podemos multiplicar o

centro de massa pela massa total e derivar o resultado no tempo,

$$M\dot{\vec{R}} = (m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2) = \vec{P}_R. \quad (1.7)$$

Este resultado nos mostra que o nosso sistema contendo dois corpos pode ser visto como um único corpo de massa total $M = m_1 + m_2$ colocado na posição do centro de massa. Por isto, quando estamos interessados no movimento de um sistema de muito corpos como um todo, a posição centro de massa é importante. Naturalmente, derivando a (1.7) mais uma vez no tempo obtemos a segunda lei de Newton

$$M\ddot{\vec{R}} = (m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2) = \vec{P}_R = \vec{F}_R. \quad (1.8)$$

Este resultado reforça a interpretação onde trocamos o sistema de muitos corpos por um único corpo de massa M , igual à massa total do sistema, localizada na posição do centro de massa, atuada pela força resultante do sistema. Independentemente do movimento relativo dos corpos que compõem o sistema, o movimento do sistema como um todo pode ser descrito como o movimento de um único corpo localizado no centro de massa. Este resultado vale para um sistema com um número arbitrário de componentes. Esta reinterpretação em termos de um único corpo de massa total é útil para visualizarmos o movimento do centro de massa do sistema de muitos corpos, sem nos preocupar com o movimento de seus constituintes.

1.1.2 Energia cinética

Como o nosso sistema solar Sol-Terra está isolado, portanto o seu centro de massa está em movimento uniforme, vamos procurar uma maneira de visualizar o movimento interno de seus constituintes. Para isto, mudaremos a origem do nosso referencial inercial para a posição do centro de massa, onde as posições do Sol e da Terra são dadas pelos novos vetores posições \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente (veja a Figura 1.1). Este movimento interno pode ser muito bem compreendido analisando a energia cinética deste sistema. A energia cinética total de um sistema de N corpos (sem rotações) é a soma individual das energias cinéticas de cada corpo,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2. \quad (1.9)$$

Introduzindo as coordenadas \vec{u}_i relativas ao centro de massa, definidas na Figura 1.1, $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{u}_i$, a energia cinética (1.9) pode ser reescrita como

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}}_i|^2 = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{u}}_i|^2 + \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{u}}_i \right) \cdot \dot{\vec{R}}. \quad (1.10)$$

Como podemos ver, o último termo na energia cinética (1.10) contém a derivada de (1.5), a qual, conseqüentemente, é nula também. Portanto, a energia cinética total (1.10) pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{u}}_i|^2. \quad (1.11)$$

Este resultado nos ensina que a energia cinética total é a soma de duas parcelas: uma parcela é devido ao movimento do sistema como um todo, ou seja, de uma massa M na posição do centro de massa com velocidade $\dot{\vec{R}}$. A outra parcela é a energia cinética do movimento relativo (ao centro de massa) dos corpos que constituem o sistema. Em outras palavras, há claramente dois movimento neste sistema que podem ser separados completamente. Isto nos permite concentrar nossa atenção em um deles, por exemplo, no movimento relativo ao centro de massa.

Para o nosso sistema de dois corpos, usando (1.11), a energia cinética do movimento relativo ao centro de massa é

$$E_c = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{u}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{u}}_2|^2. \quad (1.12)$$

É extremamente interessante re-escrever esta energia cinética em termos do vetor posição $\vec{r} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ (veja a Figura 1.1). Usando o resultado (1.5) com $N = 2$, temos (faça o Exercício 4)

$$\vec{u}_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{u}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}, \quad (1.13)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total. Vale observar que este resultado somente é válido para um sistema de dois corpos. Substituindo estes resultados na energia cinética (1.12), obtemos (faça o Exercício 5)

$$E_c = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.14)$$

Note que a constante μ tem a dimensão de massa. Ela é denominada de massa reduzida

do sistema de dois corpos,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (1.15)$$

Esta massa reduzida μ nos permite reinterpretar a energia cinética (1.14), do movimento relativo, como sendo a energia cinética de um único corpo de massa reduzida μ , localizada pelo vetor posição \vec{r} , cuja taxa de variação no tempo nos dá a velocidade $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Portanto, conseguimos um feito extraordinário: nós reduzimos um problema de dois corpos a um problema de um único corpo. Entretanto, esta redução é possível apenas em um sistema de dois corpos.

Importante: devemos tomar o cuidado de não colocar a origem do sistema de coordenadas inercial em uma das massas, pois elas estão em movimento, o qual pode ser acelerado. Não devemos esquecer que a segunda lei de Newton é válida somente em referenciais inerciais. Como veremos, é importante que esta redução seja compatível também com a energia potencial deste sistema.

1.1.3 Forças e torques

Note também que, estando o sistema de dois corpos isolado, então a força resultante em (1.8) deve ser nula, $\vec{F}_R = 0$. Isto significa que as forças internas $\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1$ e $\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2$ agindo neste sistema precisam obedecer a terceira lei de Newton, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Portanto, a força gravitacional proposta por Newton, a qual é atrativa, deve agir ao longo da reta que passa pelas massas m_1 e m_2 .

É interessante observar como fica a segunda lei para um dos corpos, digamos para o corpo

de massa $m_2 = m$ (Terra), $\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2$, quando reescrita em termos do vetor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Para isto, devemos usar as relações (veja a Figura 1.1)

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \quad (1.16)$$

para expressar os vetores posição de cada um dos corpos em termos do vetor centro de massa \vec{R} e do vetor relativo \vec{r} ,

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}, \quad (1.17)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total. Assim,

$$\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\ddot{\vec{R}} + \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \mu\ddot{\vec{r}}, \quad (1.18)$$

onde usamos o fato do centro de massa não possuir aceleração, $\ddot{\vec{R}} = 0$. Como veremos, a proposta newtoniana para \vec{F}_2 dependerá do vetor relativo \vec{r} e das massas m_1 e m_2 (cargas gravitacionais). Portanto, vemos em (1.18) uma alteração apenas na intensidade da carga inercial (massa), pois $\mu < m_2$.

Vamos calcular o torque resultante destas duas forças internas:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

pois a força \vec{F}_2 é anti-paralela ao vetor \vec{r} . Assim, o momentum angular total é uma quantidade conservada,

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 + \vec{L}_2 &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \\ &= \vec{R} \times (M\dot{\vec{R}}) + \vec{r} \times \vec{p}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde usamos $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$. O primeiro termo após

a última igualdade em (1.20) é o momentum angular do centro de massa, o qual é independente do tempo por não haver uma força externa atuando no centro de massa (e, conseqüentemente, um torque externo). Então o último termo em (1.20) é também uma quantidade conservada,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu\vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.21)$$

1.2 Força gravitacional

1.2.1 Proposta newtoniana

Newton propôs uma força atrativa entre corpos materiais que pudesse explicar as leis de Kepler:

1. A órbita de um planeta é uma elipse com o Sol em um de seus focos.
2. A área formada pela trajetória, pela reta que une os centros de massa do Sol e do planeta e uma reta fixa de referência (geralmente a reta contendo o semi-eixo maior da trajetória) é constante no tempo.
3. A razão entre o cubo da distância média a (a ser definida) do planeta até o Sol e o quadrado do período orbital τ é uma constante para todos os planetas, $a^3/\tau^2 = cte$.

A primeira lei de Kepler estabelece que a trajetória é uma curva espacial plana, sem torção, fechada, dada por uma elipse, a qual é uma seção cônica muito bem conhecida. A segunda estabelece que um planeta deve ter

uma velocidade tangencial maior quando estiver mais próximo do Sol. Estas duas leis dificilmente dão qualquer pista para Newton estabelecer a forma que deve ter a sua força gravitacional. No entanto, a terceira lei parece ser útil neste sentido.

Suponha que uma órbita circular (um caso extremo de uma elipse) de raio a (igual à distância média), com o Sol de massa M no centro (aqui M não é a massa total). Seja v o módulo da velocidade tangencial do planeta de massa m nesta órbita circular. Então o período τ desta órbita (movimento circular uniforme) é $\tau = 2\pi a/v$ (comprimento da trajetória circular pela velocidade uniforme). Num movimento circular de raio a , o módulo da aceleração (centrípeta) é v^2/a , onde v é o módulo da velocidade tangencial. Esta aceleração multiplicada pela massa m do planeta deve ser igual ao módulo da força (gravitacional) agindo sobre ela (segunda lei de Newton). Após algumas tentativas, Newton pôde supor uma força gravitacional cujo módulo é MGm/a^2 , isto para que a velocidade tangencial possa ser escrita como $v = \sqrt{MG/a}$, onde G é uma constante universal. Substituindo esta velocidade na expressão do período, $\tau = 2\pi a/v$, obtemos a terceira lei de Kepler, $\tau^2/a^3 = 4\pi^2/MG$. Isto significa que a força gravitacional atrativa procurada por Newton deve ter as seguintes características: (1) ser proporcional ao produto entre as duas massas; (2) ser inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as massas; e (3) estar ao longo da reta que passa pelas duas massas. Colocando a origem de um sistema de coordenadas inercial na posição do Sol,

massa M , então as características acima podem ser re-escritas na forma

$$\vec{F} = -K \frac{\hat{r}}{r^2} = -K \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad K = MGm, \quad (1.22)$$

onde \vec{r} é o vetor posição do planeta de massa $m_2 = m$ (massa teste) em relação à posição do corpo de massa $m_1 = M$ (fonte), conforme ilustrado na Figura 1.1, e G uma constante (universal), $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

Importante: naturalmente, considerando dois corpos como a Terra ($m = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$) e o Sol ($M = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$), onde a massa do Sol é cerca de 300 mil vezes maior que a massa da Terra, podemos supor que o Sol seja um referencial inercial. No entanto, manteremos em mente que a origem do nosso sistema de coordenadas (inercial) não está em nenhum destes dois corpos, mas no centro de massa (CM), conforme ilustrado na Figura 1.1.

A força gravitacional (1.22) agindo na massa m (Terra) é conservativa? A resposta depende do trabalho associado a esta força ser independente da trajetória ou não. Então, vamos calcular o trabalho que um agente externo deve realizar para levar a massa m desde uma distância muito grande (tomando o devido cuidado para manter m sempre longe de outros corpos além de M) até uma distância r de M . Usando a definição de trabalho, este trabalho é

$$\Delta W = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (1.23)$$

onde $d\vec{s}$ é o deslocamento infinitesimal sobre uma determinada trajetória. Como a força gravitacional (1.22) é radial, isto é,

$\vec{F} = F_r(r)\hat{r}$, com r sendo uma das coordenadas esféricas, podemos escrever o deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ como $d\vec{s} = dr\hat{r} + d\vec{\Omega}$, onde $d\vec{\Omega}$ é perpendicular ao deslocamento infinitesimal $d\vec{r} = dr\hat{r}$ na direção radial. Desta forma,

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = (F_r\hat{r}) \cdot (dr\hat{r} + d\vec{\Omega}) = F_r dr, \quad (1.24)$$

pois $\hat{r} \cdot d\vec{\Omega} = 0$ por serem perpendiculares. Assim, o trabalho (1.23) pode ser reescrito como

$$\Delta W = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = -K \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{K}{r}, \quad (1.25)$$

para uma trajetória qualquer. Note que a integral na segunda igualdade desta expressão não depende mais da orientação dos vetores força e posição, mas somente da distância r até a massa M . Portanto, a força gravitacional (1.22) é conservativa. Isto implica que há uma função energia potencial neste sistema solar. Esta energia potencial, segundo a sua definição, é menos o trabalho realizado (1.25),

$$V = -\frac{K}{r} = -\frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1.26)$$

onde x , y e z são as coordenadas do vetor posição \vec{r} da massa m e $K = GMm$. Por razões históricas, esta energia potencial é conhecida como a “energia potencial de Kepler”, embora Kepler não a tenha sugerido diretamente. Naturalmente, a força gravitacional (1.22) pode ser obtida desta energia potencial via o operador gradiente (Faça o Exercício 1).

A energia potencial de Kepler (1.26) tem uma característica muito especial. Embora ela seja uma função de três variáveis (em

coordenadas Cartesianas), podemos visualizar suas curvas de níveis $V = cte < 0$, as quais são superfícies esféricas de raio $K/|V|$. Isto significa que a energia potencial de Kepler tem o mesmo valor sobre uma casca esférica. Uma energia potencial com esta característica é dita possuir uma simetria esférica. Por isso, quando expressa em coordenadas esféricas, a energia potencial de Kepler se apresenta na sua forma mais simples possível, como pode ser vista na primeira igualdade em (1.26). Uma energia potencial com simetria esférica também é denominada de energia potencial central, ou seja, é uma energia potencial que depende apenas do módulo do vetor posição do objeto sob sua ação. Qualquer sistema com uma energia potencial com simetria esférica é melhor descrito em coordenadas esféricas.

1.2.2 Força central

A força gravitacional (1.22) proposta por Newton é um caso particular de uma “força central”,

$$\vec{F}_c = F_r(r)\hat{r}, \quad (1.27)$$

a qual é radial e sua componente radial (única) depende apenas da coordenada radial r (do sistema esférico de coordenadas). Assim, uma força central terá o mesmo módulo em qualquer lugar em uma casca esférica de raio r . Por isto uma força central possui simetria esférica.

Uma força central produz um torque nulo (em relação à origem):

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}_c = F_r(r)\vec{r} \times \hat{r} = 0. \quad (1.28)$$

Portanto, o momentum angular é conservado (inteiramente). Isto implica em uma trajetória plana. O vetor momentum angular resulta do produto vetorial entre os vetores posição e momentum linear ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$), portanto ele é perpendicular ao vetor velocidade, o qual é tangente à trajetória. Como a direção do vetor momentum angular não pode mudar, a trajetória deve permanecer sempre no plano perpendicular ao vetor momentum angular.

Como a trajetória criada por uma força central é plana, podemos usar o sistema polar de coordenadas (r, θ) para descrevê-la. Usando a mesma notação das notas de aulas auxiliares, Sistemas de Coordenadas, Seção II.1, temos (veja a Figura 1), temos:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (1.29)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad (1.30)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (1.31)$$

e

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r, \quad (1.32)$$

onde $\hat{e}_r = \hat{r}$ é o versor da direção radial e $\hat{e}_\theta = \hat{\theta}$ é o versor da direção tangencial. Sendo o sistema polar de coordenadas um sistema ortonormal de coordenadas, temos $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0$ and $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{k}$. Resta apenas escrever o vetor momentum angular em coordenadas polares,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\dot{\theta} \hat{k}. \quad (1.33)$$

Uma força central leva também à conservação da energia mecânica. Para provar isto, devemos provar que o trabalho da força central numa trajetória fechada é nulo. Como o deslocamento infinitesimal pode ser

escrito como $d\vec{r} = \vec{v} dt$, então de (1.30), temos $d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta$ e, portanto, $\vec{F}_c \cdot d\vec{r} = F_r(r) dr$, cuja integral numa trajetória fechada é nula (por ter limites de integração iguais). Este mesmo procedimento pode ser aplicado usando as coordenadas esféricas (tridimensionais). Consequentemente, toda força central é derivada de uma energia potencial V_c ,

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla} V_c = -\frac{d}{dr} V_c(r) \hat{r}. \quad (1.34)$$

A conservação do momentum angular leva a outra propriedade interessante, além da torção nula (trajetória plana), porém inesperada: a taxa de variação temporal da área varrida pelo vetor posição é constante (segunda lei de Kepler). A área varrida pelo vetor posição, conforme ilustrado na Figura 1.2, é a metade da área do paralelogramo formado pelos vetores posição \vec{r} e seu deslocamento infinitesimal $d\vec{r} = \vec{v} dt$. Então, da propriedade geométrica do produto vetorial,

$$2dA = \|\vec{r} \times d\vec{r}\| = \|\vec{r} \times \vec{v}\| dt, \quad (1.35)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \|\vec{r} \times \vec{p}\| = \frac{L}{2m}, \quad (1.36)$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momentum linear e L é o módulo do momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, o qual é constante neste sistema. Desta forma, a taxa de variação da área varrida pelo vetor posição é constante. Esta é a expressão matemática da segunda lei de Kepler. Observe como ela é obtida elegantemente usando propriedades do produto vetorial e da primeira

taxa de variação do vetor posição.

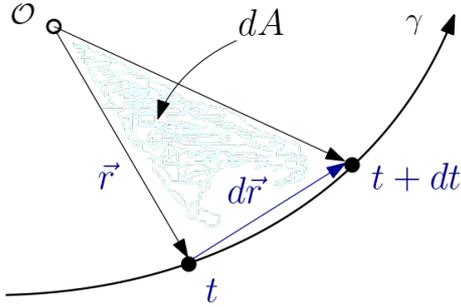


Figura 1.2: Área dA varrida pelo vetor posição \vec{r} .

1.3 Trajetórias

1.3.1 Sistema reduzido

Vamos considerar aqui o sistema de corpos reduzido a um corpo. Isto significa que iremos ignorar todos os termos dependentes do vetor posição do centro de massa em qualquer quantidade de interesse. Vale ressaltar que continuamos no referencial inercial \mathcal{O} mostrado na Figura 1.1.

A segunda lei de Newton. Como a força gravitacional proposta pelo Newton é uma força central, então a segunda lei de Newton para o sistema reduzido é

$$\vec{F}_2 = -\frac{K}{r^2} \hat{r} = \dot{\vec{p}} = \mu \ddot{\vec{r}},$$

$$K = MGm, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad (1.37)$$

conforme discutido na Seção 1.1.3. A derivada segunda $\ddot{\vec{r}}$ em coordenadas polares está dada em (1.31).

Momentum angular. Conforme discutido na Seção 1.1.3 (e também na Seção 1.2.2), o mo-

mentum angular do sistema reduzido,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{k}, \quad (1.38)$$

é uma quantidade conservada.

Energia mecânica. A energia mecânica dos sistema reduzido,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}, \quad (1.39)$$

é uma quantidade conservada, conforme podemos verificar diretamente tomando a derivada temporal e usando a segunda lei.

A segunda lei de Kepler. Como a Seção 1.2.2 considera uma força central arbitrária, a derivação adaptada para o nosso sistema reduzido nos dá a segunda lei de Kepler na forma,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}, \quad (1.40)$$

onde dA é a área varrida pelo vetor \vec{r} no intervalo de tempo dt .

1.3.2 Energia mecânica + momentum angular

Há mais quantidades conservadas neste problema, além da energia mecânica? Havendo mais quantidades conservadas, talvez haja mais simplificações. Afinal, temos uma energia potencial com simetria esférica, a qual produz uma força na direção radial, isto é, na direção do versor \hat{r} na Figura 1.1. De fato, dado estas condições, podemos mostrar que o vetor momentum angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}, \quad (1.41)$$

é também uma quantidade conservada, ou seja, independente do tempo (faça o Exercício 6).

Ter encontrado esta outra quantidade conservada é uma dádiva! De imediato, vemos que o movimento do nosso sistema solar deve ocorrer em um plano, pois \vec{L} é perpendicular a \vec{r} e \vec{p} , segundo a definição (1.41) e a definição de produto vetorial. Então podemos levar a trajetória para o plano XY e, conseqüentemente, o momento angular para o eixo Z . Em termos operacionais, isto significa que as coordenadas esféricas se reduzem a coordenadas polares (r, θ) . Esta redução ao sistema de coordenadas polares facilita bastante nosso trabalho. Por exemplo, da conservação do momentum angular (1.41) obtemos (Faça o Exercício 7)

$$L = \mu r^2 |\dot{\theta}|, \quad \dot{L} = 0, \quad (1.42)$$

a qual pode ser usada para expressar o módulo da velocidade angular $\dot{\theta}$ em função da distância radial e do módulo (constante) do vetor momentum angular.

O módulo do vetor velocidade pode ser escrito numa forma simples em coordenadas polares (Exercício 7),

$$v^2 = \|\dot{\vec{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}, \quad (1.43)$$

onde usamos a Eq. (1.42) na última igualdade. Note que a conservação do momentum angular nos permite eliminar a velocidade angular da energia cinética, a qual contém agora apenas um termo cinético (a velocidade radial, a qual indica a rapidez com que a Terra

se aproxima ou se afasta do Sol).

Desta forma, a energia mecânica será

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r), \quad U(r) = \frac{L^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} - \frac{K}{r}. \quad (1.44)$$

Note que esta expressão pode ser interpretada como a energia cinética de uma massa (reduzida) μ , com velocidade (escalar) \dot{r} , sujeita a uma energia potencial efetiva U (veja a Figura 1.3). Será a análise desta energia potencial que irá nos revelar as possíveis trajetórias do nosso sistema original (Terra-Sol).

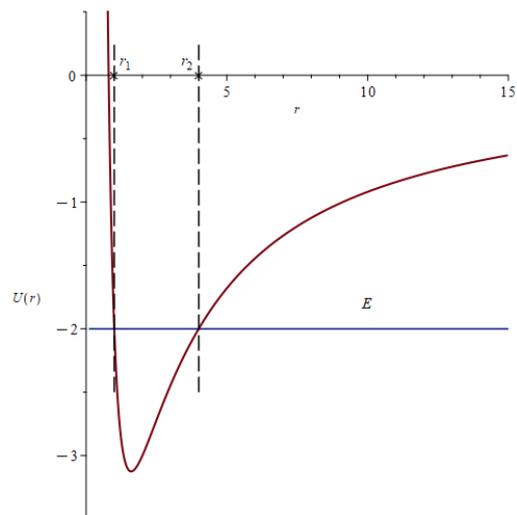


Figura 1.3: Energia potencial efetiva $U(r)$ para o problema de dois corpos reduzido ao problema de um corpo na presença da energia potencial de Kepler. Os pontos de retorno ($E = U$) são $r_- = r_1$ e $r_+ = r_2$.

Suponha que a energia mecânica tenha o valor dado na Figura 1.3 (linha horizontal E). Quando a energia mecânica se iguala à energia potencial efetiva, $E = U$, temos as duas posições denotadas por r_{\pm} , denominadas de pontos de retorno ($r_- = r_1$ e $r_+ = r_2$ na Figura 1.3). Nestas posições, a energia ciné-

tica $T = E - U$ deve ser nula, o que implica $\dot{r} = 0$, ou seja, a trajetória não muda na direção radial. Como $r_- < r_+$, então r_- será a distância mínima entre a Terra e o Sol (periélio) e r_+ será a distância máxima (afélio). Ao atingir a distância máxima, o objeto precisa se aproximar da origem novamente. Portanto, a trajetória gerada para aquele valor da energia mecânica deve ser uma curva fechada. Até o momento não podemos dizer exatamente qual curva é esta, apenas afirmar que é uma curva fechada. Seguindo o mesmo raciocínio, mostre que se a energia mecânica tiver o mesmo valor da energia potencial efetiva em seu ponto de mínimo, a curva será uma circunferência (calcule o valor do raio em função dos demais parâmetros constantes). Mostre também que a trajetória será uma curva aberta (contendo apenas um ponto de retorno) para uma energia mecânica positiva.

A outra opção é usar (1.42) novamente para eliminar o parâmetro tempo em (1.44), pois de (1.42) temos $dt = \mu r^2 |d\theta|/L$. Assim, (1.44) pode ser re-escrita como (Exercício 8)

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + U(r), \quad (1.45)$$

onde

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} - \frac{K}{r}, \quad (1.46) \quad \text{com}$$

é a nova energia potencial (ou a energia potencial efetiva). Esta forma é adequada para determinarmos a equação da trajetória diretamente, $r = r(\theta)$, sem a necessidade do parâmetro tempo. Lembre-se que a trajetória do nosso sistema é uma curva no plano XY

cujos os pontos são os valores das coordenadas (r, θ) .

Agora estamos em posição de determinarmos as famosas três leis de Kepler para o movimento planetário. Note que podemos fazer isto. Então vamos fazê-lo porque podemos. Primeiro a primeira lei, a qual diz respeito à forma da trajetória. Interessados na trajetória, então é melhor usarmos a energia mecânica na forma (1.45). Note que as variáveis r e θ podem ser isoladas em (1.45),

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} r^4 + \frac{2\mu k}{L^2} r^3 - r^2}} \\ &= \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu k}{L^2} r^{-1} - r^{-2}}}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Esta integral do lado direito pode ser colocada numa forma canônica, isto é, numa forma em que ela possa ser encontrada em uma tabela de integrais, efetuando a transformação $\chi = 1/r$. Com esta transformação, a expressão (1.47) pode ser colocada na seguinte forma (faça o Exercício 9):

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= - \int \frac{d\chi}{\sqrt{\alpha + \beta \chi + \gamma \chi^2}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1} \left(- \frac{\beta + 2\gamma \chi}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\alpha = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad \beta = \frac{2\mu K}{L^2}, \quad \gamma = -1. \quad (1.49)$$

Desta forma, invertendo o arco cosseno em (1.48) e fazendo algumas manipulações algébricas para eliminar as constantes α , β e γ , temos a equação da trajetória (faça o Exercício

cio 10):

$$\frac{1}{r} = C[1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (1.50)$$

com

$$C = \frac{\mu K}{L^2}, \quad e = \sqrt{1 + 2\frac{E}{\epsilon}}, \quad \epsilon = \frac{\mu K^2}{L^2}. \quad (1.51)$$

Esta é a equação de uma cônica com um dos focos na origem. Isto significa que o nosso vetor posição tem sua origem em um dos focos, ou seja, que o nosso sol está em um dos focos. Note que a constante ϵ em (1.50) tem dimensões de energia e serve como uma “unidade” de energia para o nosso sistema solar. A constante e é a excentricidade da seção cônica. Dependente do valor da excentricidade e , a seção cônica (1.50) pode ser classificada em quatro trajetórias:

$$\begin{aligned} e > 1 &\Rightarrow E > 0, && \text{hiperbóle,} \\ e = 1 &\Rightarrow E = 0, && \text{parábola,} \\ e < 1 &\Rightarrow E < 0, && \text{elipse,} \\ e = 0 &\Rightarrow E = -\epsilon, && \text{circunferência.} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Note que a energia mecânica precisa ser negativa para haver trajetórias fechadas, pois neste caso haverá dois pontos de retorno para a coordenada r , conforme indicado na Figura 1.3. Estes pontos de retorno significam que a trajetória correspondente será fechada. Pontos de retorno diferentes (iguais) implicam em uma trajetória elíptica (circular). É comum nos referirmos a este sistema com energias negativas como um sistema ligado.

A Figura 1.3 mostra a energia potencial

efetiva $U(r)$, definida em (1.44), e uma energia mecânica negativa. Nos pontos de retorno, devemos ter $\dot{r} = 0$. Portanto, substituindo $\dot{r} = 0$ em (1.44) e resolvendo a equação do segundo grau resultante em r , obtemos

$$r_{\pm} = -\frac{K}{2E}(1 \pm e). \quad (1.53)$$

Estes valores correspondem aos pontos de retorno em uma elipse ($E < 0$): r_- é a menor distância da Terra ao Sol (periélio) e r_+ é a maior distância da Terra ao Sol (afélio). O semi-eixo maior de uma elipse é

$$a = \frac{r_+ + r_-}{2} = -\frac{K}{2E}, \quad (1.54)$$

ou

$$r_{\pm} = a(1 \pm e). \quad (1.55)$$

Note que, em $t = 0$, temos $\theta(0) = \theta_0$. Substituindo esta informação na equação da trajetória (1.50), teremos $r(0) = r_0 = 1/C(1 + e)$. Esta última condição inicial também pode ser escrita como $r_0 = r_-$, ou seja, escolhemos o periélio como posição inicial (Exercício 11). Então Kepler tinha razão, as órbitas de nossos planetas são elipses. Geralmente, encontramos na literatura especializada (veja www.solarviews.com ou ns-sdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet) informações contendo o valor da excentricidade e , do semi-eixo maior a e da massa m de cada planeta do sistema solar. Conhecendo também a massa do Sol, $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg, e a constante universal da gravitação, $G = 6.6726 \times 10^{-11}$ Nm/kg², então os valores da energia mecânica E e do momentum angular L podem ser determinados. É importante

manter em mente que o semi-eixo maior da órbita da Terra é usado como unidade de distância astronômica, $1 \text{ UA} = a = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$.

Vimos em exemplos anteriores que a conservação da energia pode servir tanto para calcularmos equações horárias quanto para calcularmos períodos. A situação aqui não é diferente. Podemos usar a energia mecânica na forma (1.44) para determinarmos o período de órbitas elípticas. Isolando as variáveis r e t em (1.44) e integrando independentemente os dois lados, temos (faça o Exercício 11)

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{K}{r} - \frac{L^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2K}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{1}{2a} r^2 + r - \frac{1}{2} a(1 - e^2)}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Note que estamos usando $t_0 = 0$ e $r(0) = r_0 = r_-$. Introduzindo uma nova variável ψ , provavelmente inspirada pela relação (1.55),

$$r = a(1 - e \cos \psi), \quad (1.57)$$

a integral (1.56) pode ser re-escrita na forma (faça o Exercício 12)

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{K}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{K}} (\psi - e \sin \psi). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Obtivemos assim uma equação horária para

a variável intermediária ψ ,

$$\omega_0 t = (\psi - e \sin \psi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\mu a^3}}. \quad (1.59)$$

No entanto, ela é uma equação transcendental para ψ , ou seja, é impossível isolar (analiticamente) ψ em (1.59). Apesar disto, ela é útil para calcularmos o período. Podemos ver, comparando (1.55) e (1.57), que $\psi = \pi$ quando estamos no afélio ($r = r_+$) e $\psi = 0$ quando estamos no periélio ($r = r_-$). O período τ é o tempo de uma volta completa, ou seja, devemos variar o ângulo ψ desde $\psi = 0$ até $\psi = 2\pi$. Assim, $\omega_0 \tau = 2\pi$, de onde podemos obter

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{K} a^3 = \frac{4\pi^2}{(M + m)G} a^3. \quad (1.60)$$

Novamente Kepler tinha razão: o quadrado do período é realmente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica. No entanto, devemos observar que a constante de proporcionalidade depende também da massa de cada planeta. No nosso sistema solar, a massa do sol (M) é muito maior que a massa de quase todos os planetas (m). A única exceção é Júpiter, com uma massa de 0.1 % da massa do Sol. Então é razoável usarmos $M + m \approx M$.

1.3.3 Segunda lei + momentum angular

Devido à conservação do momentum angular, o movimento relativo no sistema Terra-Sol ocorre num plano. Neste plano, os vetores posição, velocidade e aceleração são (veja

Apêndices):

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (1.61)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad (1.62)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta, \quad (1.63)$$

onde \hat{e}_r e \hat{e}_θ são os versores (ortogonais) nas direções radial e tangencial, respectivamente. Assim, de acordo com (1.37), a segunda lei de Newton fornece duas equações diferenciais ordinárias (EDO) de segunda ordem:

$$0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad (1.64)$$

$$-\frac{K}{r^2} = \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \quad (1.65)$$

A primeira destas EDOs é equivalente à conservação do módulo do momentum angular, pois

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \quad (1.66)$$

conforme podemos ver em (1.38).

A segunda EDO,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{\mu r^2} = 0, \quad (1.67)$$

nos permite encontrar a trajetória. Esta EDO pode ser simplificada com a ajuda da conservação do momentum angular na forma (1.38),

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2} \frac{1}{r^3} + \frac{K}{\mu r^2} = 0. \quad (1.68)$$

O procedimento de resolução desta EDO envolve dois passos importantes: uma mudança na variável dependente r e a eliminação do

tempo t . A mudança de variável é

$$u = \frac{1}{r}, \quad \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}, \quad \ddot{r} = -\frac{\ddot{u}}{u^2} + \frac{2\dot{u}^2}{u^3}. \quad (1.69)$$

O parâmetro tempo pode ser eliminado em \dot{r} usando novamente a conservação do momentum angular na forma (1.38),

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}. \quad (1.70)$$

A última igualdade nesta expressão nos permite reescrever \dot{u} numa forma dependente de u e θ ,

$$\dot{u} = \frac{L}{\mu} u^2 \frac{du}{d\theta}, \quad (1.71)$$

a qual é necessária para eliminar o tempo em \ddot{r} . Usando mais uma vez a conservação do momentum angular (1.38), conjuntamente com a mudança de variável (1.69), temos

$$-\frac{\ddot{u}}{u^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{d\dot{u}}{d\theta} = -\frac{2L^2}{\mu^2} u \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{L^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (1.72)$$

Este termo será adicionado ao segundo termo de \ddot{r} em (1.69),

$$\frac{2\dot{u}^2}{u^3} = \frac{2L^2}{\mu^2} u \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2, \quad (1.73)$$

para obtermos

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (1.74)$$

Desta forma, a EDO (1.68) pode ser reescrita como a EDO de um oscilador harmônico (a

menos de uma constante aditiva),

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{K\mu}{L^2} = 0, \quad (1.75)$$

cuja solução é imediata,

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{K\mu}{L^2}, \quad (1.76)$$

onde A e φ são constantes arbitrárias, as quais devem ser determinadas pelas condições iniciais. Como o periélio (ponto mais próximo, $r = r_0$) é um extremo de $r(t)$, então, de (1.70) e (1.76),

$$\dot{r} \Big|_{r_0} = 0 \implies \frac{du}{d\theta} \Big|_{r_0} = 0 \implies \theta_0 + \varphi = 0. \quad (1.77)$$

A constante A pode ser determinada também no periélio,

$$u(\theta_0) = \frac{1}{r_0} = A + \frac{K\mu}{L^2}, \quad (1.78)$$

o que nos permite reescrever a (1.76) na forma

$$u(\theta) = \frac{K\mu}{L^2} [1 + e \cos(\theta + \varphi)]. \quad (1.79)$$

Assim, a trajetória

$$r(\theta) = \frac{L^2}{K\mu} \frac{1}{1 + e \cos(\theta + \varphi)} \quad (1.80)$$

será uma seção cônica, com e representando a excentricidade,

$$e = \frac{L^2}{K\mu r_0} - 1. \quad (1.81)$$

Observação 1: a excentricidade em (1.81) é a mesma que aparece em (1.51). Para mostrar isto, escreva a energia mecânica (1.39) no

periélio ($\dot{r} = 0$),

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r_0^2} - \frac{K}{r_0}. \quad (1.82)$$

Esta é uma equação de grau dois para r_0 ,

$$r_0^2 + \frac{K}{E} r_0 - \frac{L^2}{2\mu E} = 0. \quad (1.83)$$

Calcule o valor positivo de r_0 ,

$$r_0 = -\frac{K}{2E} + \sqrt{\left(\frac{K}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2E\mu}}. \quad (1.84)$$

Agora mostre que

$$e = \frac{L^2}{K\mu r_0} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}}. \quad (1.85)$$

1.3.4 Segunda lei + energia mecânica + momentum angular + excentricidade

Vimos anteriormente que uma força central num sistema de dois corpos nos leva a um sistema reduzido a um corpo de massa reduzida μ , à conservação do momentum angular e da energia mecânica. Estas quantidades estão descritas na Seção 1.3.1, bem como a segunda lei de Newton para a força gravitacional. Para este tipo específico de força central, que varia com o inverso do quadrado da distância radial, o produto vetorial seguinte fica independente da coordenada radial:

$$\vec{a} \times \vec{L} = K\dot{\theta} \hat{k} \times \hat{r} = K\dot{\theta} \hat{\theta} = K \dot{\hat{r}}, \quad (1.86)$$

onde $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ é o vetor aceleração. Devido à conservação do momentum angular, o lado es-

querdo desta equação também pode ser reescrito como uma derivada total, o que nos possibilita encontrar uma nova quantidade conservada,

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L} - K \hat{r}) = 0. \quad (1.87)$$

Vamos chamá-la de “excentricidade” e denotá-la por $K \vec{e}$. Assim, da Eq. (1.87), temos

$$K (\hat{r} + \vec{e}) = \vec{v} \times \vec{L}. \quad (1.88)$$

A projeção sobre a direção radial,

$$K (r + r e \cos \theta) = \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{L} = \frac{L^2}{\mu}, \quad (1.89)$$

nos dá uma seção cônica,

$$r(\theta) = \frac{L^2}{K\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}. \quad (1.90)$$

Note que encontramos facilmente a equação da trajetória em coordenadas polares como uma consequência direta da conservação do vetor excentricidade,

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{L}}{K} - \hat{r} = e \hat{i}. \quad (1.91)$$

No entanto, precisaremos um pouco mais de trabalho para provar a última igualdade em (1.91), bem como determinar o módulo $e = ||\vec{e}||$ do vetor excentricidade. Vamos iniciar escrevendo as velocidades radial \dot{r} e tangencial $\dot{\theta}$ em coordenadas polares. Da conservação do momentum angular, temos

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}. \quad (1.92)$$

Da equação da seção cônica (1.90), temos

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{K}{L} e \sin \theta. \quad (1.93)$$

Desta forma, temos o vetor velocidade em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \\ &= \frac{K}{L} \left[e \sin \theta \hat{r} + (1 + e \cos \theta) \hat{\theta} \right] \\ &= \frac{K}{L} \left[-\sin \theta \hat{i} + (e + \cos \theta) \hat{j} \right], \end{aligned} \quad (1.94)$$

onde usamos (veja Apêndices)

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (1.95)$$

Agora é fácil calcularmos o produto vetorial em (1.91),

$$\vec{v} \times \vec{L} = K [(e + \cos \theta) \hat{i} + \sin \theta \hat{j}], \quad (1.96)$$

e provar a segunda igualdade em (1.91), bem como calcular o módulo do vetor excentricidade:

$$\begin{aligned} e^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} &= \left(\frac{vL}{K} \right)^2 - 2 \frac{\hat{r} \cdot \vec{v} \times \vec{L}}{K} + 1 \\ &= 1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

onde usamos o fato de que os vetores velocidade e momentum angular são perpendiculares e a conservação da energia mecânica,

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = E + \frac{K}{r}, \quad (1.98)$$

para eliminar o módulo do vetor velocidade.

Com um pouquinho mais de geometria podemos determinar também a terceira lei de

Kepler. Da primeira lei de Kepler, sabemos que a taxa de variação da área varrida pelo vetor posição é constante no tempo e igual a $L/2\mu$. Então, numa órbita fechada o vetor posição terá varrido a área total A da elipse em um período τ ,

$$A = \pi ab = \frac{L}{2\mu}\tau, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (1.99)$$

onde a e b são os semi-eixos maior e menor, respectivamente. De acordo com (1.90), o periélio (menor distância) está em $\theta = 0$ e o afélio está em $\theta = \pi$. Assim, da geometria da elipse,

$$2a = r(0) + r(\pi) = \frac{L^2}{\mu K} \frac{2}{1 - e^2}, \quad (1.100)$$

podemos eliminar $1 - e^2$ em $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Melhor tomar o quadrado da área varrida em (1.99),

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{\pi^2 L^2}{\mu K} a^3 = \frac{L^2}{4\mu^2} \tau^2, \quad (1.101)$$

de onde tiramos a terceira lei de Kepler,

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{(M + m)G}. \quad (1.102)$$

1.3.5 O desvio da luz

Se a velocidade angular tender ao infinito, $\dot{\theta} \rightarrow \infty$, e a distância radial for diferente de zero, $r > 0$, então o módulo do momento angular tende ao infinito e, conseqüentemente, a constante A em (1.78) tende a $1/r_0$, e de (1.76) teremos

$$r(\theta) \rightarrow \frac{r_0}{\cos(\theta + \varphi)}, \quad (1.103)$$

que representa uma reta em coordenadas polares. Isto significa que um corpo com velocidade infinita não sente a força gravitacional. Esta observação é relevante, pois Newton acreditava na teoria corpuscular da luz e, portanto, deveria sentir a influência da gravidade. No entanto, em sua época, acreditava-se que a luz possuísse uma velocidade infinita. Por isso Newton não foi o primeiro a apontar que a luz deveria desviar-se de sua trajetória retilínea ao passar próxima ao Sol.

Considere a massa do Sol $M = 2 \times 10^{30}$ kg e seu raio $R = 7 \times 10^5$ km. Considere um objeto um objeto passando próximo à superfície do Sol no periélio ($r_0 = R$) com uma velocidade próxima à velocidade da luz $c = 3 \times 10^5$ km/s. Use $G = 6,7 \times 10^{-20}$ km³/kg/s². Verifique que a excentricidade neste caso é (bem) maior que a unidade, implicando numa trajetória hiperbólica. Para tal, primeiro mostre que $r_0 \dot{\theta} = c$ e $L = \mu r_0 c$ no periélio. Depois use a excentricidade dada em (1.81) e mostre que ela pode ser reescrita como

$$e = \frac{r_0 c^2}{(M + m)G} - 1 \approx \frac{r_0 c^2}{MG} - 1. \quad (1.104)$$

A aproximação feita aqui é devido a massa m do objeto ser muito menor que a massa M do Sol. Desta forma podemos calcular o desvio $\pi - \delta$ sofrido por este objeto. Vamos escolher $\varphi = \pi/2$ em (1.80) quando a Terra estiver no periélio (onde $\theta_0 = -\pi/2$, conforme ilustrado na Figura 1.4). Este desvio pode ser calculado conhecendo-se o ângulo θ_∞ formado pela assíntota ($r \rightarrow \infty$) da trajetória hiperbólica e a linha horizontal de referência (veja a Fi-

gura 1.4), pois $\delta = \pi - 2\theta_\infty$, onde

$$\cos(\theta_\infty + \pi/2) = -\frac{1}{e}. \quad (1.105)$$

Como a excentricidade neste caso é muito maior que a unidade, podemos usar a série de Taylor para a função arco cosseno ($\cos^{-1}(x) \approx \pi/2 - x$) e determinar θ_∞ ,

$$\theta_\infty + \frac{\pi}{2} \approx \frac{\pi}{2} + \frac{MG}{r_0 c^2}. \quad (1.106)$$

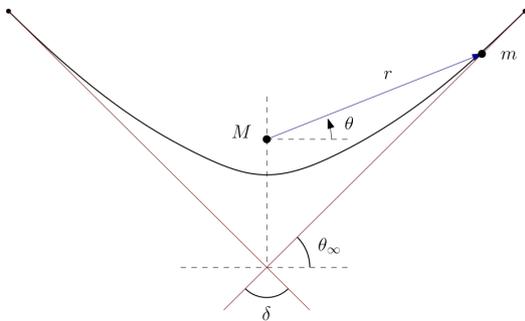


Figura 1.4: Trajetória hiperbólica e suas assíntotas.

Portanto, o desvio sofrido pelo objeto ao passar próximo à superfície do Sol ($r_0 = R$) será

$$\pi - \delta = 2\theta_\infty = 2\frac{MG}{Rc^2} = \left(\frac{v_e}{c}\right)^2. \quad (1.107)$$

Curiosamente, este desvio é numericamente igual à chamada “intensidade da gravidade”, medida pela razão dada na última igualdade em (1.107), onde v_e é a velocidade de escape (quando a energia cinética iguala à energia potencial na superfície do objeto que criou a gravidade). Ainda mais curioso é encontrar um desvio de 0.875” (segundos de arco), exatamente a metade do valor observado e previsto pela teoria geral da relatividade de Einstein, um indício irrefutável das limitações da

gravitação newtoniana. Uma das primeiras confirmações da previsão feita por Einstein em 1916 do desvio da luz ao passar próximo ao Sol, foi realizada por ele mesmo em 1919, observando um eclipse solar em Sobral, Ceará.

1.4 Exercícios

Exercício 1. Aplique o operador gradiente ao potencial gravitacional (1.26), considerando o potencial em coordenadas esféricas (polares), $V = V(r)$, ou seja, você deve usar a segunda expressão em (1.26). Note que este potencial não depende das coordenadas angulares θ e ϕ . Repita este procedimento usando o operador gradiente em coordenadas cartesianas. Neste caso você deve ver o potencial como uma função das coordenadas cartesianas, $V = V(x, y, z)$, ou seja, você deve usar a última expressão em (1.26). Mostre que em ambos os casos a força gravitacional (1.22) pode ser obtida da energia potencial.

Exercício 2. Observando a Figura 1.1, mostre que a equação da reta \vec{X} que passa por m_1 e m pode ser na forma

$$\vec{X} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda' \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.108)$$

Re-escrevendo esta equação em coordenadas cartesianas, usando a primeira igualdade, por exemplo, podemos isolar a constante λ ,

$$\lambda = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1.109)$$

Desta forma, dado as coordenadas do centro de massa (1.6), precisamos verificar que

$\vec{R} = \vec{X}$ satisfaz as condições em (1.109). Verifique isto substituindo $\vec{X} = \vec{R}$, com as componentes do vetor centro de massa escritas na forma (1.6), que as razões (1.109) são de fato constantes com $\lambda = m/M$, confirmando assim que o centro de massa de um sistema de dois corpos sempre está na reta que passa pelos dois corpos.

Exercício 3. Substitua o vetor posição \vec{r}_i por $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{u}_i$ na definição do centro de massa (1.3) e mostre que o resultado (1.5) está correto. As novas coordenadas \vec{u}_i são denominadas de coordenadas relativas ao centro de massa. Elas estão representadas na Figura 1.1.

Exercício 4. Mostre que, para $N = 2$ (dois corpos), usando a relação $\vec{r} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ mostrada na Figura 1.1 e (1.5), os resultados (1.13) podem ser obtidos. Substitua os resultados (1.13) em (1.12) e obtenha, a menos da energia cinética do centro de massa, a energia cinética (1.14) escrita em termos do vetor posição \vec{r} .

Exercício 5. Substituindo as relações (1.13) na energia cinética (1.12), obtenha os resultados exibidos em (1.14).

Exercício 6. Derive o momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, com $\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$ sendo o momentum linear da massa reduzida μ , em relação ao tempo e mostre que esta derivada é uma constante. Use o fato da força (gravitacional) agindo na massa reduzida ser a taxa de variação temporal do momentum linear e que esta força está na mesma direção do vetor \vec{r} . Use também o fato do produto vetorial (\times) entre vetores paralelos ou anti-paralelos ser nulo.

Exercício 7. Mostre que, fazendo $\phi = \pi/2$, as coordenadas esféricas do vetor posição $\vec{r} = x \hat{\mathbf{b}} + y \hat{\mathbf{a}}$ se reduzem a coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Agora tanto o raio r e o ângulo θ dependem do tempo. Mostre que o vetor velocidade $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e seu módulo são

$$\vec{v} = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \hat{\mathbf{b}} + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\mathbf{a}}, \quad (1.110)$$

$$v^2 = \|\dot{\vec{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (1.111)$$

Mostre também que o módulo do momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, com $\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$, é

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}. \quad (1.112)$$

Exercício 8. Substitua a velocidade escalar $\|\dot{\vec{r}}\|^2$ encontrada em (1.111) na expressão da energia mecânica para obter (1.44). Agora isole $\dot{\theta}$ em (1.112) e mostre, multiplicando tudo pelo diferencial dt , que

$$dt = \frac{\mu}{L} r^2 d\theta. \quad (1.113)$$

Substitua o diferencial dt em (1.44) pela expressão (1.113) e encontre (1.45).

Exercício 9. Aplique a transformação de coordenadas $\chi = 1/r$ na expressão (1.47). Primeiro mostre que

$$\chi = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad d\chi = -\frac{dr}{r^2}. \quad (1.114)$$

Depois mostre que a integral da expressão (1.47) na nova variável χ pode ser escrita na forma canônica (1.48) com o auxílio das constantes (1.49).

Exercício 10. Troque χ por $1/r$ na solução (1.48) para obtermos a equação da trajetória

(1.50). Use as constantes (1.49) para efetuar as devidas simplificações e verifique que os valores da constante C em (1.50), bem como da excentricidade e e da unidade “astronômica” de energia ϵ estão corretos.

Exercício 11. Mostre, usando (1.54) e (1.50), que a energia mecânica E e o momento angular L estão relacionados com os parâmetros de uma elipse através das expressões

$$\begin{aligned} a &= -\frac{k}{2E} \Rightarrow \frac{E}{k} = -\frac{1}{2a}; \\ e &= \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{\mu k^2}} \Rightarrow \frac{L^2}{\mu k} = \frac{1}{C}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

onde

$$\frac{1}{C} = a(1 - e^2) = a(1 + e)(1 - e) = \frac{r_+ r_-}{a}. \quad (1.116)$$

Agora substitua estas relações na primeira integral em (1.56) para obter a segunda. Aproveite para mostrar também que, usando (1.50), temos $r = r_-$ em $\theta = 0$ e $r = r_+$ em $\theta = \pi$.

Exercício 12. Mostre que $r = a(1 - e \cos \psi)$ implica em (i) $dr = ae \sin \psi d\psi$, (ii) $r_0 = a(1 - e \cos 0) = a(1 - e) = r_-$ e (iii)

$$-\frac{1}{2a}r^2 + r - \frac{1}{2}a(1 - e^2) = \frac{1}{2}ae^2 \sin^2 \psi. \quad (1.117)$$

Use este resultado em (1.56) para chegar na integral (1.58). Aproveite para mostrar também que, usando $r = a(1 - e \cos \psi)$, temos $r = r_-$ em $\psi = 0$ e $r = r_+$ em $\psi = \pi$.

Exercício 13. Use os valores reais de G (constante universal da gravitação Newtoniana) m_1 (massa do Sol), m (massa do

planeta), e (excentricidade) e a (semi-eixo maior) para calcular em unidades MKS a energia mecânica (E), o módulo do momento angular (L) e o período (τ) de cada planeta no nosso sistema solar. Observe a ordem de grandeza destas quantidades. Desenhe também suas órbitas e potenciais. Quantidades astronômicas pode ser obtidas no portal www.solarviews.com.