Ferramentas complementares para cálculo do momento de inércia

Nathan P. Teodosio

Não espere encontrar aqui o rigor matemático, isto é um guia que tentei fazer o mais sucinto possível. Se estiver à procura de algo mais matemático, consulte um livro (como o recomendado na última seção).

Eu diria que você está preparado caso tenha conseguido pelo menos encontrar o momento de inércia de um bastão (unidimensional) em relação a um eixo perpendicular na sua extremidade.

1 Preparação

1.1 Integração múltipla

Para calcular momentos de inércia de superfícies ou sólidos, é útil usar integrais múltiplas, que nada mais são que integrais iteradas, isto é, fazemos sucessivas integrais simples para chegar ao resultado. Por exemplo,

$$\int_{-1}^{5}\int_{0}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2} y^3\, sen(\varphi)\, x^2\, d\varphi\, dy\, dx$$

Colocando os delimitadores para deixar a ordem de integração mais clara:

$$\int_{-1}^{5}\left[\int_{0}^{\pi}\left(\int_{\pi}^{3\pi/2} y^3\, sen(\varphi)\, x^2\, d\varphi\right) dy\right] dx$$

A integral mais interna, entre parênteses, é realizada em relação à variável φ, portanto consideramos os outros valores (y^3x^2) como constantes para calculá-la.

$$\int_{-1}^{5}\left[\int_{0}^{\pi}\left(-y^3x^2cos(\varphi)\big|_{\pi}^{3\pi/2}\right) dy\right] dx = \int_{-1}^{5}\left[\int_{0}^{\pi} -y^3x^2dy\right] dx$$

Progride-se com o mesmo procedimento para calcular a integral dupla resultante. Primeiramente a mais interna, entre colchetes (lembre-se de que agora x é tratada como constante pois integra-se em relação a y):

$$\int_{-1}^{5}\left[-\frac{y^4}{4}\Big|_{0}^{\pi}x^2\right] dx = \int_{-1}^{5} -\frac{\pi^4}{4}x^2dx$$

$$-\frac{\pi^4}{4}\int_{-1}^{5} x^2dx = -\frac{\pi^4}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{5} = -\frac{126\pi^4}{12} = -\frac{21\pi^4}{2}$$

Observação: Embora em geral haja, não haverá problema em trocar posições dos limites de integração nesta disciplina, desde que se mantenha a correspondência de que varíavel está sendo integrada. Usando o exemplo anterior:

$$\int_{-1}^{5}\int_{0}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2} y^3\, sen(\varphi)\, x^2\, d\varphi\, dy\, dx = \int_{0}^{\pi}\int_{-1}^{5}\int_{\pi}^{3\pi/2} y^3\, sen(\varphi)\, x^2\, d\varphi\, dx\, dy$$

Note que foram trocados os dois últimos sinais de integração, **mas** a mudança também foi acompanhada de uma troca entre dx e dy.

1.2 Opcional: Derivação parcial

Seja $f(x,y,z) = e^xy^2cos(z) + xyz$. Se derivarmos em relação a x, consideraremos as outras variáveis constantes, como no Cálculo I. Devido a ser essa uma função dependente de y e z, apenas há uma mudança na notação de d/dx para $\partial/\partial x$, ainda que o procedimento seja o mesmo. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^xy^2cos(z) + yz; \frac{\partial f}{\partial y} = e^x2y\,cos(z) + xz; \frac{\partial f}{\partial z} = e^xy^2[-sen(z)] + xy$$

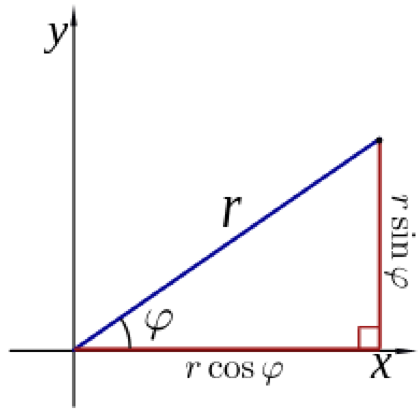
2 Mudança de coordenadas

2.1 Polares

Se quisermos calcular o momento de inércia de algo circular, não é prudente trabalhar em coordenadas cartesianas, mas em polares. A relação entre esses sitemas é:

$$x = rcos(\theta), \qquad y = rsen(\theta)$$

Figura 1: Mudança de cartesianas para polares (usa-se θ em lugar de φ)



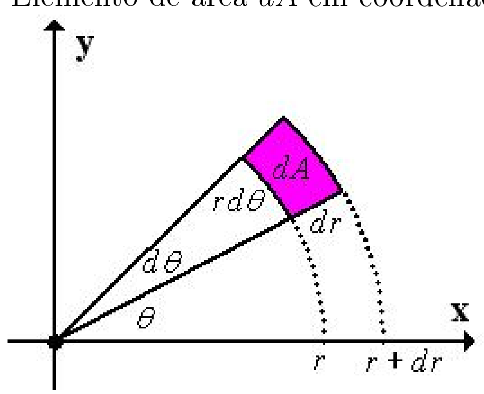
A fim de representar um disco D de raio R em coordenadas polares, é evidente que temos que fazer $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq R$. Para meio disco, θ só iria até π.

Quando se deseja realizar uma integração em um domínio que é uma superfície S, teremos algo do tipo $\iint_S * dA$, em que o subscrito S apenas indica que deve-se integrar na região S, $*$ é a operação a ser realizada, e dA é o elemento de área. Para o disco D, a integral dupla é

$$\iint_D * dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R * dA$$

Poderíamos pensar que, assim como $dA = dxdy$ em cartesianas, $dA = drd\theta$ em polares. Entretanto, analisando a figura 2, percebe-se que não.

Figura 2: Elemento de área dA em coordenadas polares



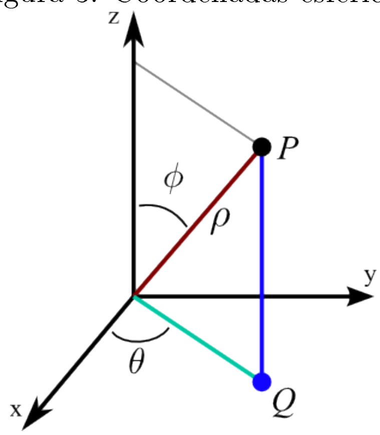
Na verdade, em polares $dA = r\,drd\theta$. Então, a integral no disco D ficaria $\int_0^{2\pi} \int_0^R * r\,drd\theta$. Esse fator que aparece em mudanças de coordenadas é denominado jacobiano (J), **portanto para as polares $J = r$ (sempre)**.

2.2 Esféricas

A relação entre os sistemas de coordenadas esférico e cartesiano é:

$$x = \rho\, cos(\theta) sen(\varphi), \qquad y = \rho\, sen(\theta) sen(\varphi), \qquad z = \rho\, cos(\varphi)$$

Figura 3: Coordenadas esféricas



Uma esfera maciça E de raio R é codificada por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \rho \leq R$. Então para integrar em todo o volume da esfera,

$$\iiint_E * \, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} * \, dV$$

em que dV é o elemento de volume nas coordenadas esféricas.

Tal como nas coordenadas polares, aparecerá um jacobiano para essa mudança, ou seja, se lá $dA = J\ dr d\theta$, em que $J = r$, aqui $dV = J\ d\rho d\theta d\varphi$. Podemos também achar esse J geometricamente (tente), mas é razoavelmente complicada a visualização. Por ora, recomenda-se a memorização do jacobiano para esféricas, que é $\rho^2\, sen(\varphi)$, e daí a integral fica $\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} * \rho^2 sen(\varphi)\, d\varphi d\theta d\rho$.

2.3 Cilíndricas

Este caso é totalmente análogo ao de coordenadas polares. Veja que não se altera z.

$$x = r cos(\theta), \qquad y = r sen(\theta), \qquad z = z$$

Assim, o jacobiano para as cilíndricas também é r.

Jacobianos

Mudança	Jacobiano	Regiões recomendadas
Polar	r	Bidimensonais circulares (discos, coroas circulares)
Cilíndrica	r	Tridimensionais circulares (cilindros, cascas cilíndricas)
Esférica	$\rho^2\, sen(\varphi)$	Tridimensionais esféricas (esferas, cascas esféricas)

Opcional: Analogia com substituição de variáveis

Em Cálculo I, algumas integrais podem ser resolvidas por substituição de variáveis. Por exemplo, para calcular $\int \frac{1}{(3x-2)^2}dx$, é conveniente fazer a substituição $u = 3x - 2$. O passo seguinte, muitas vezes automatizado, é fazer $du = 3\,dx \iff dx = \frac{du}{3}$ e então pode-se resolver o problema. Ora, o interessante aqui é que esse fator 1/3 que acompanha o du nada mais é que o jacobiano dessa mudança de variáveis, como você poderá notar se ler e entender a seção 4 (teríamos uma matriz 1x1).

3 Momentos de inércia

3.1 Disco

Por fim, ao que interessa. Seja D um disco de raio R e densidade superficial σ constante e uniforme. Calculemos o momento de inércia em relação ao eixo que passa por seu centro perpendicularmente ao disco. Da definição de momento de inércia:

$$I = \iint_D r_0^2 dm$$

$$\sigma = dm/dA \iff dm = \sigma dA$$

$$I = \iint_D r_0^2 \sigma dA$$

Atente sempre para o fato de que r_0 da definição de I é a distância de um elemento qualquer a um eixo escolhido arbitrariamente. Na proposição do problema, determinou-se um eixo que faz coincidir a distância de um ponto no disco ao eixo com a distância ao centro do disco. Perceba a diferença no caso da esfera, posteriormente.

Usando as coordenadas polares, sabemos que $r_0 = r$. Lembrando que $dA = J\,drd\theta$, e que J para as coordenadas polares é r:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sigma(J\,drd\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\sigma drd\theta = \sigma\int_0^{2\pi} r^4/4|_0^R\,d\theta = \frac{R^4\sigma}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^4\sigma}{4}2\pi = \frac{\pi R^4\sigma}{2}$$

Uma vez que σ é constante, pôde-se retirá-lo da integral. Também se sabe que $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi R^2}$, então

$$I = \frac{\pi R^4(\frac{M}{\pi R^2})}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

3.2 Esfera

Seja E uma esfera de raio R e densidade volumétrica χ constante e uniforme. Calculemos o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro (que seja o eixo z). Procure entender pela figura 3 que a distância de um ponto até o eixo z em coordenadas esféricas, que naturalmente usaremos, **não é** ρ, mas sim $\rho\,sen(\varphi)$.

$$I = \iiint_E (\rho\,sen(\varphi))^2 dm$$

$$\chi = dm/dV \iff dm = \chi dV$$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 sen^2(\varphi)\chi\,dV = \chi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 sen^2(\varphi)J\,d\rho d\theta d\varphi = \chi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^4 sen^3(\varphi)\,d\rho d\theta d\varphi$$

$$I = \chi\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^5}{5}sen^3(\varphi)\,d\theta d\varphi = \frac{\chi R^5}{5}\int_0^{\pi} 2\pi sen^3(\varphi)d\varphi = \frac{2\pi\chi R^5}{5}\int_0^{\pi} sen^3(\varphi)d\varphi$$

A integral de $sen^3(\varphi)$ não é trivial. Pode-se reescrever a expressão como $sen^3(\varphi) = sen^2(\varphi)sen(\varphi) = [1 - cos^2(\varphi)]sen(\varphi)$ e então fazer uma substituição $u = cos(\varphi)$. Com isso (verifique),

$$I = \frac{2\pi\chi R^5}{5}(u^3/3 - u)|_1^{-1} = \frac{8\pi\chi R^5}{15}$$

Sendo χ a densidade volumétrica da esfera, $\chi = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^3/3}$, então $I = \frac{2MR^2}{5}$.

4 Opcional: Cálculo analítico do jacobiano

Pode-se calcular analiticamente o jacobiano (em vez de geometricamente como foi feito para polares na figura 2).

Dada a mudança de coordenadas

$$r = r(x, y, z), \qquad s = s(x, y, z), \qquad t = t(x, y, z)$$

seu jacobiano é (sendo Abs o valor absoluto, ou seja, o módulo)

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} = Abs\left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}\right\}$$

Se a mudança de coordenadas for para o caso bidimensional (polares), a matriz é 2x2. Repare no seguinte exemplo.

Para coordenadas polares (veja seção 2.1), $\frac{\partial x}{\partial r} = cos(\theta)$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsen(\theta)$, $\frac{\partial y}{\partial r} = sen(\theta)$, $\frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos(\theta)$. Então,

$$J = Abs\left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}\right\} = Abs\left\{\begin{vmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{vmatrix}\right\} = |rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)| = r$$

Problema proposto: Encontre analiticamente o jacobiano da mudança de variáveis cartesiana $\rightarrow$ esférica. Ou aceite por fé que ele é $\rho^2 sen(\varphi)$.

5 Talvez queira ver...

- Coordenadas esféricas: `https://www.youtube.com/watch?v=FDyenWWlPdU`
- Assista a Cláudio Possani lecionando a disciplina no IME-USP (senão hoje, pelo menos quando você cursar Cálculo III): `https://youtu.be/46s8yOufmOO`
- Melhor livro sobre o assunto, com muitos exercícios finais de capítulo resolvidos: *Calculus of Several Variables, Serge Lang*