



Café com Física – Ago/2024



Decaimento do custo energético devido à manipulação a tempo finito de um sistema termodinâmico

Marcus V. S. Bonança

Universidade Estadual de Campinas

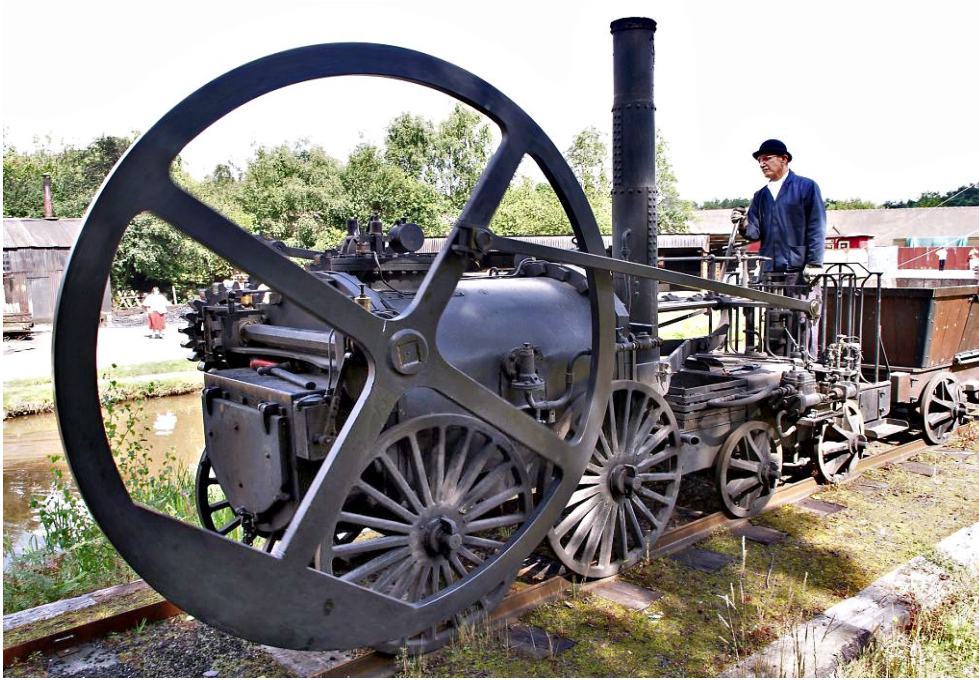
Em colaboração com

A. Soriani, M. F. Cavalcante, E. Miranda e S. Deffner



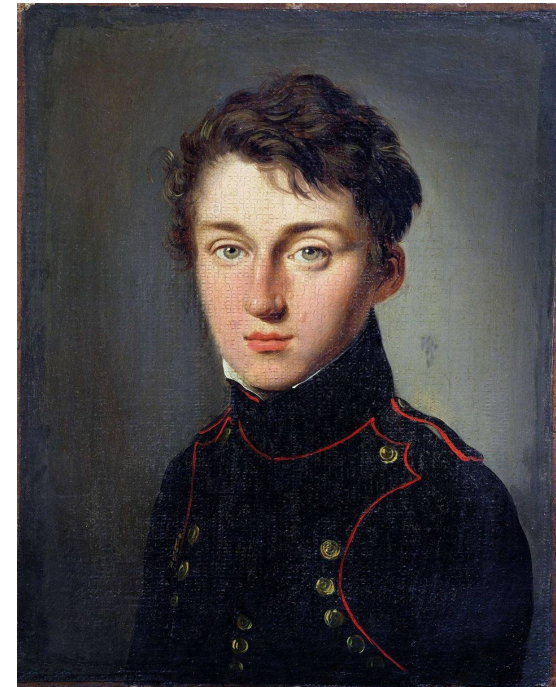
Motivação

- **Questão fundadora: Eficiência versus potência (Séc. XIX)**



Fonte: Wikipedia

- **Eficiência máxima, Potência nula!**



Sadi Carnot
(1796-1832)

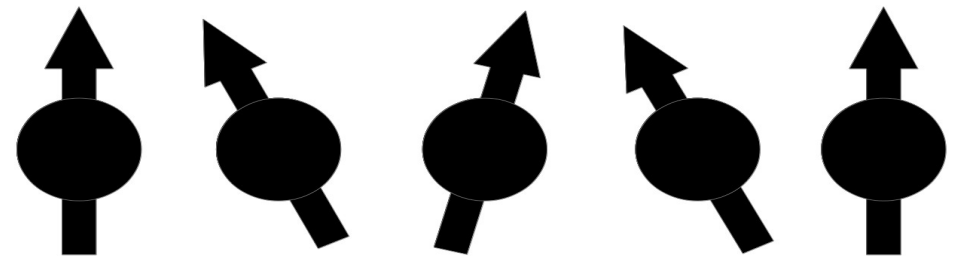
Motivação

- Eficiência versus potência (Séc. XXI)



Fonte: Wikipedia

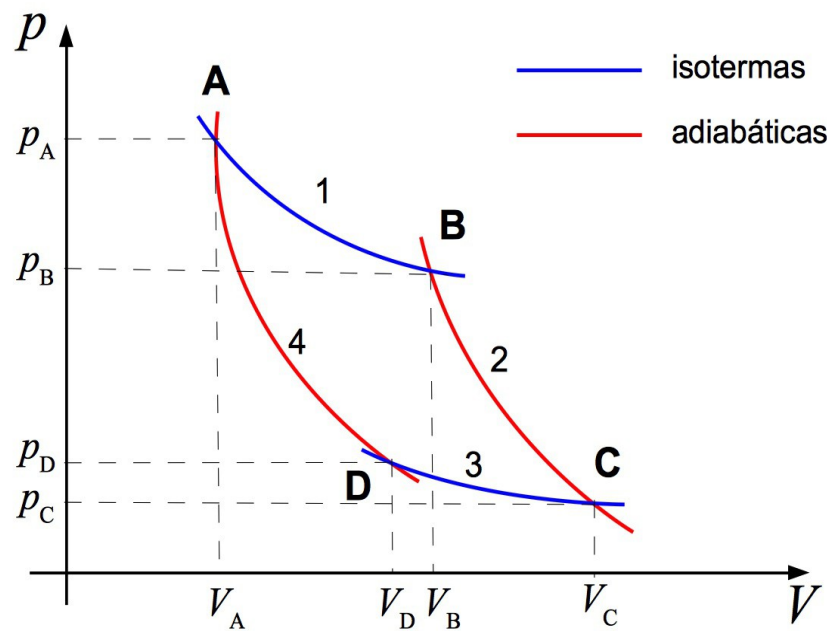
- Computação quântica via *quantum annealing*



- Cruzamento de um ponto crítico quântico a tempo finito com o mínimo de excitações!

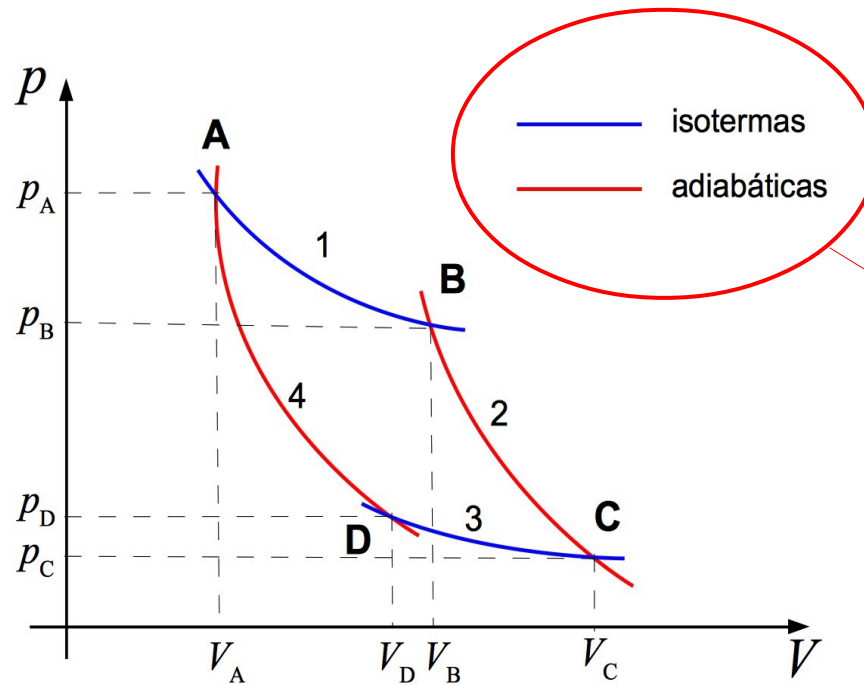
Motivação

- **Ciclo de Carnot: eficiência máxima**



Motivação

- **Ciclo de Carnot: eficiência máxima**

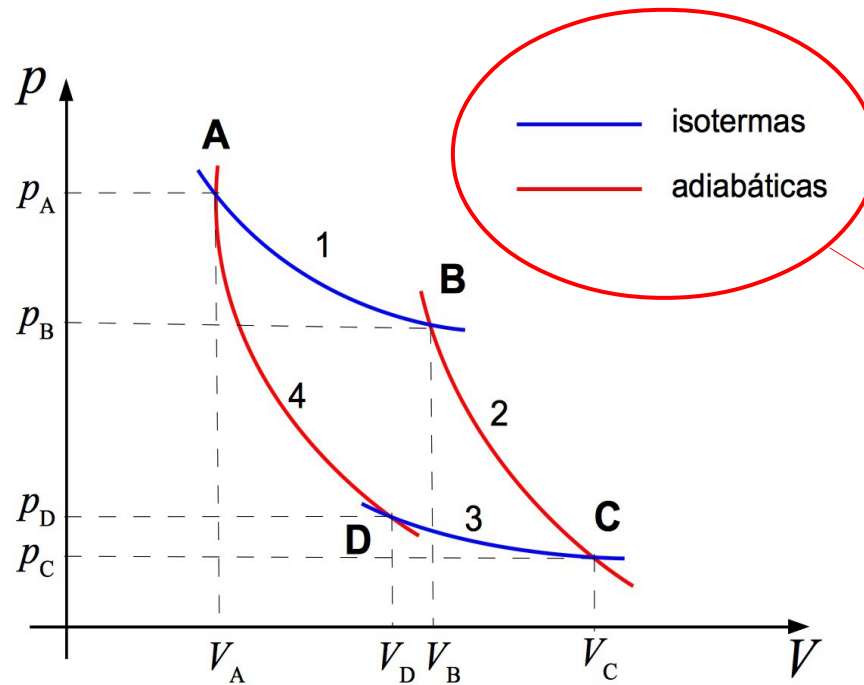


Processos quase-estáticos

Duração infinita!

Motivação

- **Ciclo de Carnot: eficiência máxima**



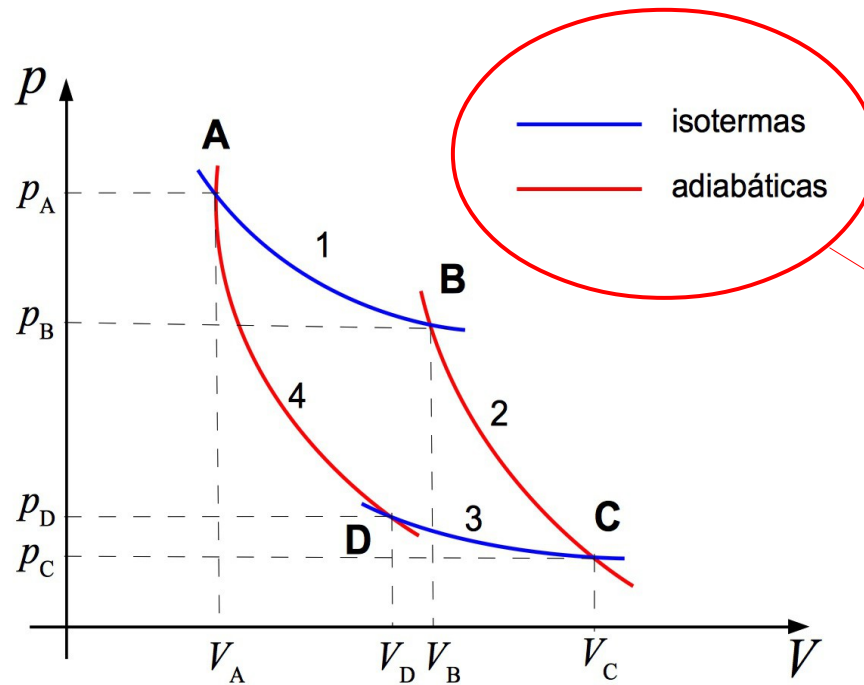
Processos quase-estáticos

Duração infinita!

- **A realização de um único processo a tempo finito altera a eficiência do ciclo todo!**

Motivação

- **Ciclo de Carnot: eficiência máxima**



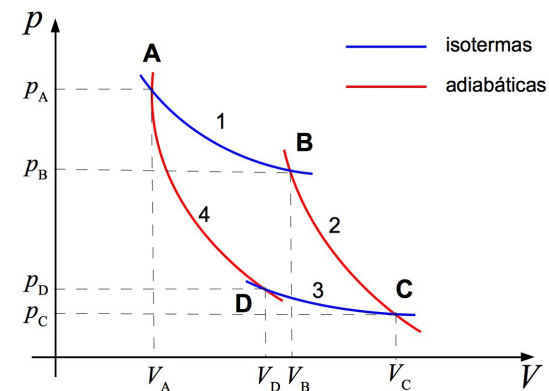
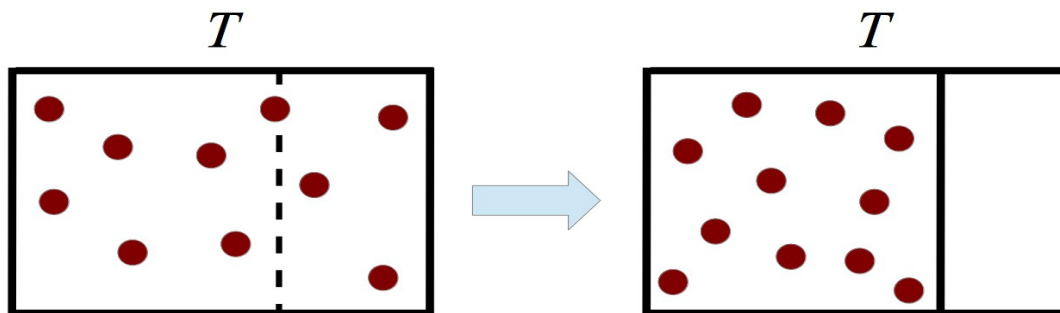
Processos quase-estáticos

Duração infinita!

- **Como minimizar o custo de um processo qualquer a tempo finito?**

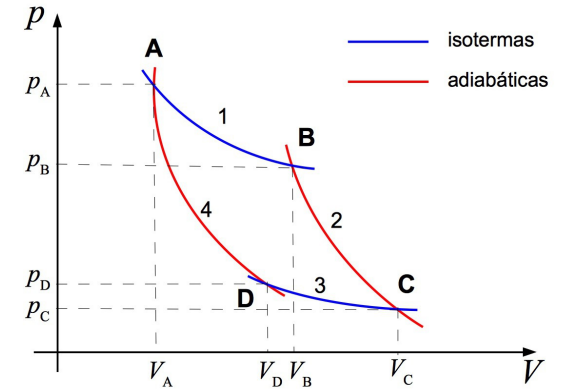
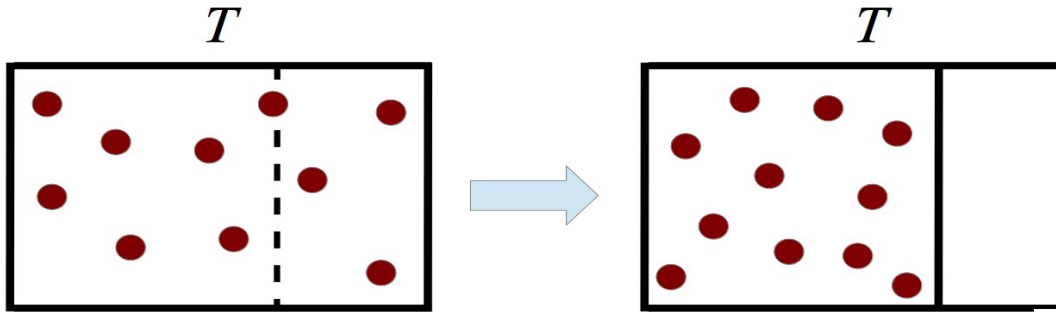
Motivação

- Exemplo: gás ideal



Motivação

- Exemplo: gás ideal

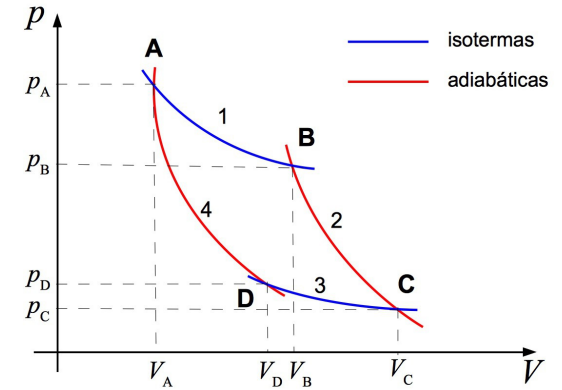
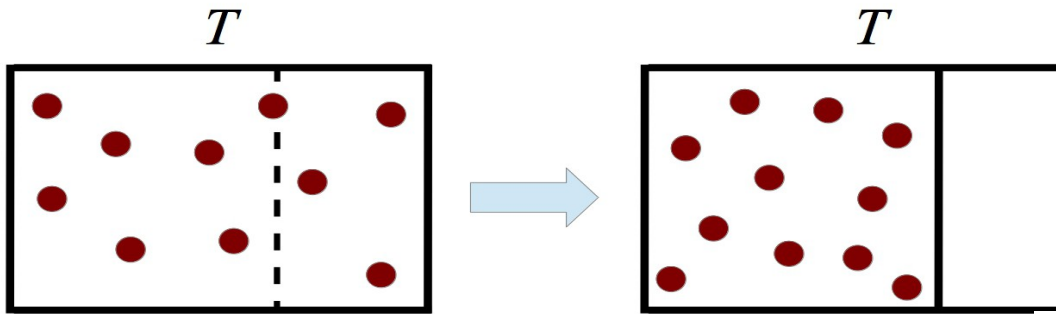


- Processo quase-estático

$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

Motivação

- Exemplo: gás ideal



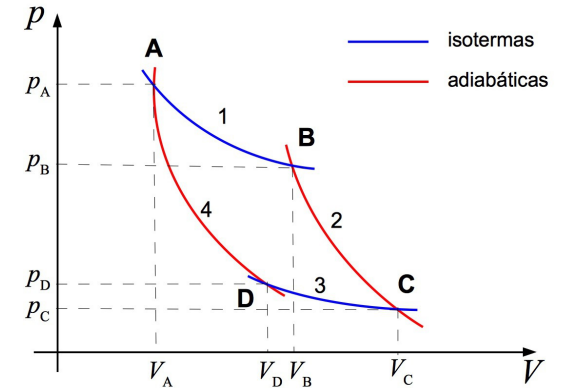
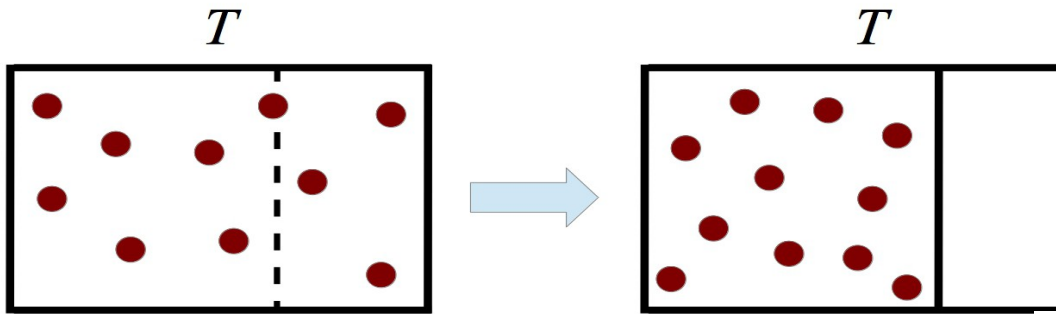
- Processo quase-estático

$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

Custo mínimo! Kelvin-Planck (2.a Lei): $W \geq \Delta F$

Motivação

- Exemplo: gás ideal



- Processo quase-estático

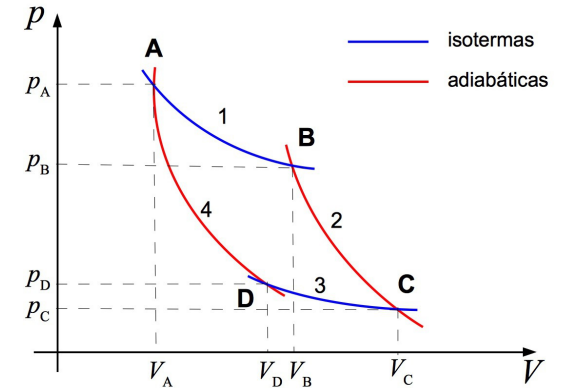
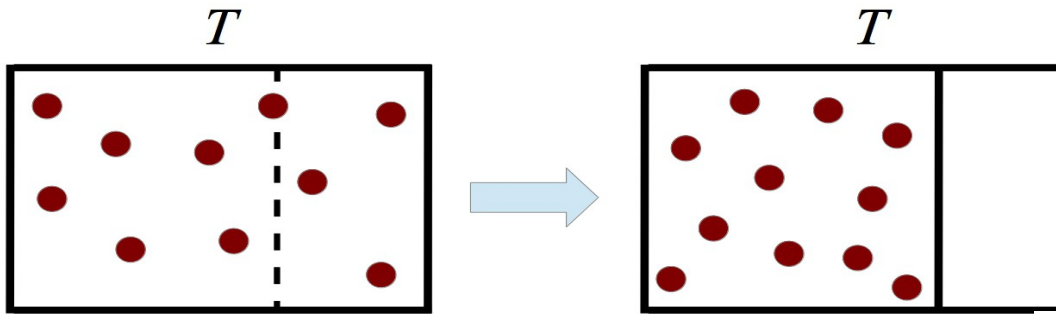
$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

- Processo a tempo finito

$$W_{ex} \equiv W - \Delta F = - \int_{t_i}^{t_f} \bar{p}(V(t), T; t) \frac{dV}{dt} dt - \Delta F$$

Motivação

- Exemplo: gás ideal



- Processo quase-estático

$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

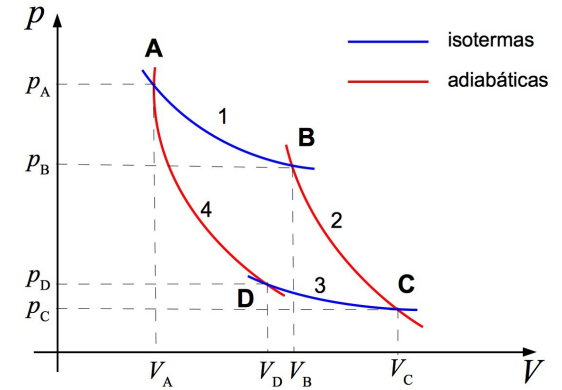
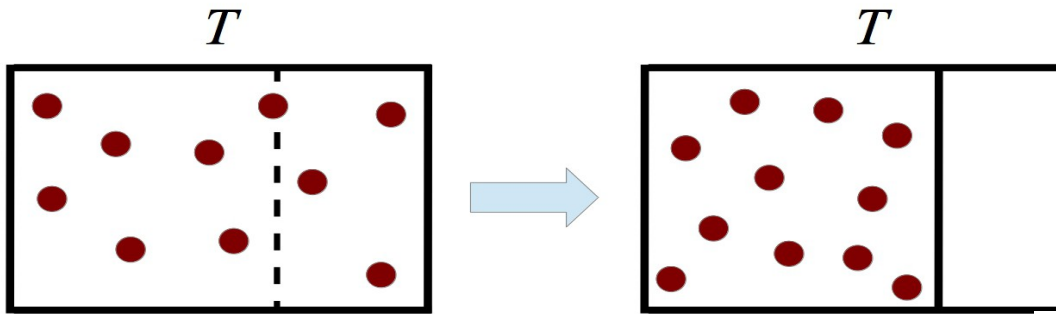
- Processo a tempo finito

$$W_{ex} \equiv W - \Delta F = - \int_{t_i}^{t_f} \bar{p}(V(t), T; t) \frac{dV}{dt} dt - \Delta F$$

Pressão fora do equilíbrio

Motivação

- Exemplo: gás ideal



- Processo quase-estático

$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

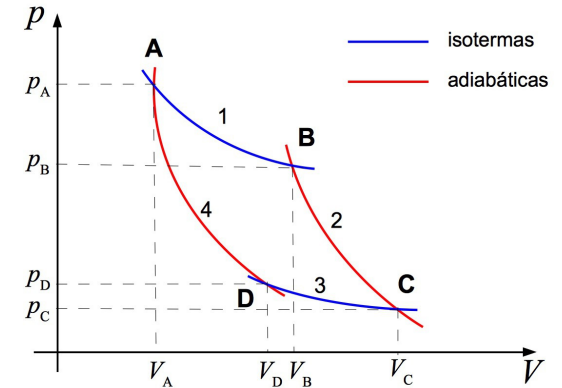
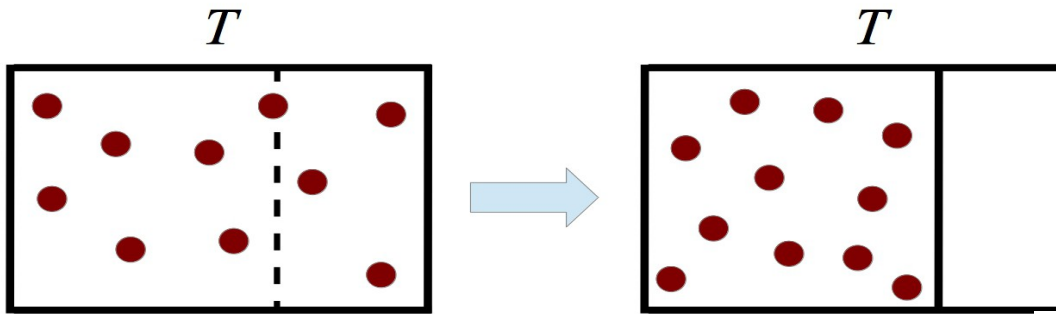
- Processo a tempo finito

$$W_{ex} \equiv W - \Delta F = - \int_{t_i}^{t_f} \bar{p}(V(t), T; t) \frac{dV}{dt} dt - \Delta F$$

Protocolo de variação do volume

Motivação

- Exemplo: gás ideal



- Processo quase-estático

$$W_{qs} = - \int_{V_i}^{V_f} p(V, T) dV = \Delta F$$

- Processo a tempo finito

$$W_{ex} \equiv W - \Delta F = - \int_{t_i}^{t_f} \bar{p}(V(t), T; t) \frac{dV}{dt} dt - \Delta F$$

Potência = Força Termod. X Taxa de Variação

Motivação

- **Em quais regimes é possível obter uma expressão analítica para a força termodinâmica fora do equilíbrio?**

Motivação

- **Em quais regimes é possível obter uma expressão analítica para a força termodinâmica fora do equilíbrio?**
- **Como obter o decaimento do custo energético como função da duração do processo?**

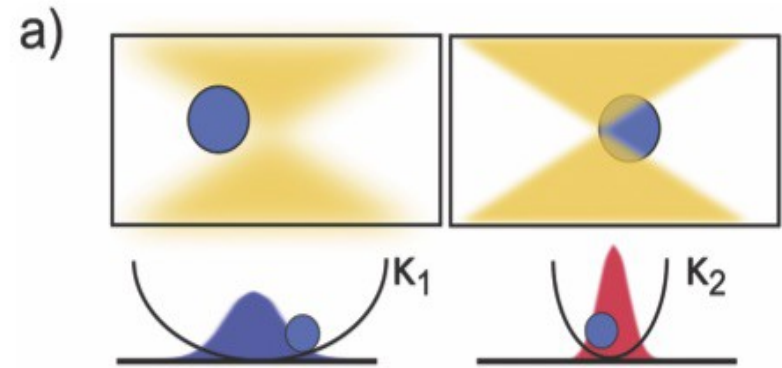
Motivação

- **Em quais regimes é possível obter uma expressão analítica para a força termodinâmica fora do equilíbrio?**
- **Como obter o decaimento do custo energético como função da duração do processo?**
- **Que características de um sistema físico favorecem o decaimento do custo energético?**

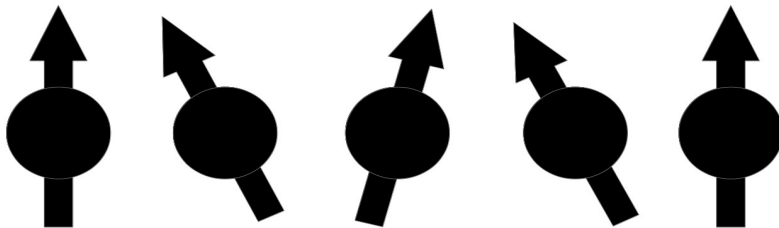
Motivação

- **Em quais regimes é possível obter uma expressão analítica para a força termodinâmica fora do equilíbrio?**
- **Como obter o decaimento do custo energético como função da duração do processo?**
- **Que características de um sistema físico favorecem o decaimento do custo energético?**
- **Existe algum regime fora do equilíbrio em que o decaimento é universal, ou seja, independente do sistema e do processo?**

Descrição geral do custo energético?

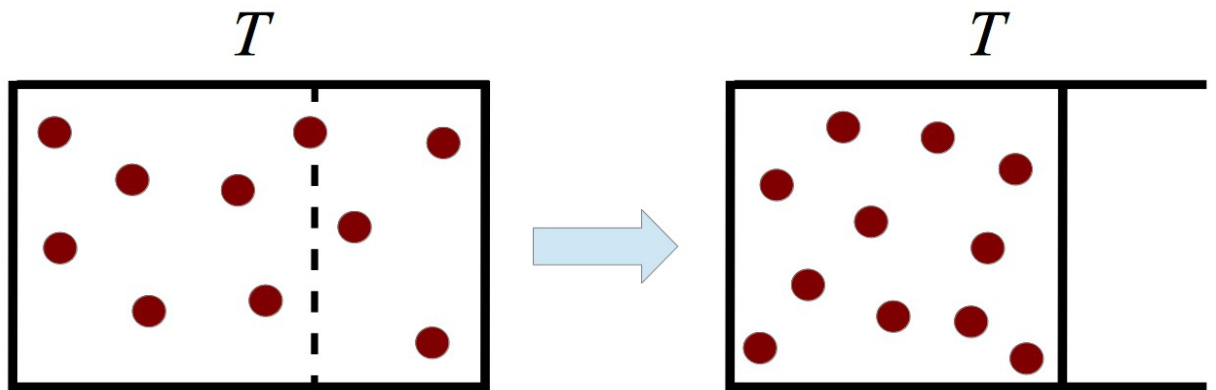


- É possível desenvolver uma descrição geral (ou seja, independente do sistema) do custo energético em algum regime fora do equilíbrio?



Regimes próximos do equilíbrio

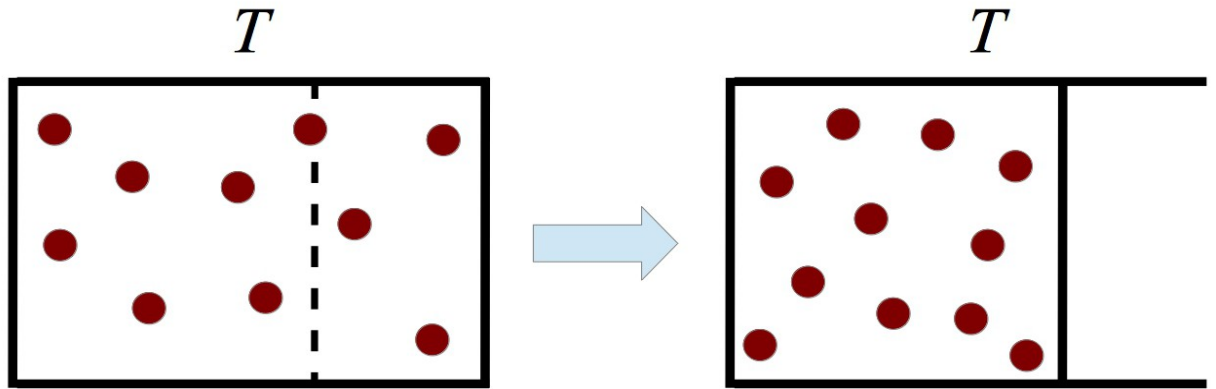
- **Compressão lenta:**



Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

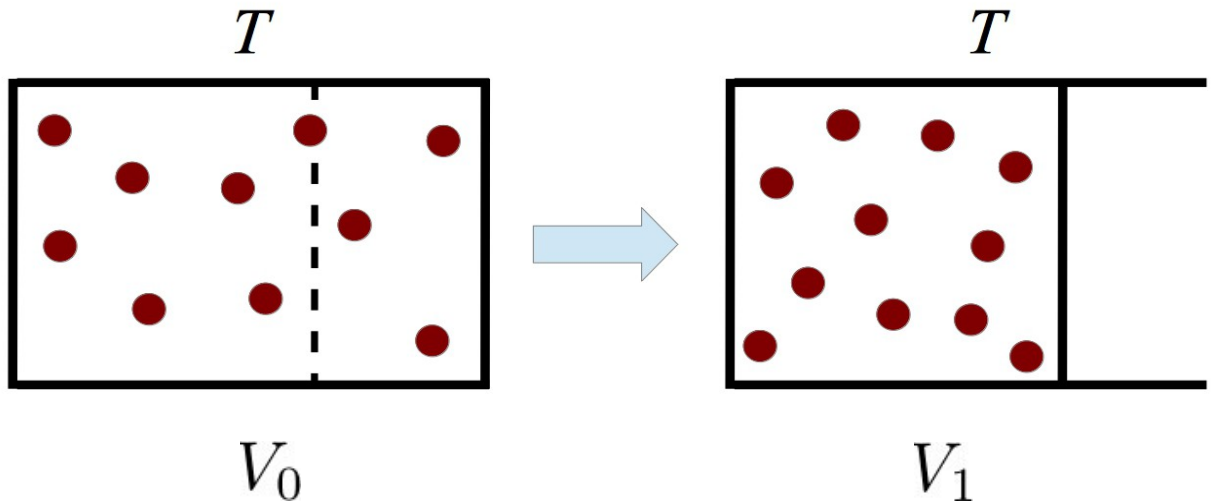
$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

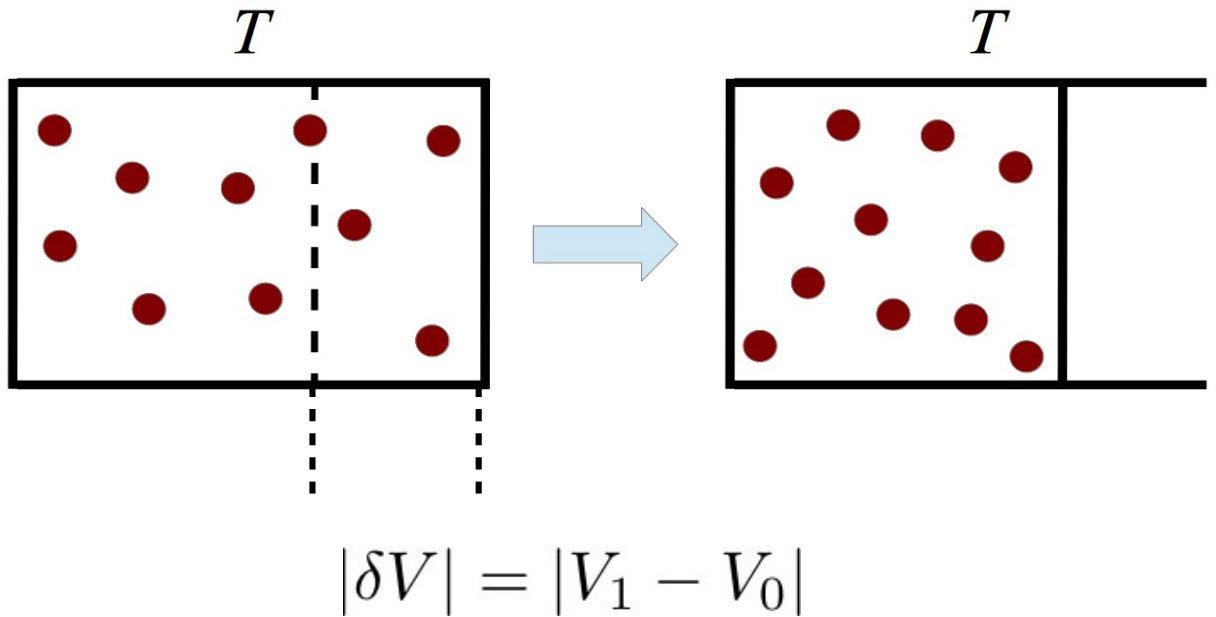
$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

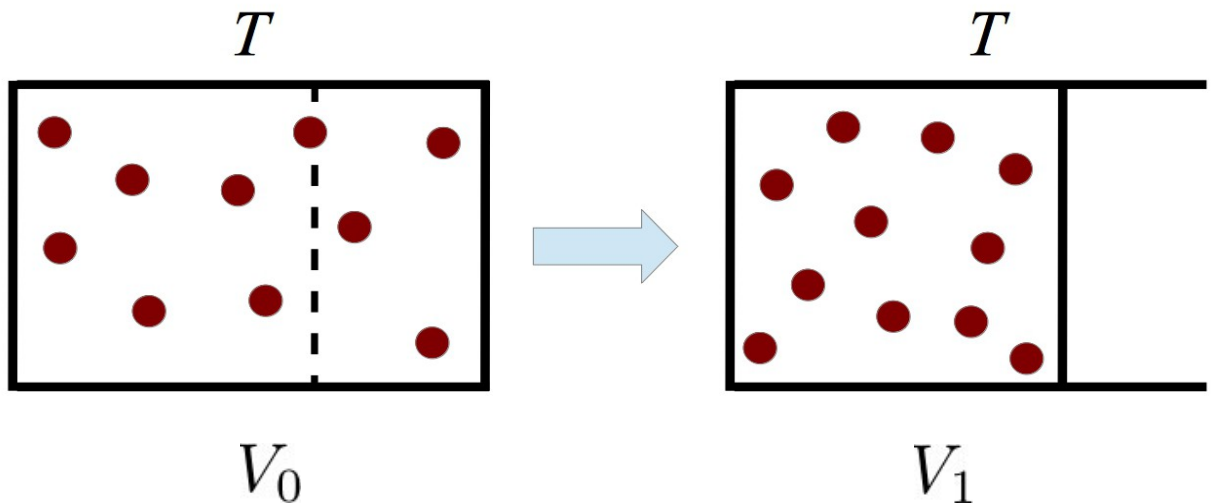
$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



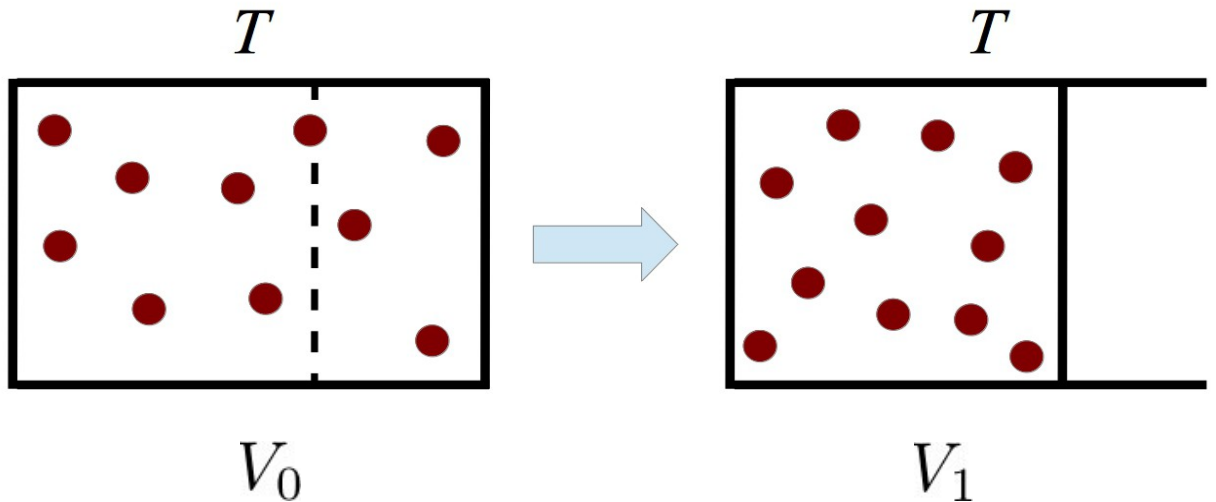
$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

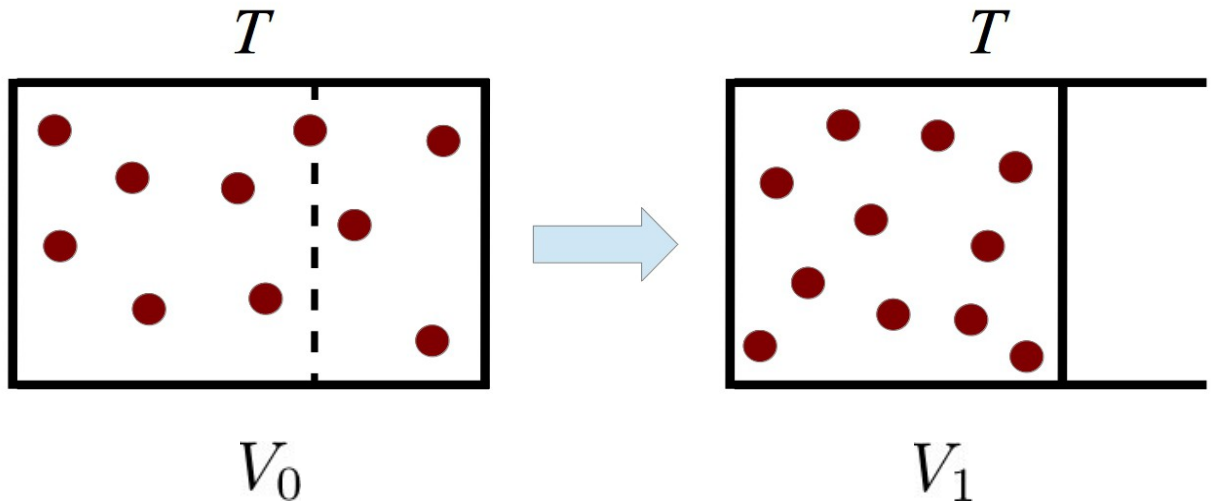
Duração do processo!

Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$

$$\tau_R/\tau \ll 1$$



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

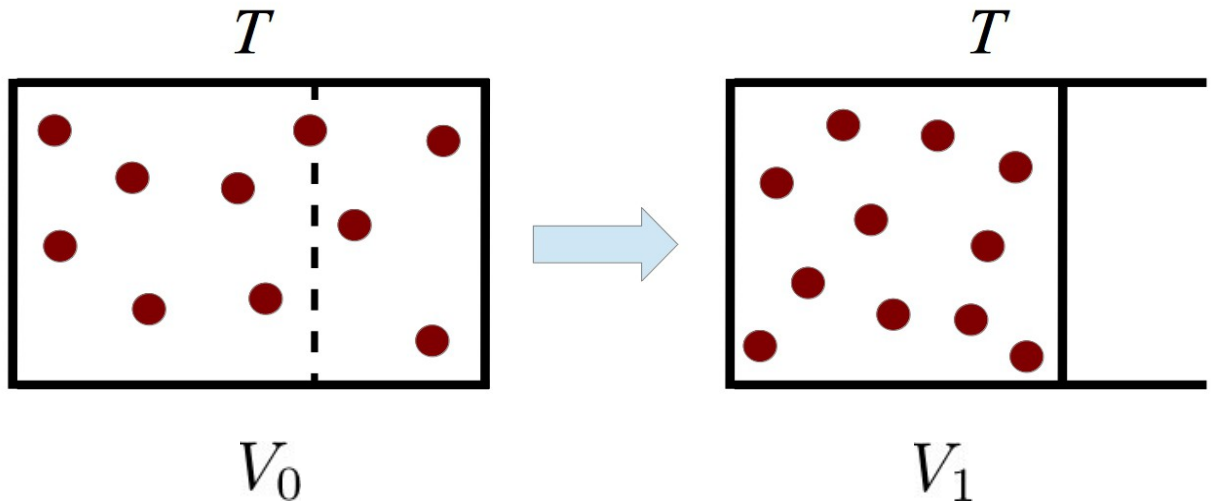
Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$

$$\tau_R / \tau \ll 1$$

Tempo de relaxação



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

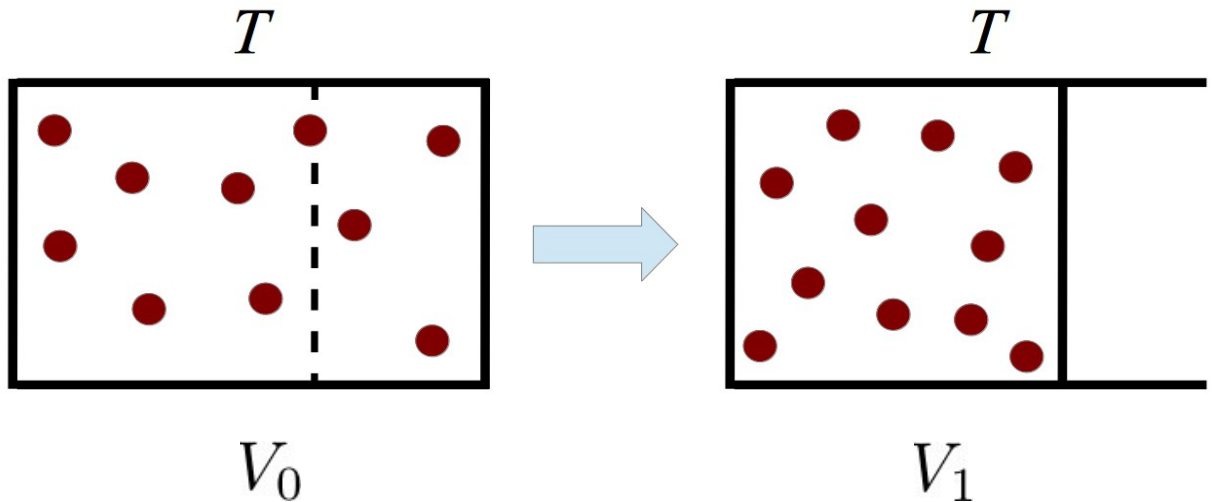
$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$

$\tau_R / \tau \ll 1$



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

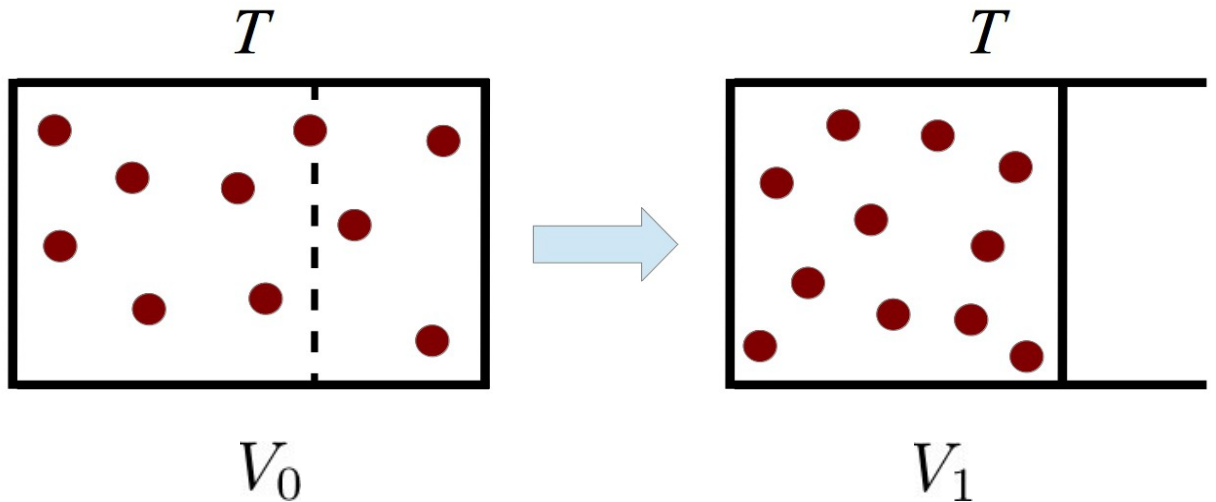
Regimes próximos do equilíbrio

- **Compressão lenta:**

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$

$$\tau_R/\tau \ll 1$$

$$\Rightarrow W \approx W_{qs}$$

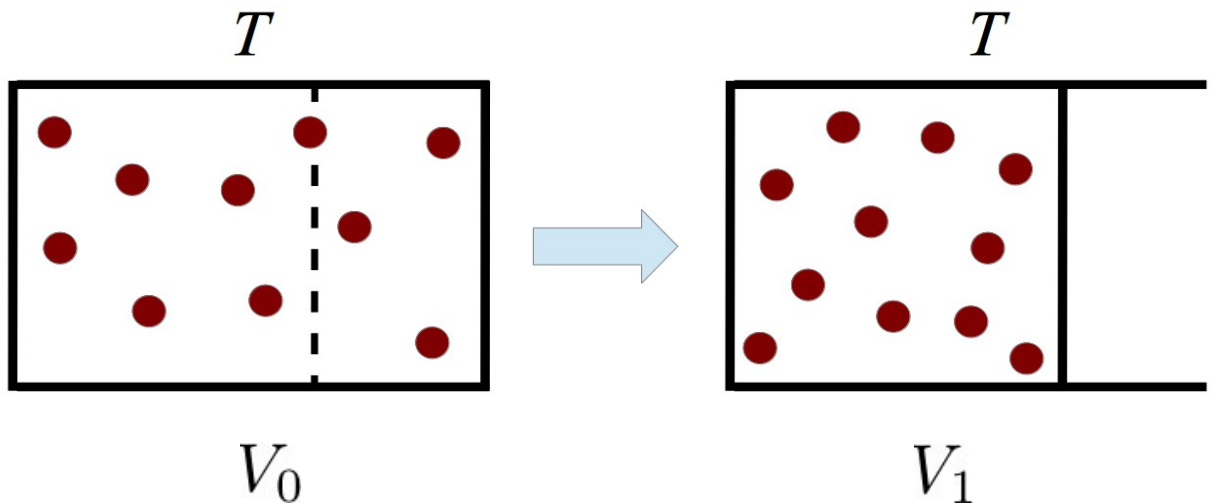


$$V(t=0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t=\tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio

- Compressão rápida mas fraca: $V(t) = V_0 + \delta V g(t)$



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

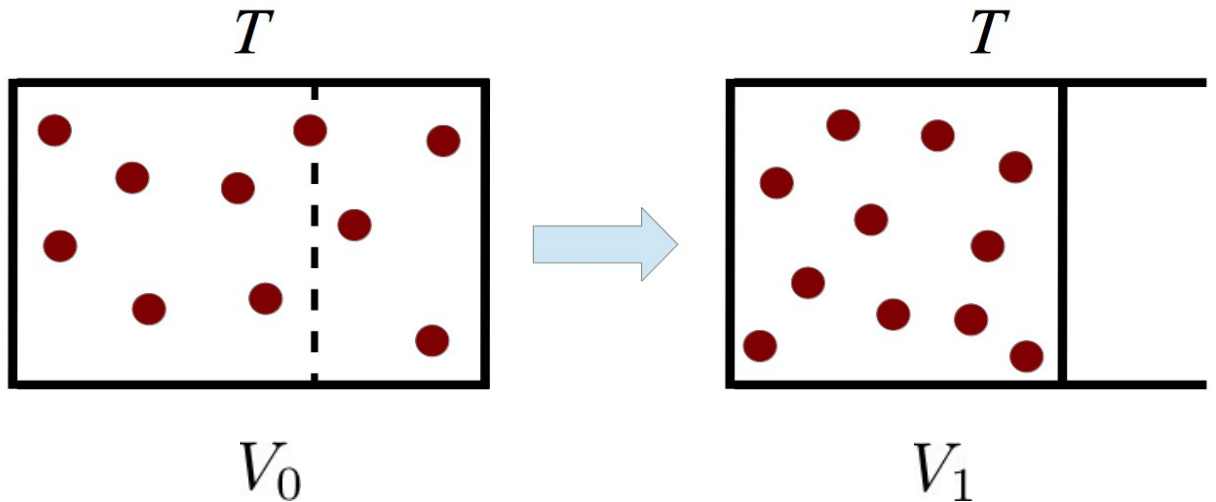
$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio

- Compressão rápida mas fraca: $V(t) = V_0 + \delta V g(t)$

$$\tau_R/\tau \sim 1$$

$$|\delta V|/V_0 \ll 1$$



$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

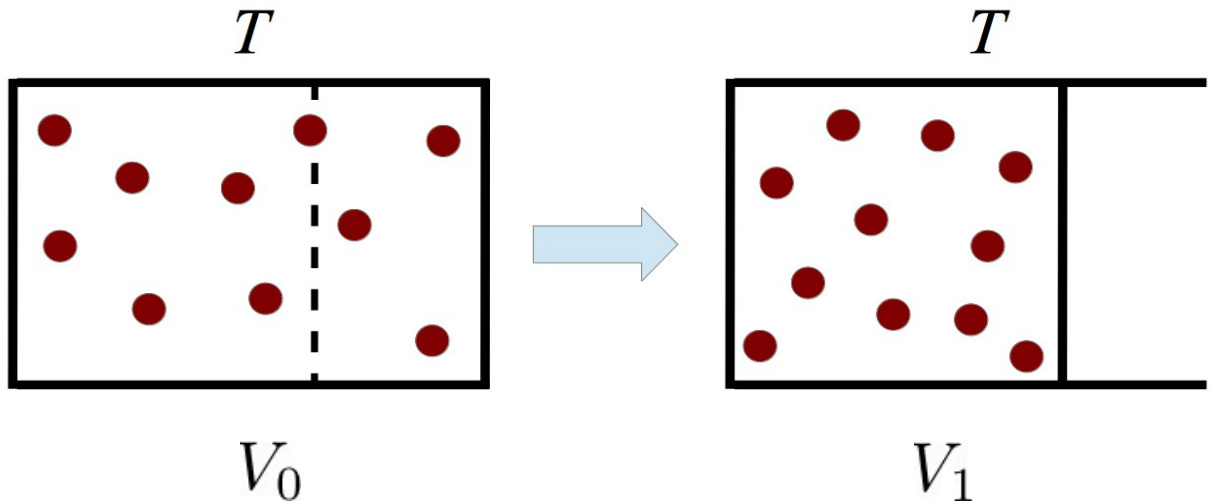
Regimes próximos do equilíbrio

- Compressão rápida mas fraca:

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$

$$\tau_R/\tau \sim 1$$

$$|\delta V|/V_0 \ll 1$$



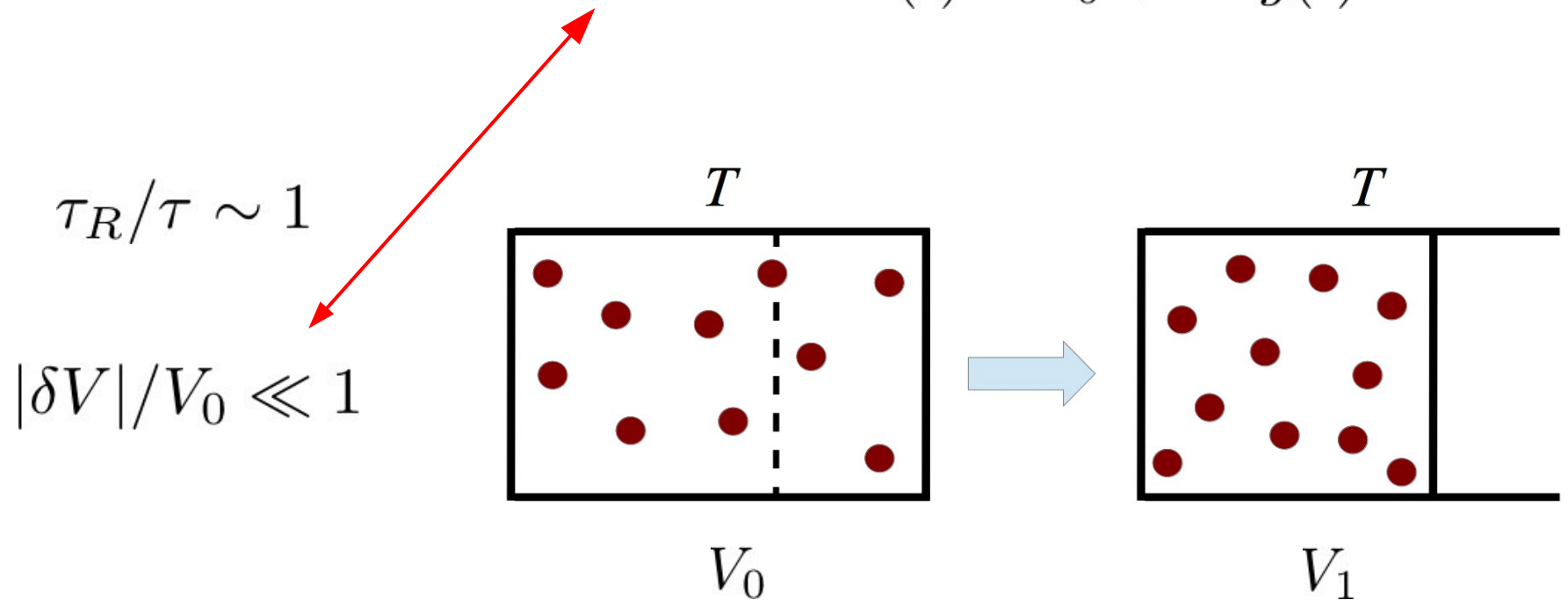
$$V(t = 0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t = \tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio

- Compressão rápida mas fraca:

$$V(t) = V_0 + \delta V g(t)$$



$$V(t=0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$V(t=\tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

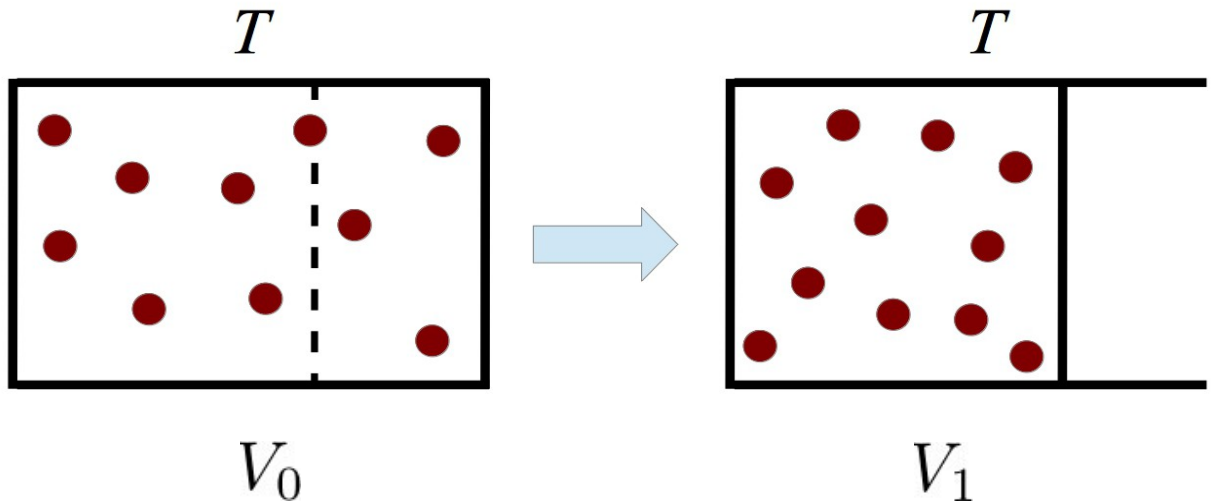
Regimes próximos do equilíbrio

- Compressão rápida mas fraca: $V(t) = V_0 + \delta V g(t)$

$$\tau_R/\tau \sim 1$$

$$|\delta V|/V_0 \ll 1$$

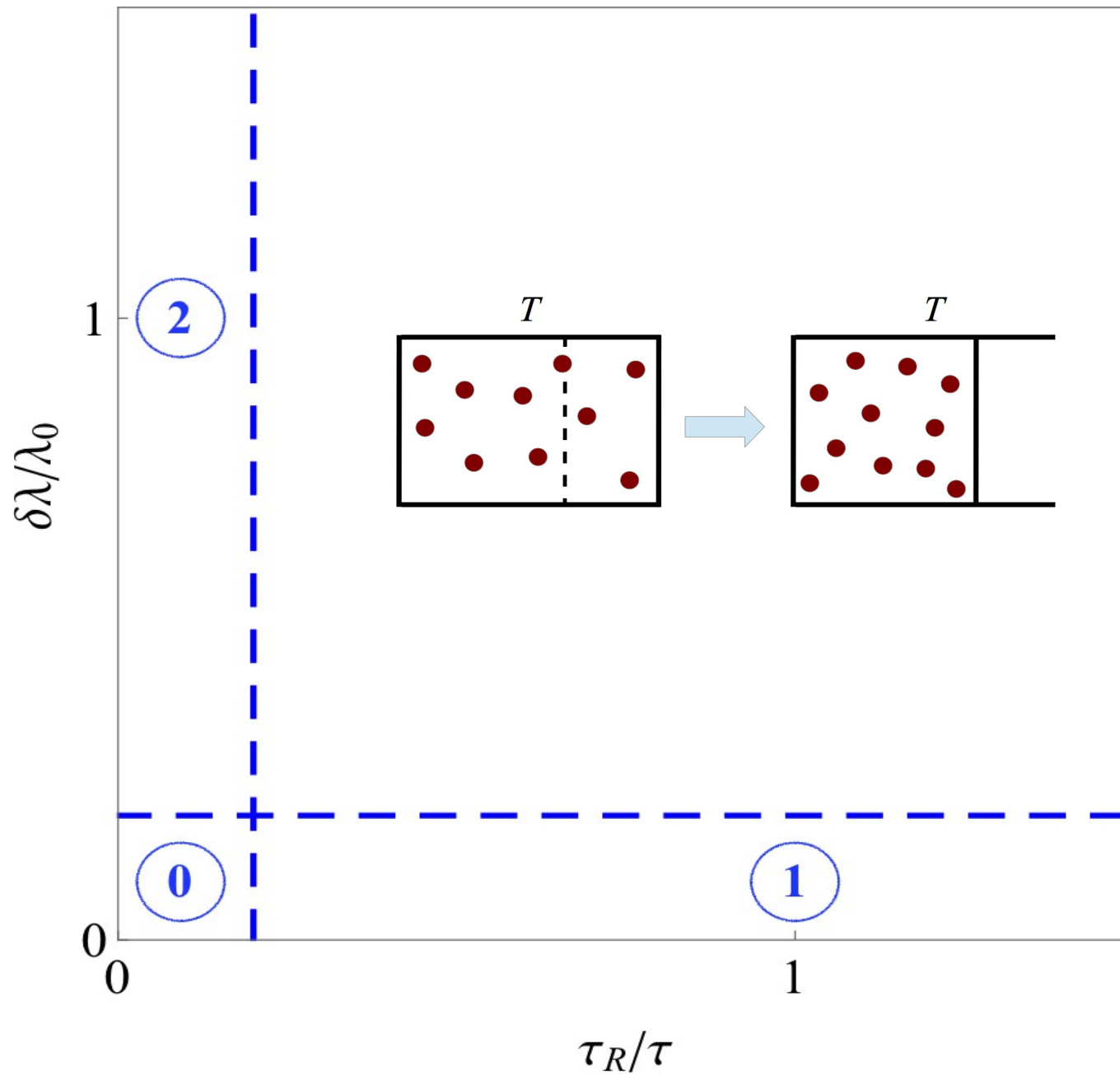
$$\Rightarrow W \approx W_{qs}$$



$$V(t=0) = V_0 \Rightarrow g(0) = 0$$

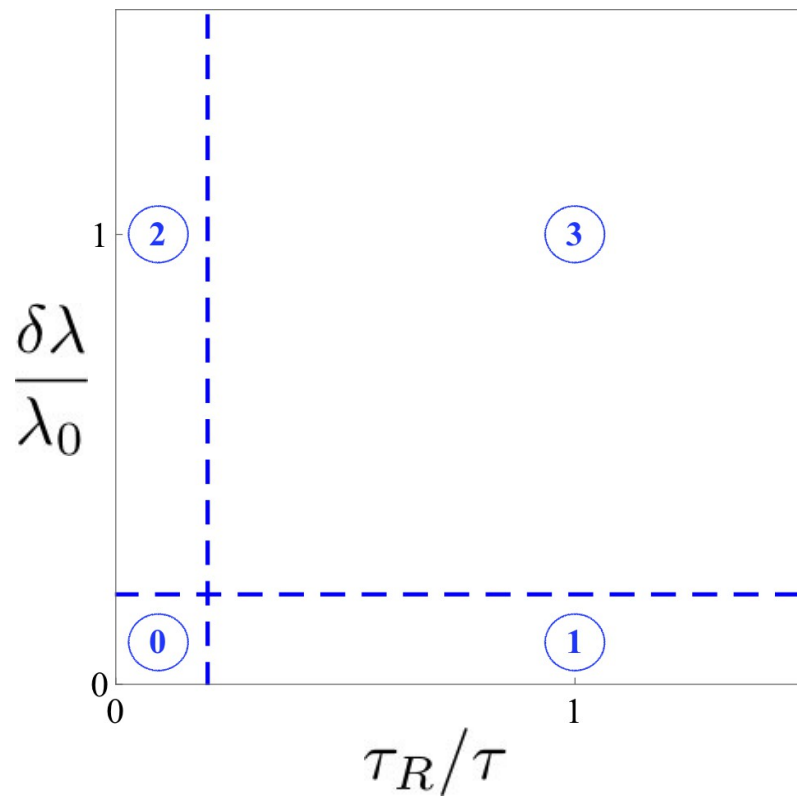
$$V(t=\tau) = V_1 \Rightarrow g(\tau) = 1$$

Regimes próximos do equilíbrio



$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

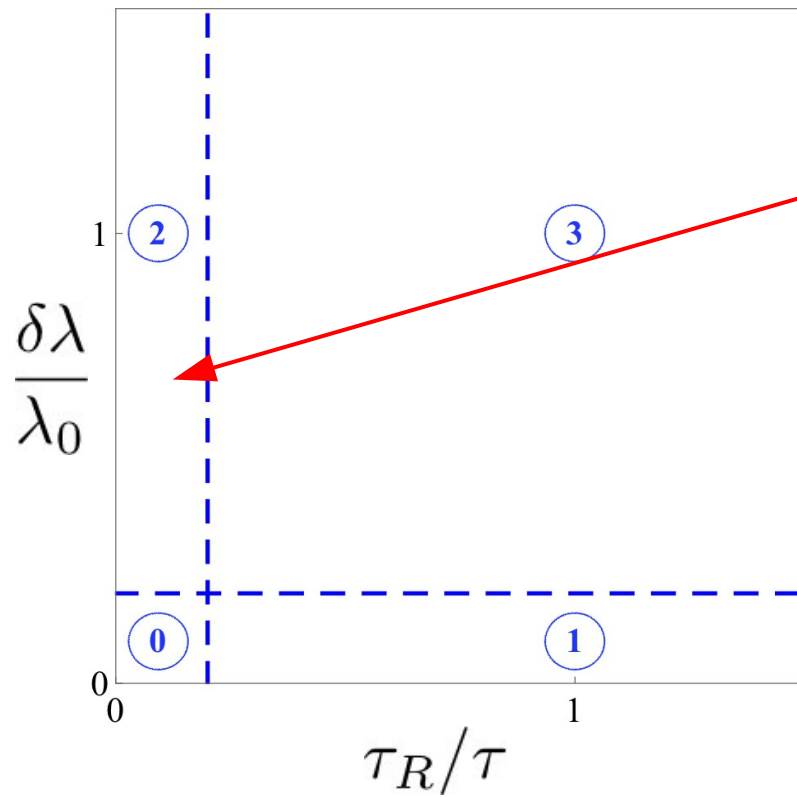


- **Funcional:** $\beta = (k_B T)^{-1}$

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

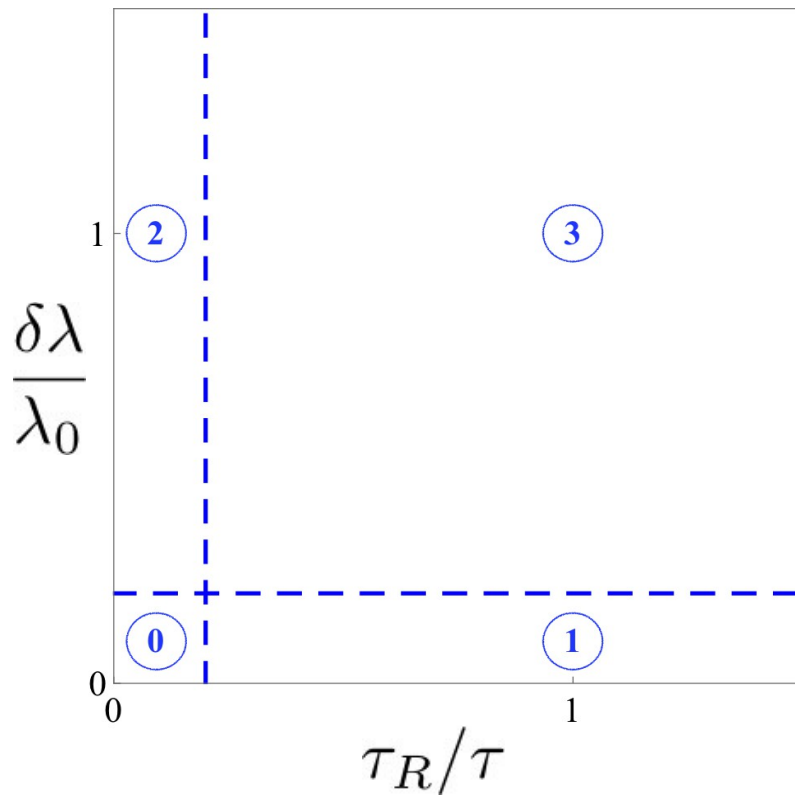


• **Funcional:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Funcional:**

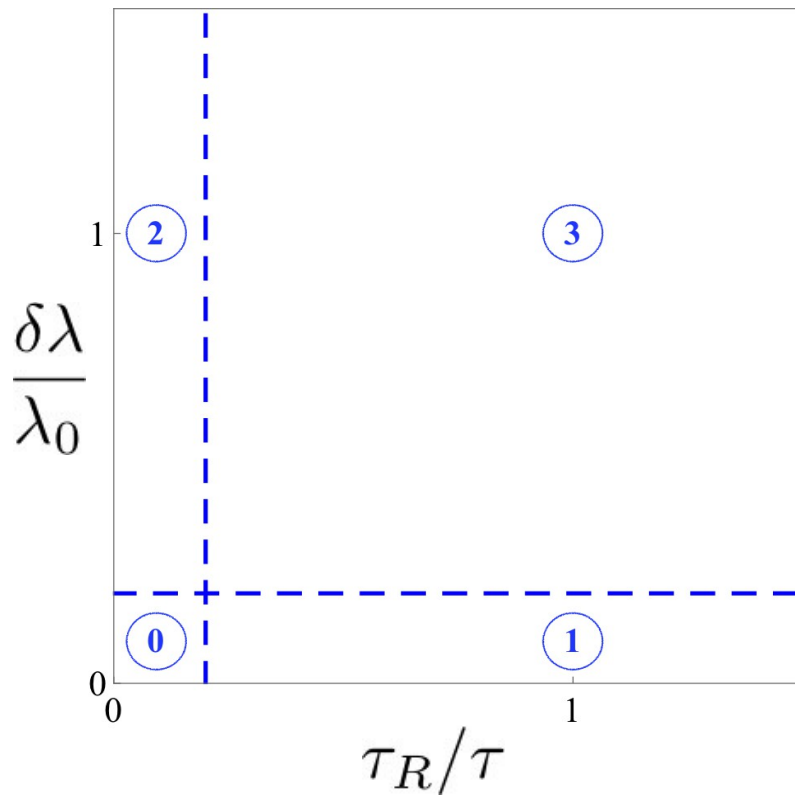
$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$\beta \chi(\lambda) = \Psi_\lambda(0)$$

$$\tau_R(\lambda) = \int_0^\infty dt \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(0)}$$

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- Funcional:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$\beta \chi(\lambda) = \Psi_\lambda(0)$$

$$\tau_R(\lambda) = \int_0^\infty dt \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(0)}$$

$$-\frac{d\Psi_\lambda}{dt}(t) = \Phi_\lambda(t)$$

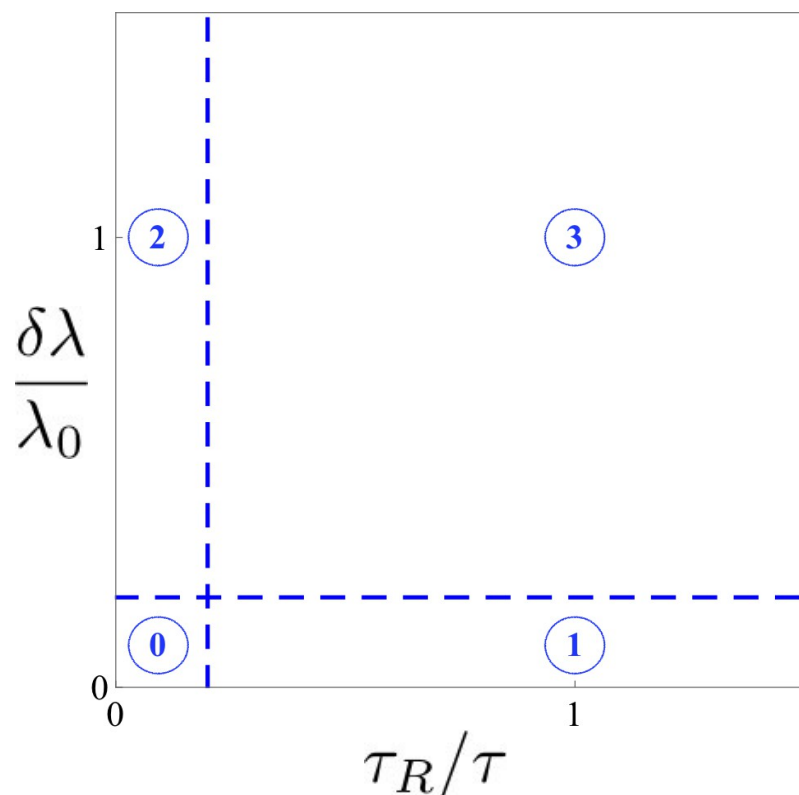
J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)

L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)

M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)

D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- Funcional:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$\beta \chi(\lambda) = \Psi_\lambda(0)$$

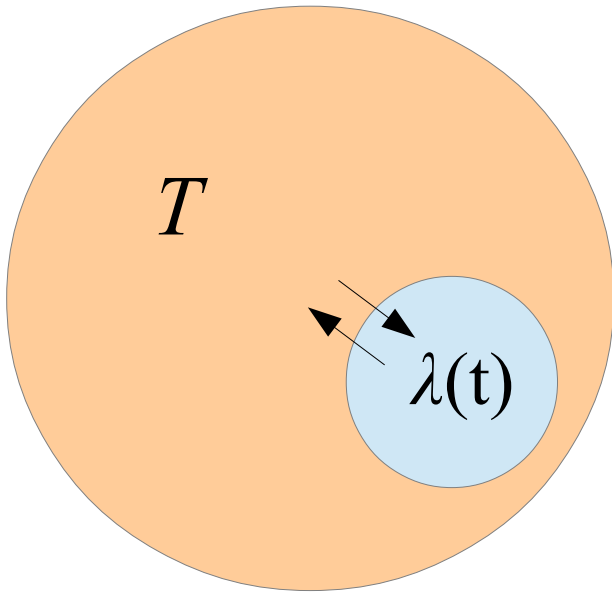
$$\tau_R(\lambda) = \int_0^\infty dt \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(0)}$$

$$-\frac{d\Psi_\lambda}{dt}(t) = \Phi_\lambda(t)$$

Função
resposta

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
 L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
 M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
 D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

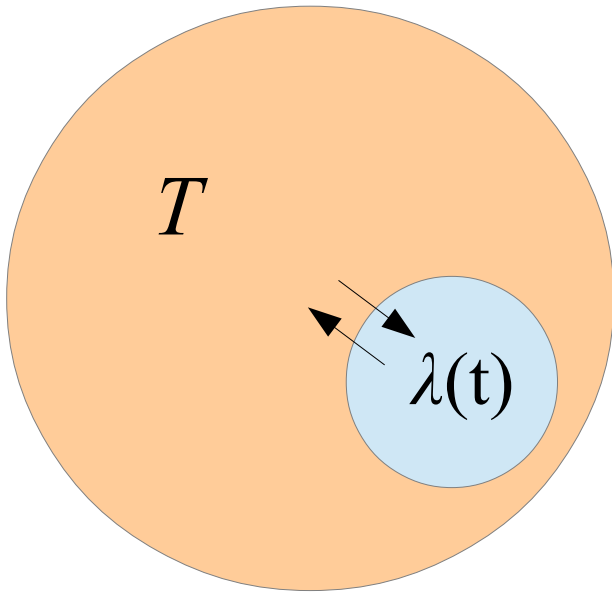
Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$
- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi_{\lambda_0}(t - t') g(t')$$

Regimes próximos do equilíbrio



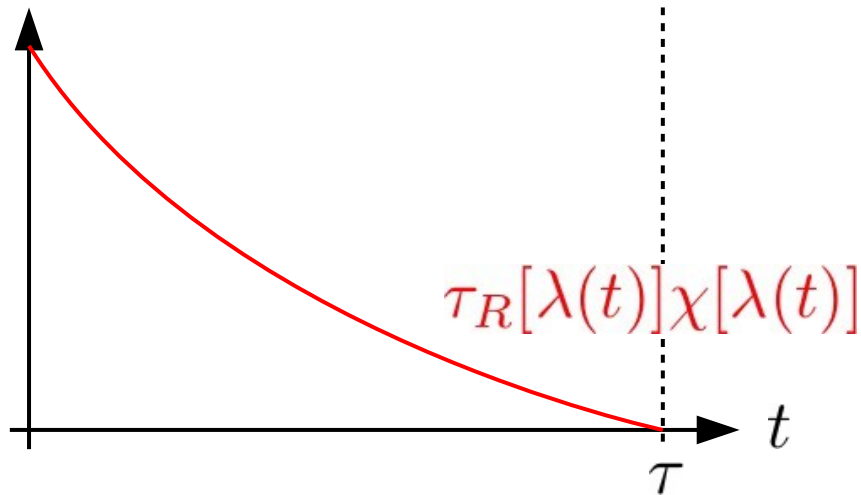
- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi_{\lambda_0}(t - t') g(t')$$

Função resposta (Green-Kubo)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

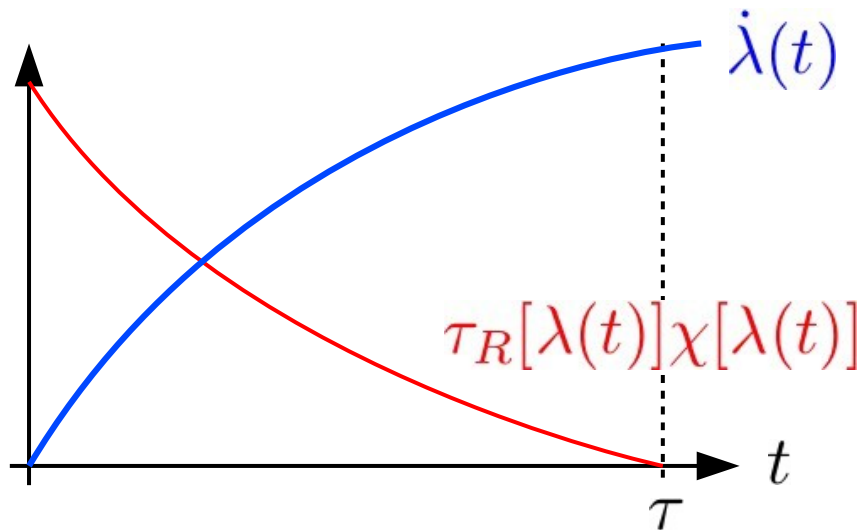


- **Otimização:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

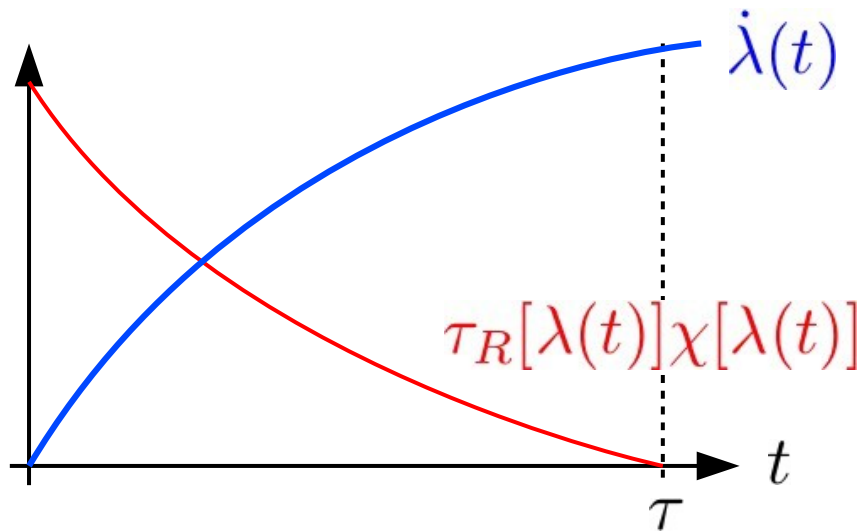


- **Otimização:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

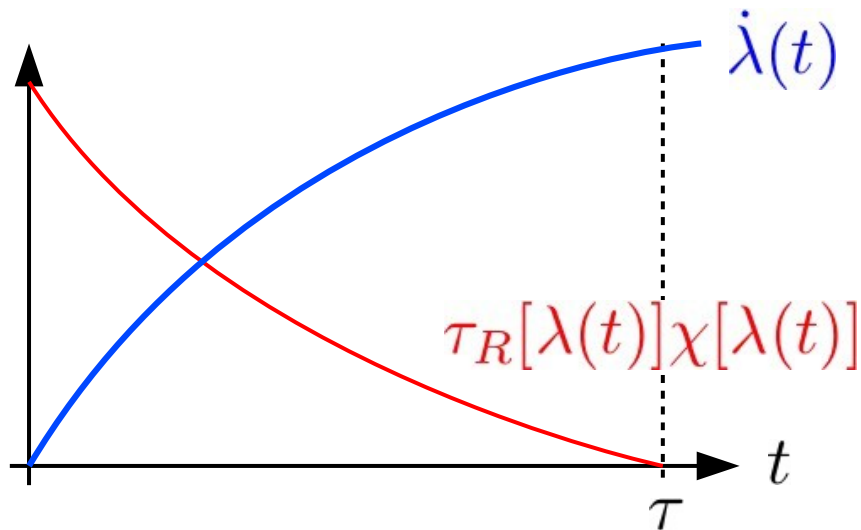


- **Otimização:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$
$$= \mathcal{L}(\dot{\lambda}, \lambda)$$

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



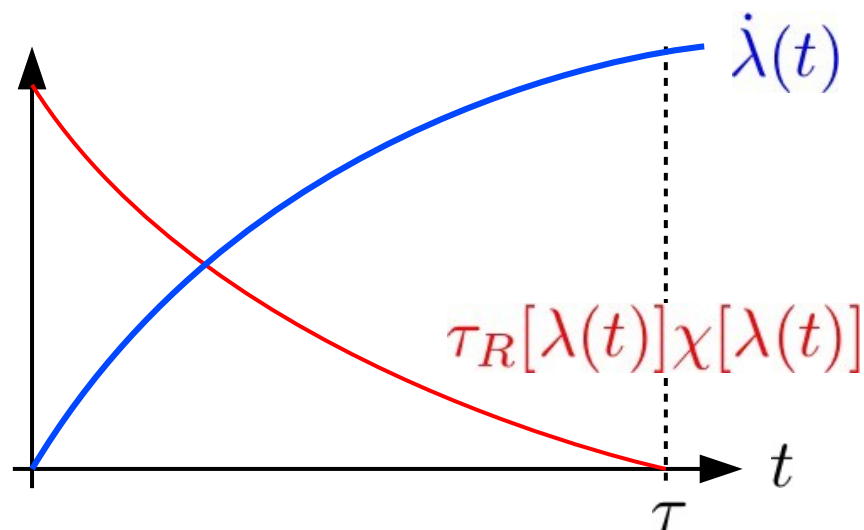
- **Otimização:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$
$$= \mathcal{L}(\dot{\lambda}, \lambda)$$

Protocolo ótimo = Solução Eq. Euler-Lagrange = Geodésica

- J. G. Kirkwood, J. Chem Phys. 14, 180 (1946)
L. W. Tsao, S. Y. Sheu e C. Y. Mou, J. Chem. Phys. 101, 2302 (1994)
M. de Koning e A. Antonelli, Phys. Rev. B 55, 735 (1997)
D. A. Sivak e G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108, 190602 (2012)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Otimização:**

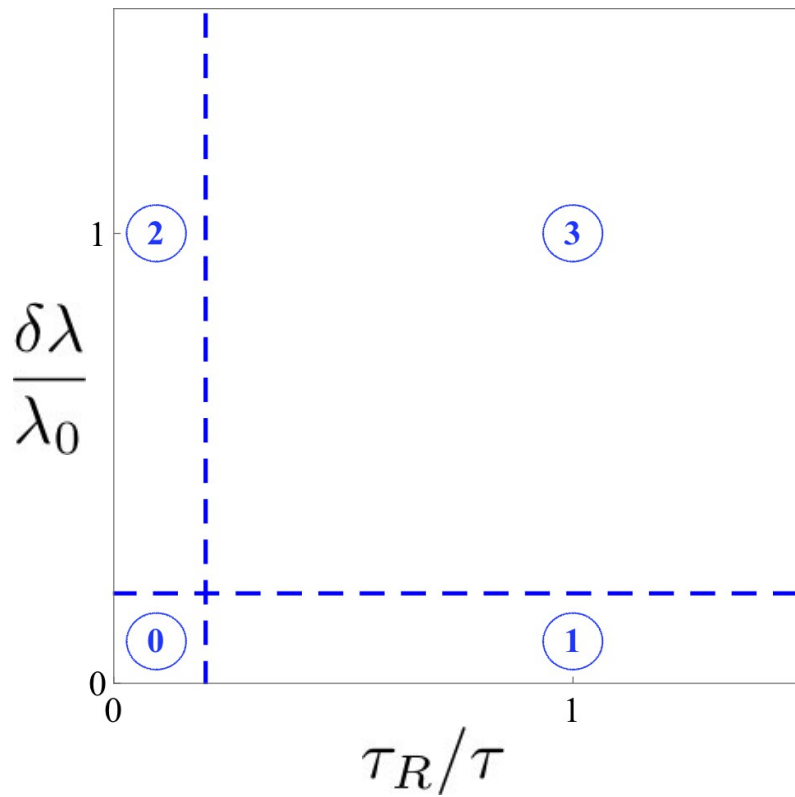
$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$
$$= \mathcal{L}(\dot{\lambda}, \lambda)$$

Protocolo ótimo = Solução Eq. Euler-Lagrange = Geodésica

- **Mas como determinar τ_R e χ para um sistema qualquer?**

MVSB e S. Deffner, J. Chem Phys. 140, 244119 (2014)

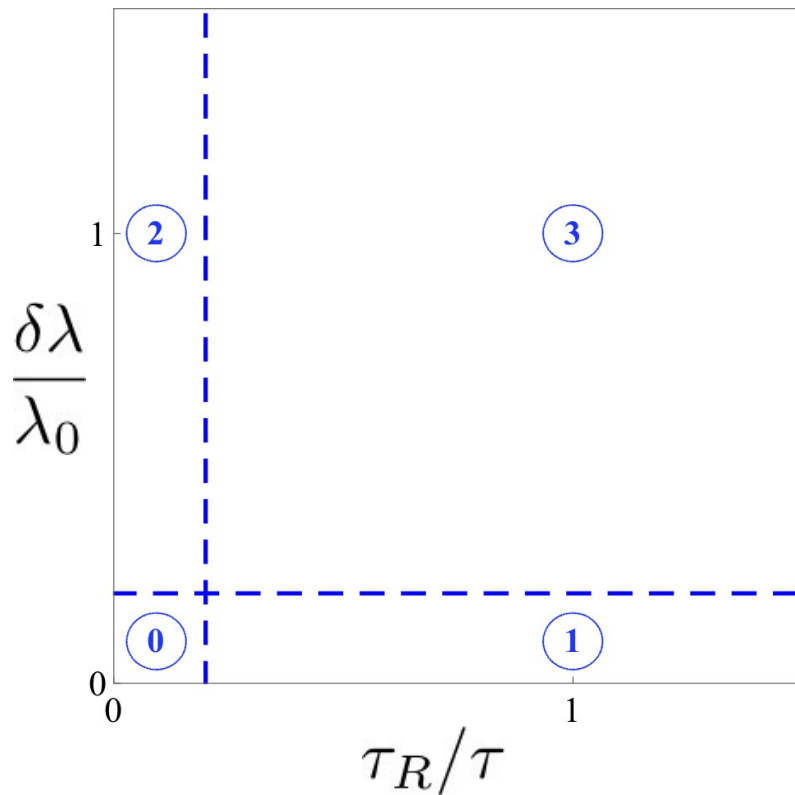
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Escala com a duração do processo:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

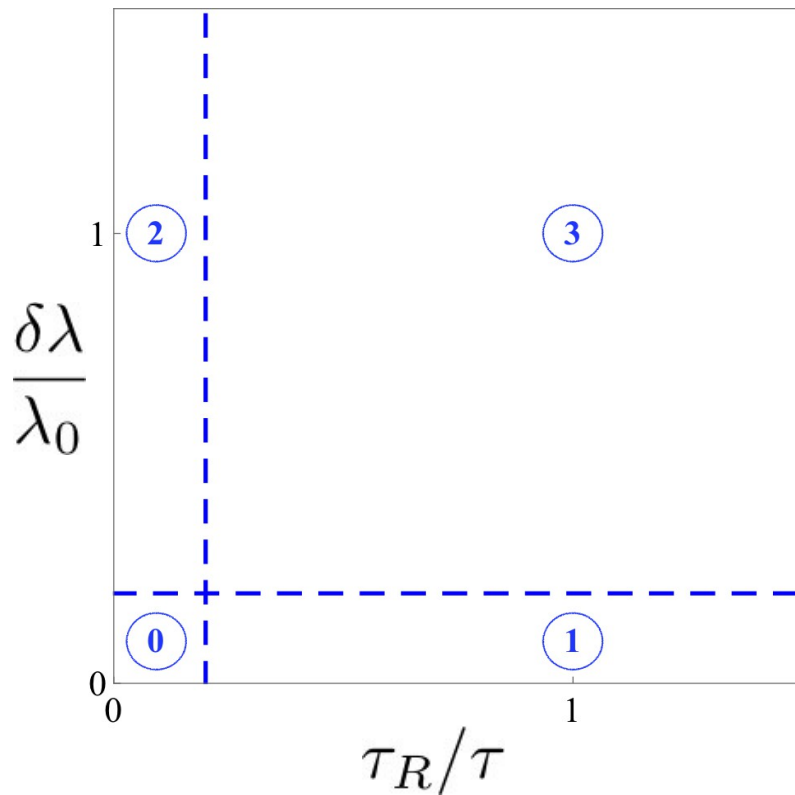


- **Escala com a duração do processo:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- **Como** $\lambda(t) = \lambda(t/\tau)$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



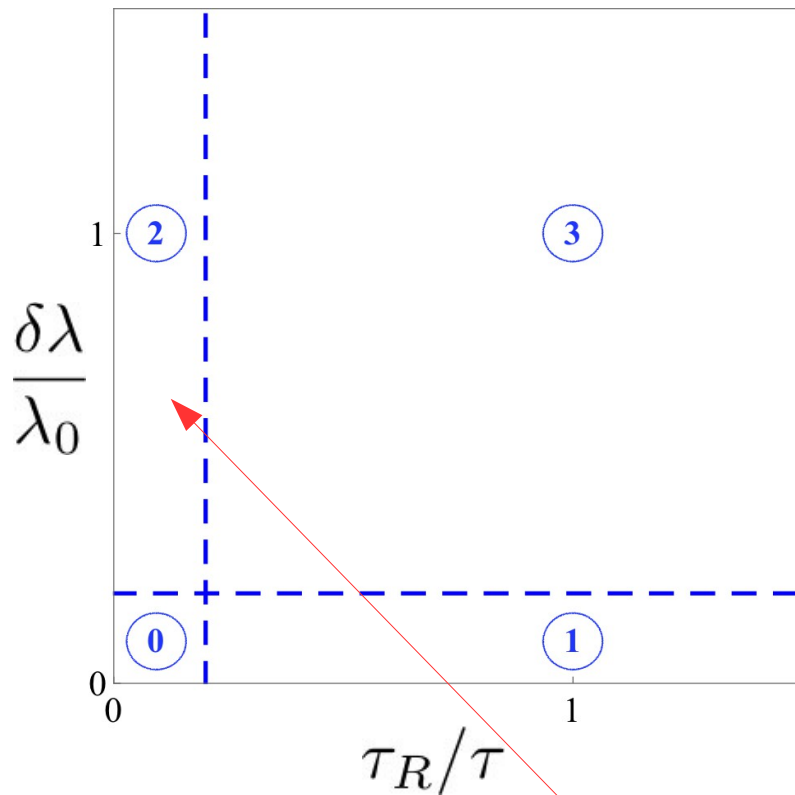
- **Escala com a duração do processo:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- **Como** $\lambda(t) = \lambda(t/\tau)$

$$s = \frac{t}{\tau} \Rightarrow W_{ex} = \frac{\beta}{\tau} \int_0^1 ds \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \tau_R[\lambda(s)] \chi[\lambda(s)]$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Escala com a duração do processo:**

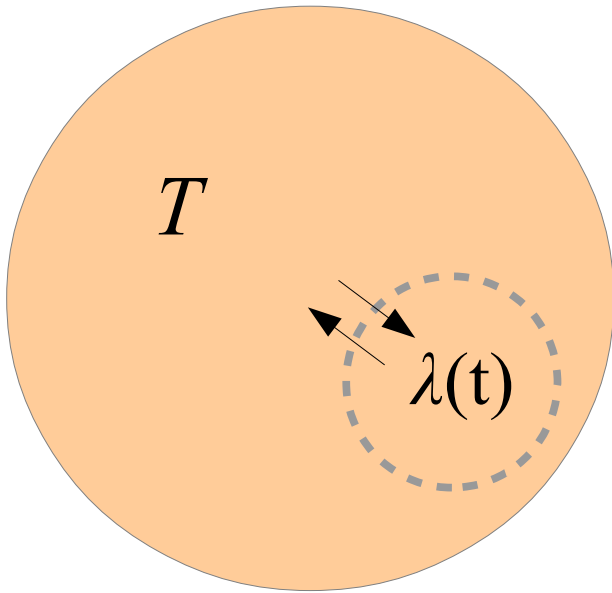
$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

- **Como** $\lambda(t) = \lambda(t/\tau)$

$$s = \frac{t}{\tau} \Rightarrow W_{ex} = \frac{\beta}{\tau} \int_0^1 ds \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \tau_R[\lambda(s)] \chi[\lambda(s)]$$

Regime com decaimento universal

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

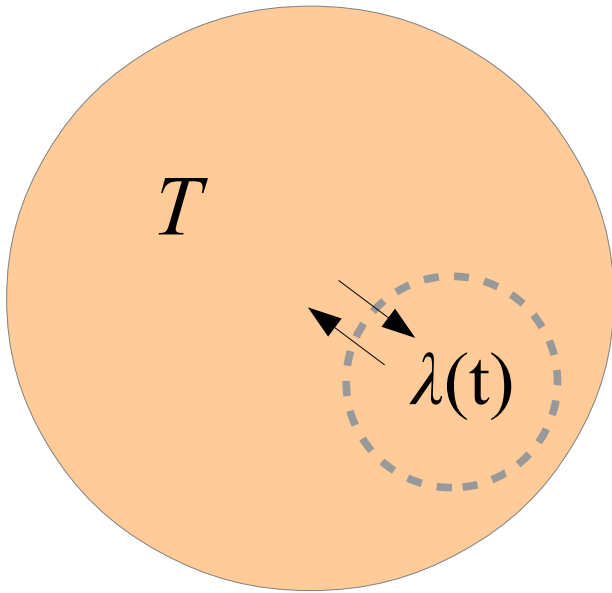


- **Teoria de Perturbação Adiabática:**

Dinâmica unitária

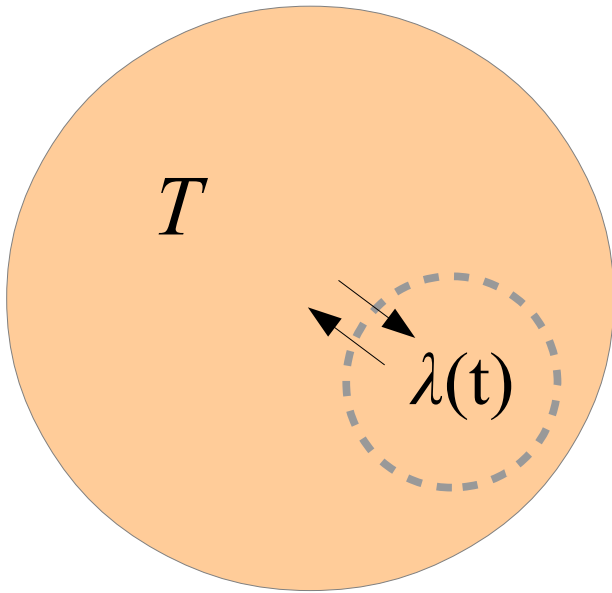
(sistema total termicamente isolado)

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Teoria de Perturbação Adiabática:**
Dinâmica unitária
(sistema total termicamente isolado)
- **Correções sistemáticas ao Teorema Adiabático em série de potências de τ_S/τ**

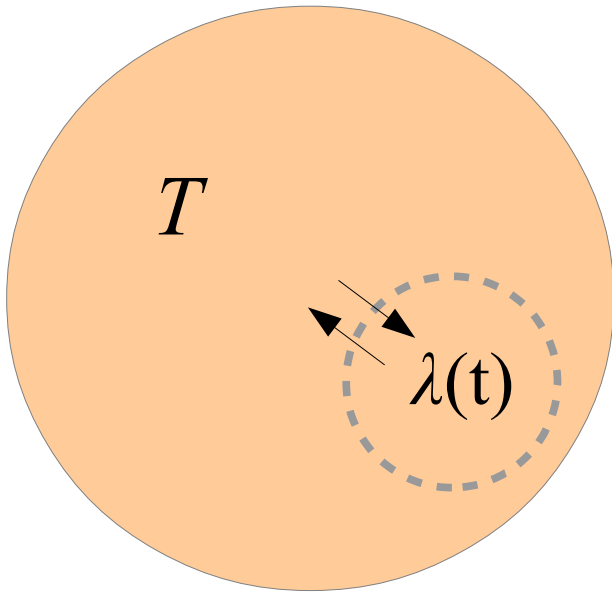
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- Teoria de Perturbação Adiabática:
Dinâmica unitária
(sistema total termicamente isolado)
- Correções sistemáticas ao Teorema Adiabático em série de potências de τ_S/τ

Escala de tempo do sistema

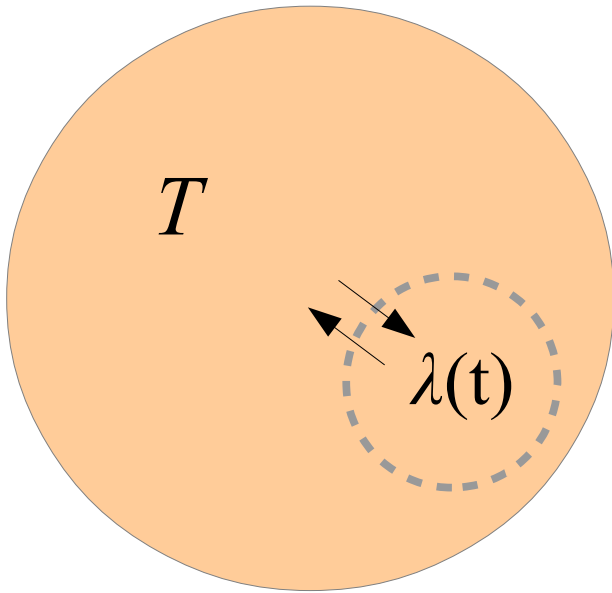
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Teoria de Perturbação Adiabática:**
Dinâmica unitária
(sistema total termicamente isolado)
- **Correções sistemáticas ao Teorema Adiabático em série de potências de τ_S/τ**

$$W_{ex} \sim \tau^{-2}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

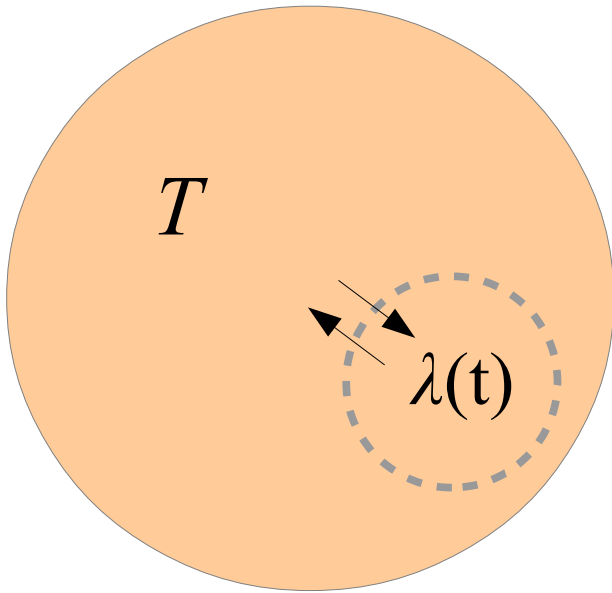


- Teoria de Perturbação Adiabática:
Dinâmica unitária
(sistema total termicamente isolado)
- Correções sistemáticas ao Teorema Adiabático em série de potências de τ_S/τ

$$W_{ex} \sim \tau^{-2}$$

Escala universal para sistemas com espectro discreto

Discordância da escala para processos lentos

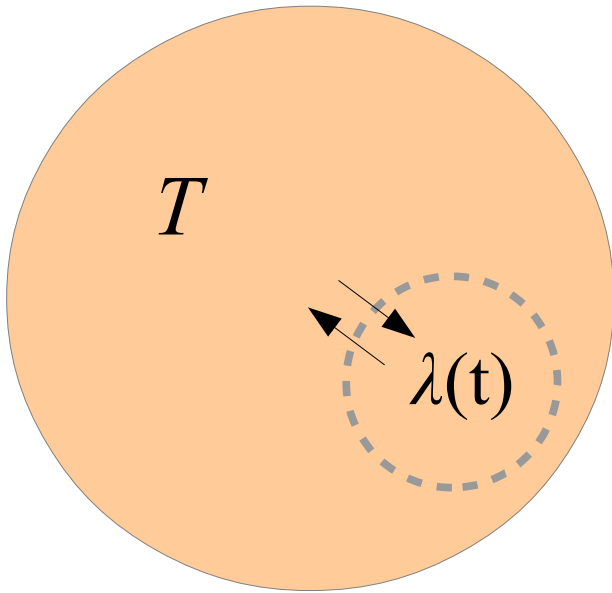


- **Limites que não comutam:**

Limite termodinâmico (contínuo)

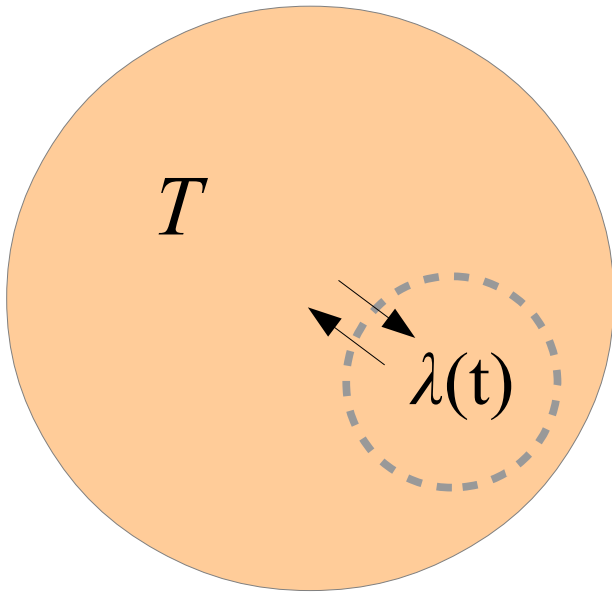
Limite adiabático

Discordância da escala para processos lentos



- **Limites que não comutam:**
 - Limite termodinâmico (contínuo)**
 - Limite adiabático**
- **Descrição efetiva versus Hamiltoniana**
 - Banho térmico fenomenológico**
 - Sistema mais banho Hamiltoniano**

Discordância da escala para processos lentos



- **Limites que não comutam:**
 - Limite termodinâmico (contínuo)**
 - Limite adiabático**
- **Descrição efetiva versus Hamiltoniana**
 - Banho térmico fenomenológico**
 - Sistema mais banho Hamiltoniano**
- **Integrabilidade**

Resultados: Landau-Zener

- **Hamiltoniano:**

$$H(\lambda) = \lambda \Delta \sigma^z + J \sigma^x$$

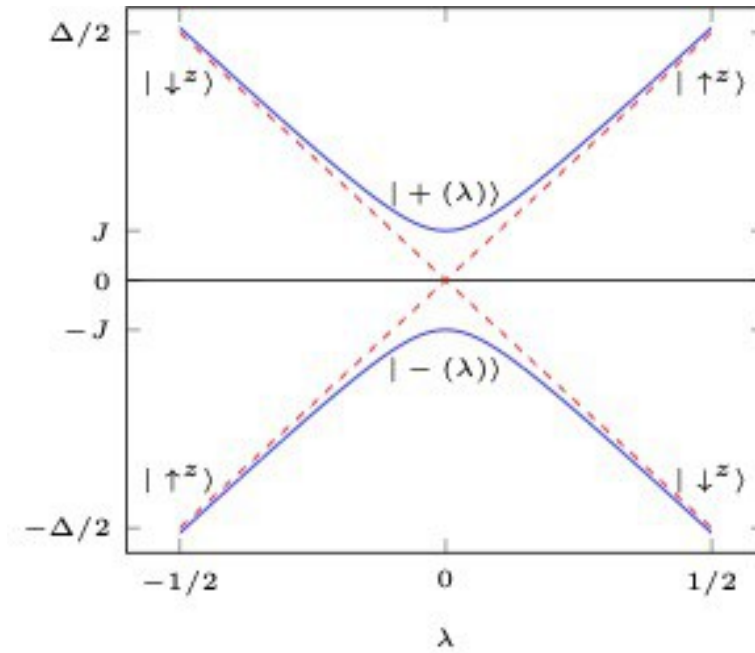
- **Protocolo linear:**

$$\lambda(t) = \frac{t}{\tau}, \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

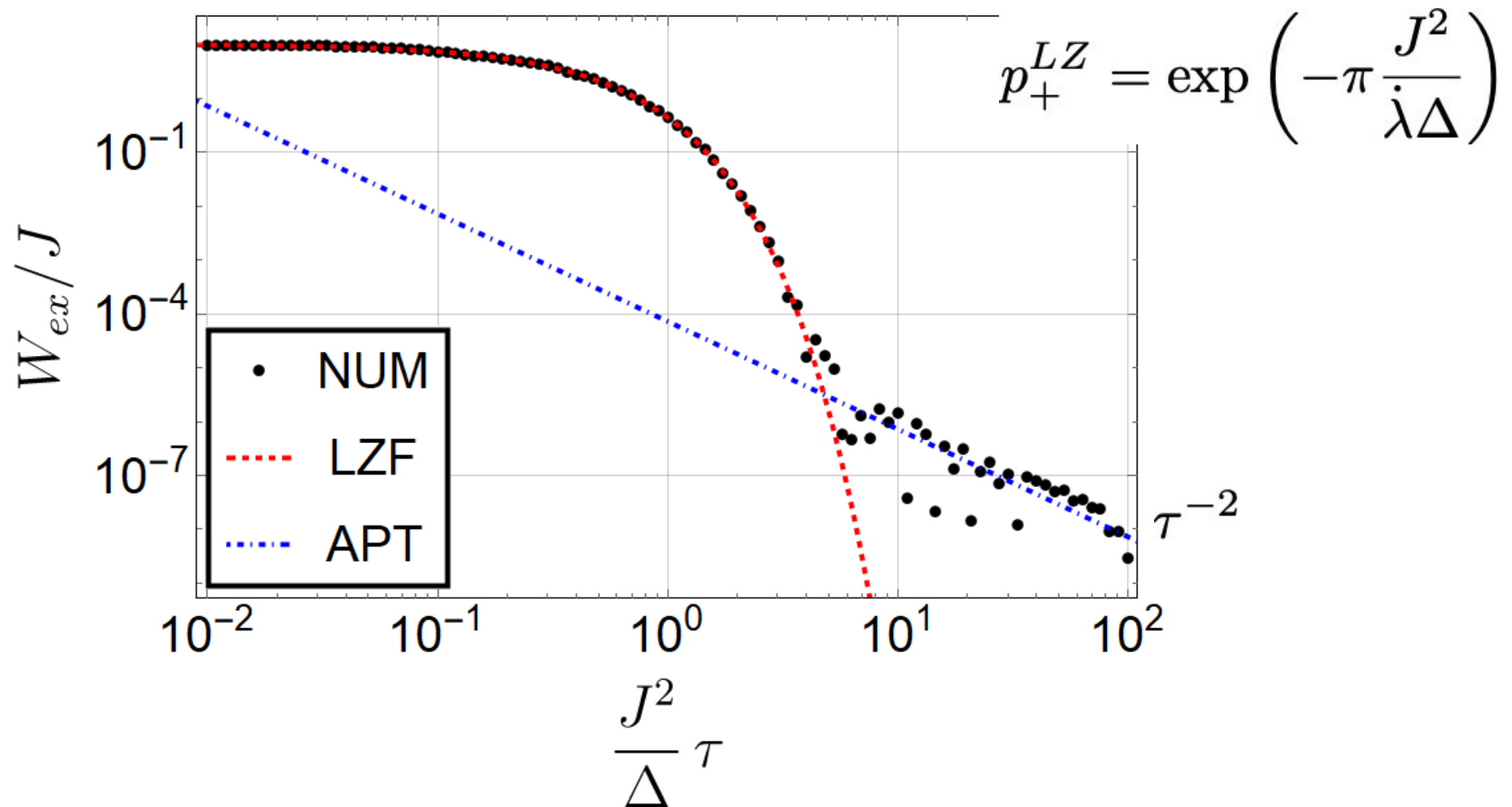
- **Trabalho excedente:**

$$W_{ex} = 2E(\lambda_f)p_+(t_f), \quad E(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 \Delta^2 + J^2}$$

$$p_+(t_f) = |\langle +(\lambda_f) | \psi_-(t_f) \rangle|^2$$



Resultados: Landau-Zener



A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

A. Soriani, E. Miranda e MVSb, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme

- **Hamiltoniano:**

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2} \left(J \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \Gamma(\lambda) \sum_{j=1}^N \sigma_j^x \right) \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z$$

- **Protocolo linear: cruzamento do ponto crítico**

$$\Gamma(\lambda(t)) = J + \lambda(t) \Delta$$

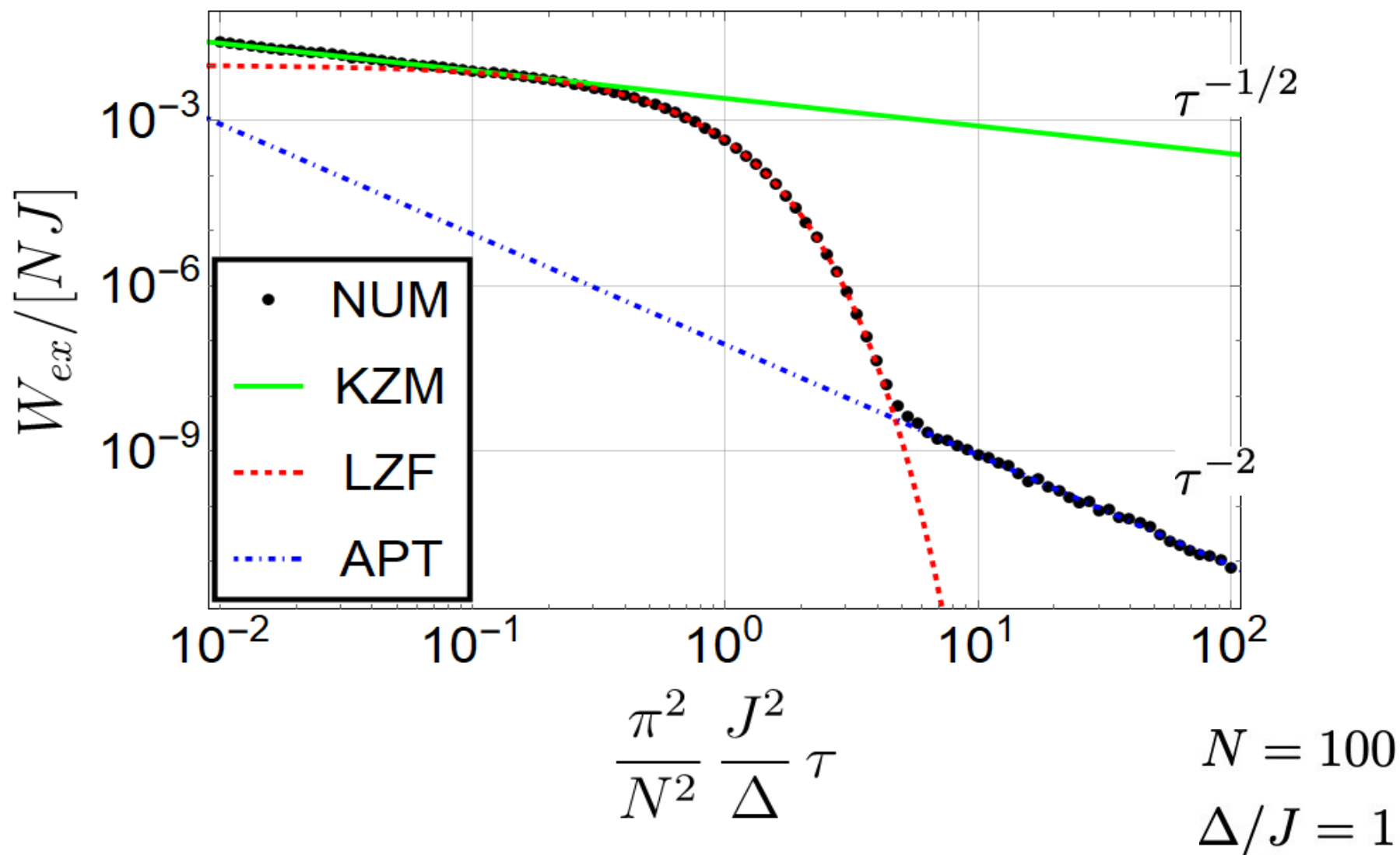
$$\lambda(t) = \frac{t}{\tau}, \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

A. Soriani, E. Miranda e MVSB, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme

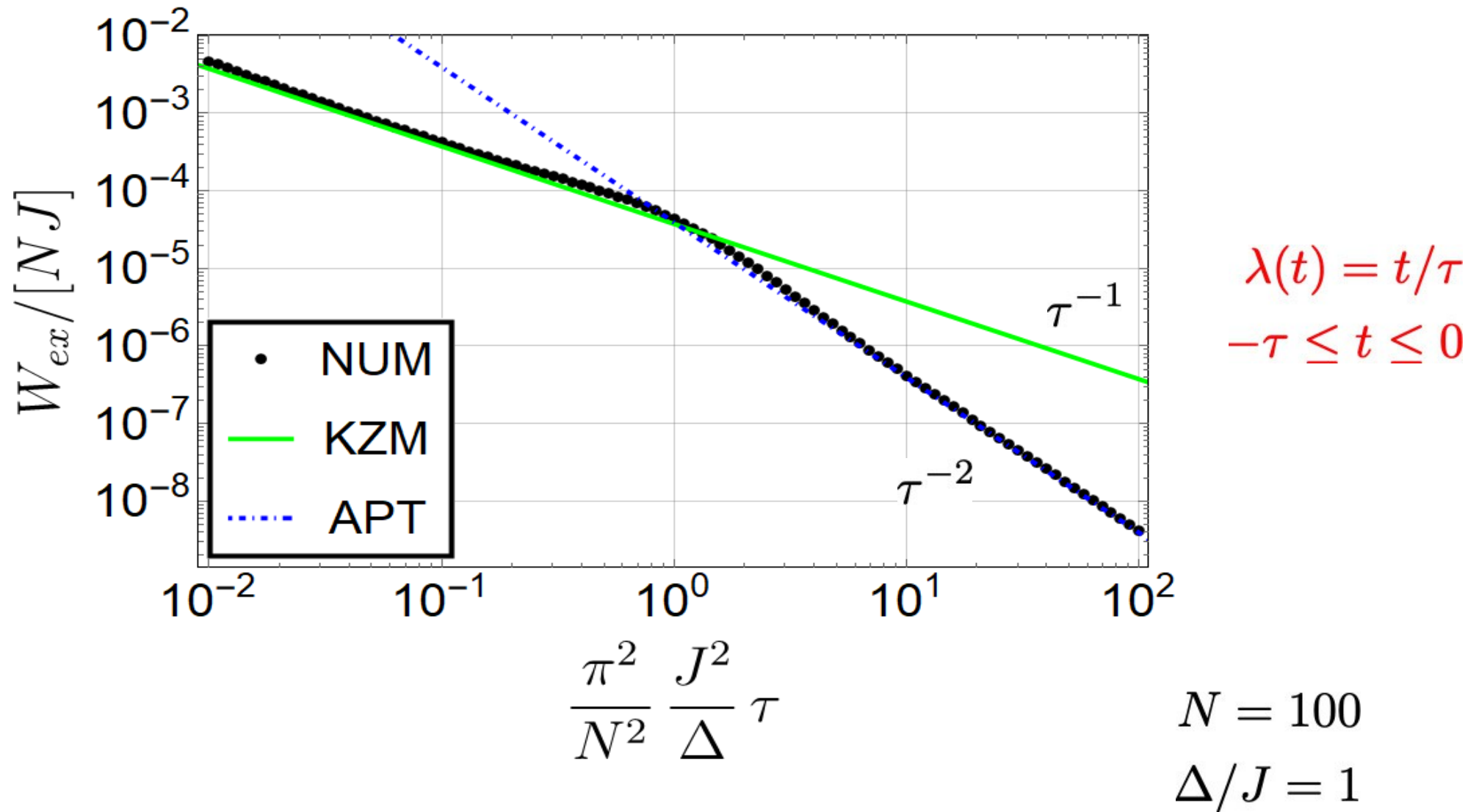


A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

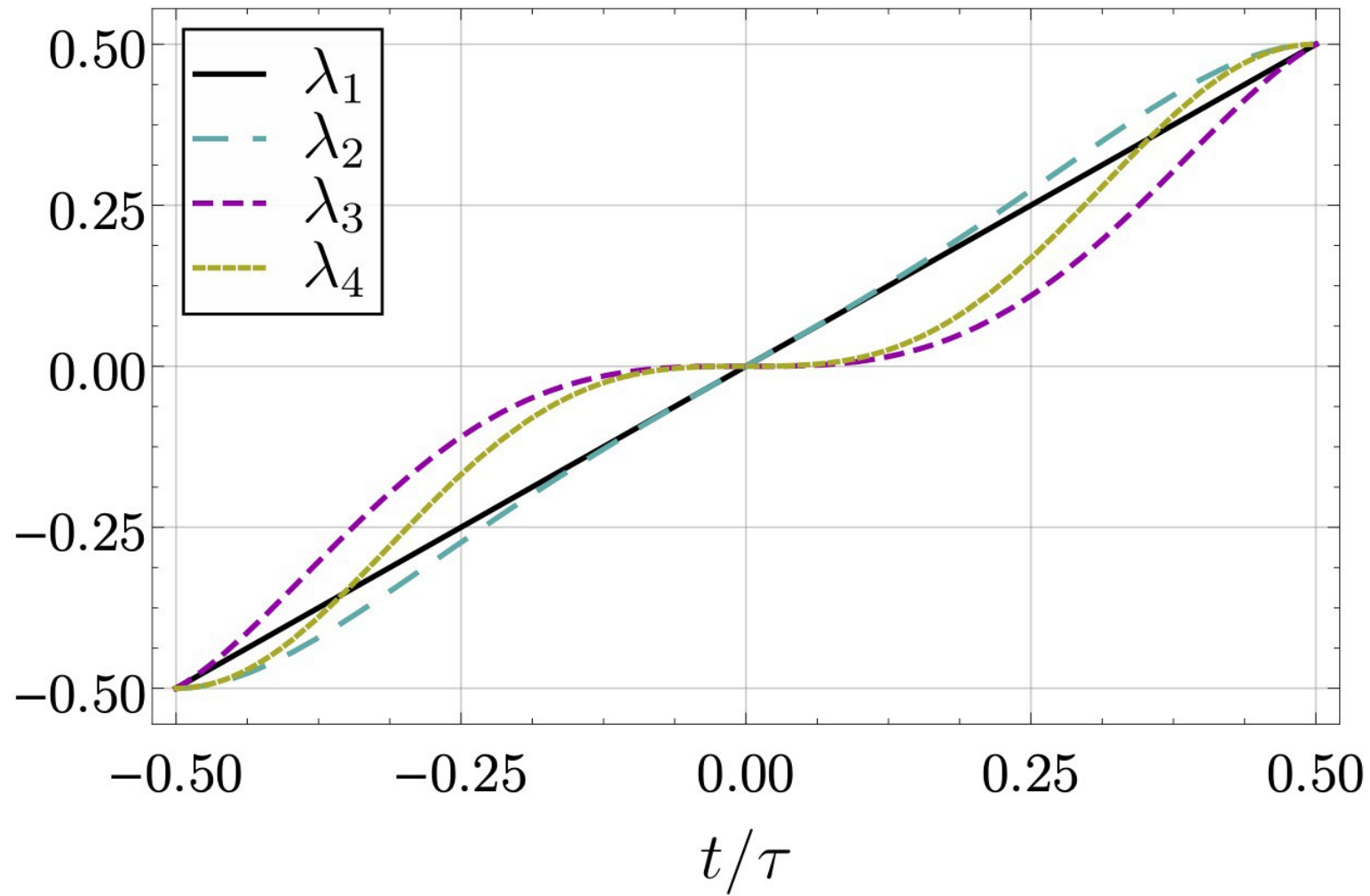
A. Soriani, E. Miranda e MVSB, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme



Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme

- Protocolo não-linear: cruzamento do ponto crítico

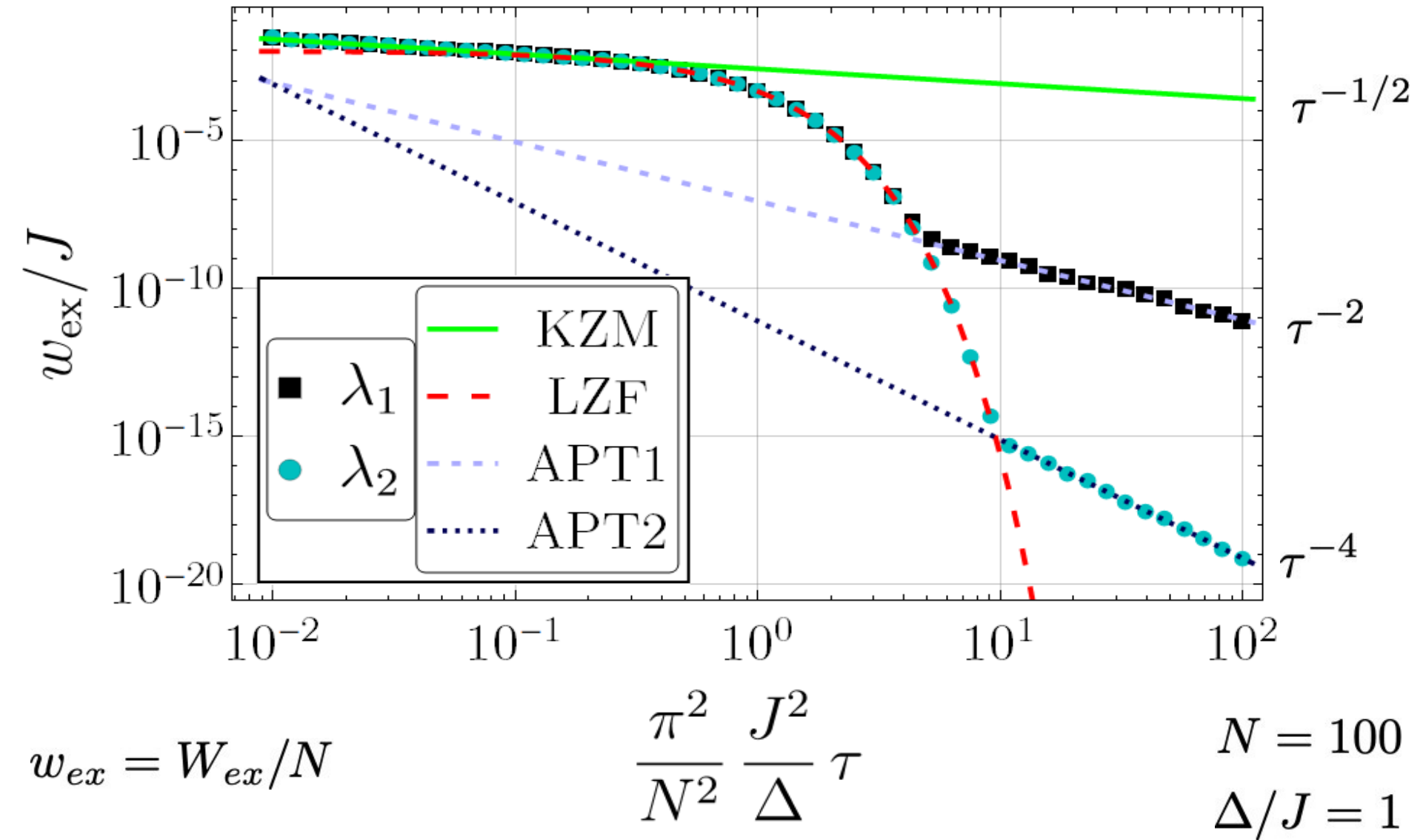


A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

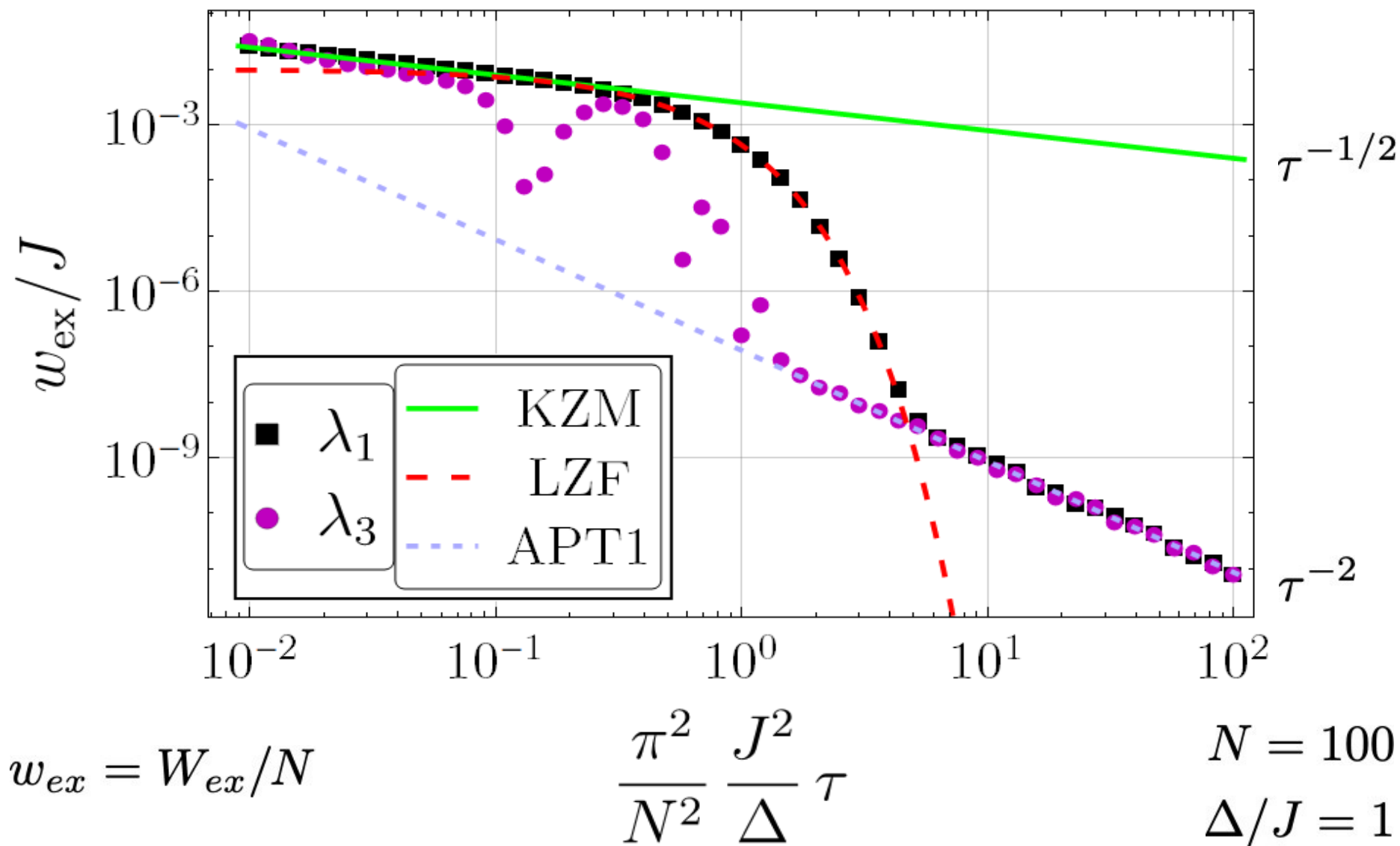
A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

A. Soriani, E. Miranda e MVSb, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme



Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme

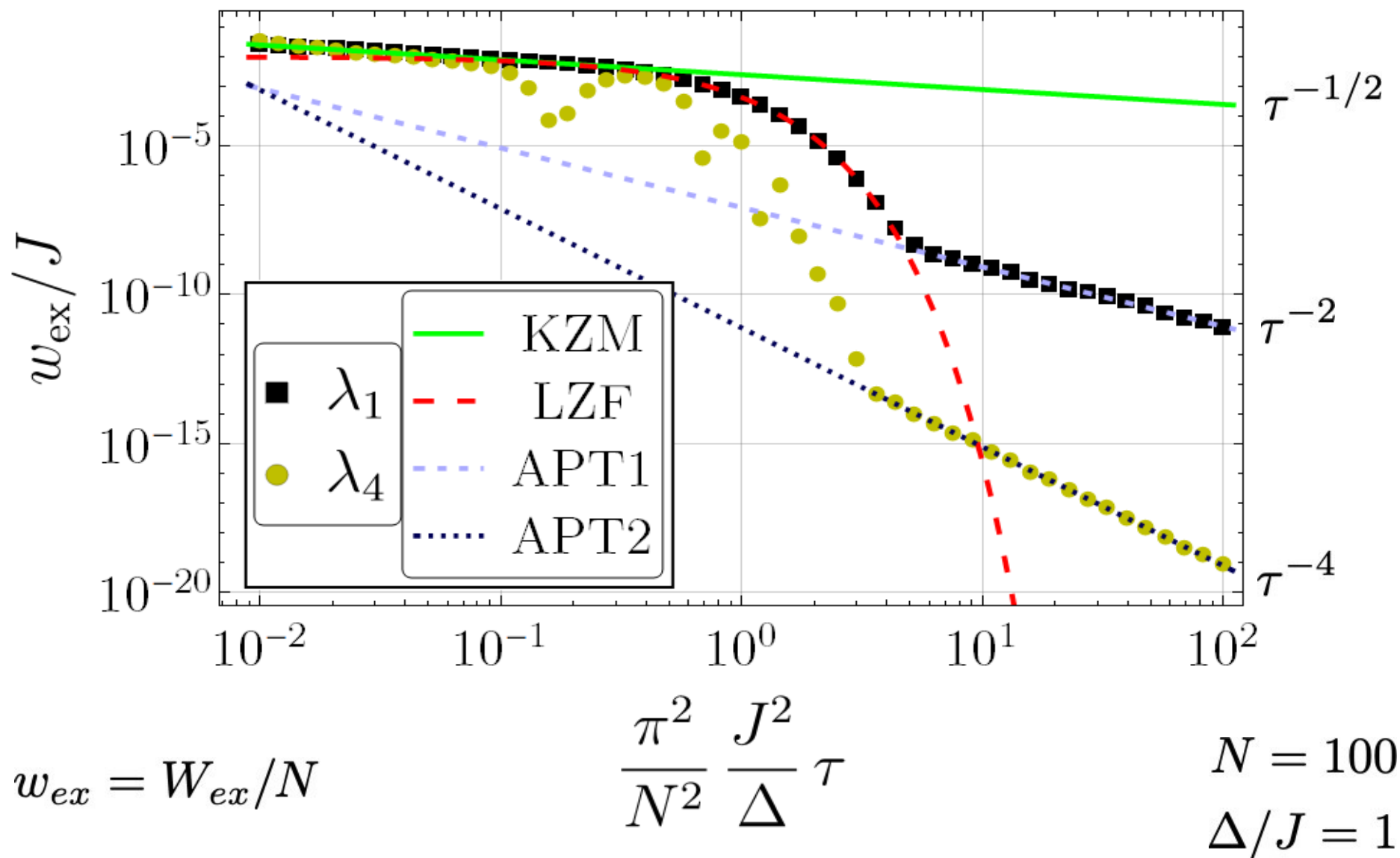


A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

A. Soriani, P. Nazé, MVSb, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

A. Soriani, E. Miranda e MVSb, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Cadeia Ising quântica - manipulação uniforme

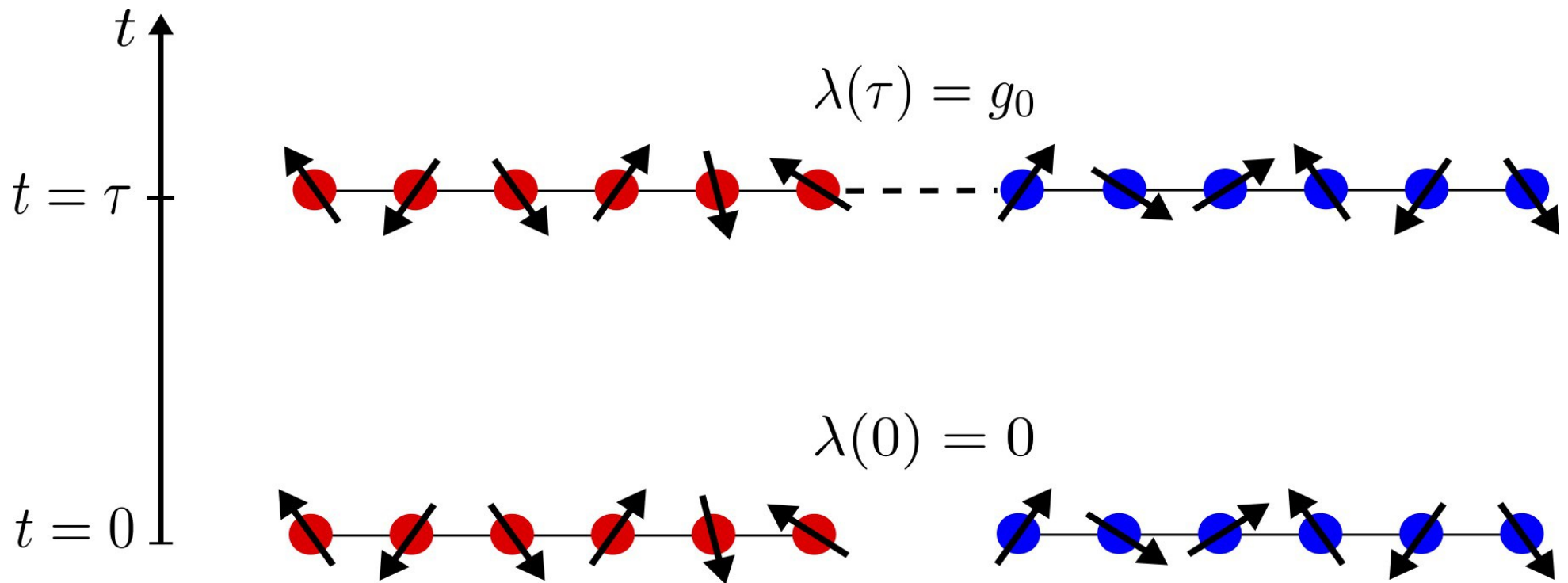


A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 042423 (2022)

A. Soriani, P. Nazé, MVSB, B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. A 105, 052442 (2022)

A. Soriani, E. Miranda e MVSB, New J. Phys. 24, 113037 (2022)

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2



Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Hamiltoniano:** $H_0 = H_1 + H_2$

$$H_{\ell=1,2} = J \sum_j (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z) + h_\ell \sum_j S_j^z$$

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Hamiltoniano:** $H_0 = H_1 + H_2$

$$H_{\ell=1,2} = J \sum_j (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z) + h_\ell \sum_j S_j^z$$

$$J = 1, \quad J_z \geq 0, \quad h_\ell > 0, \quad h_1 \neq h_2$$

$$-N \leq j \leq -1 \Rightarrow \ell = 1, \quad 1 \leq j \leq N \Rightarrow \ell = 2$$

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Hamiltoniano:** $H_0 = H_1 + H_2$

$$H_{\ell=1,2} = J \sum_j (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z) + h_\ell \sum_j S_j^z$$

$$J = 1, J_z \geq 0, h_\ell > 0, h_1 \neq h_2$$

$$-N \leq j \leq -1 \Rightarrow \ell = 1, 1 \leq j \leq N \Rightarrow \ell = 2$$

- **Junção (fraca) a tempo finito:**

$$H[\lambda(t)] = H_0 + \lambda(t)V, \lambda(0) = 0, \lambda(\tau) = 1$$

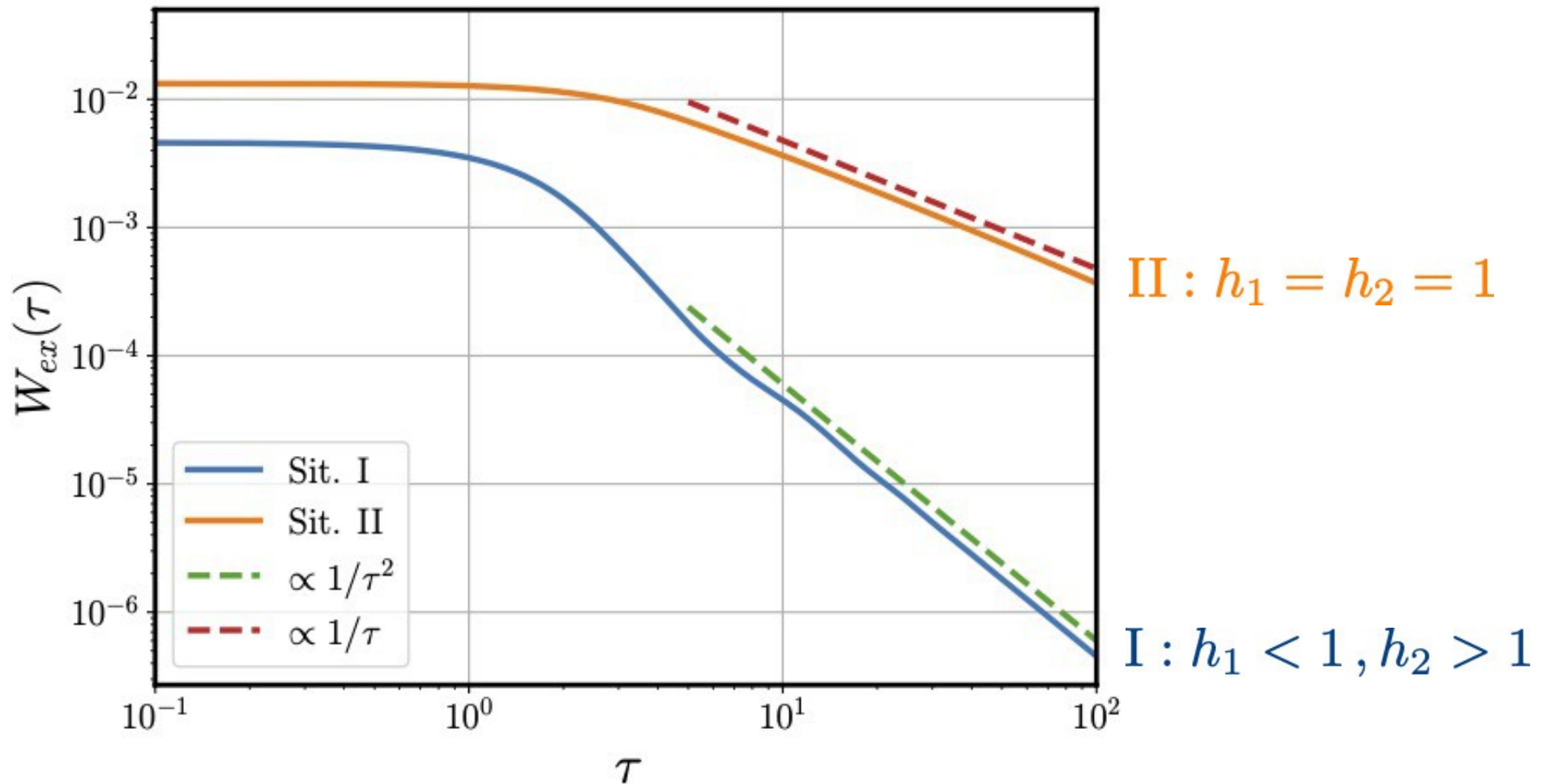
$$V = g_0 (S_{-1}^x S_1^x + S_{-1}^y S_1^y), g_0 \ll 1$$

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Modelo XX:** $J_z = 0$ - **protocolo linear:** $\lambda(t) = \frac{t}{\tau}$

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

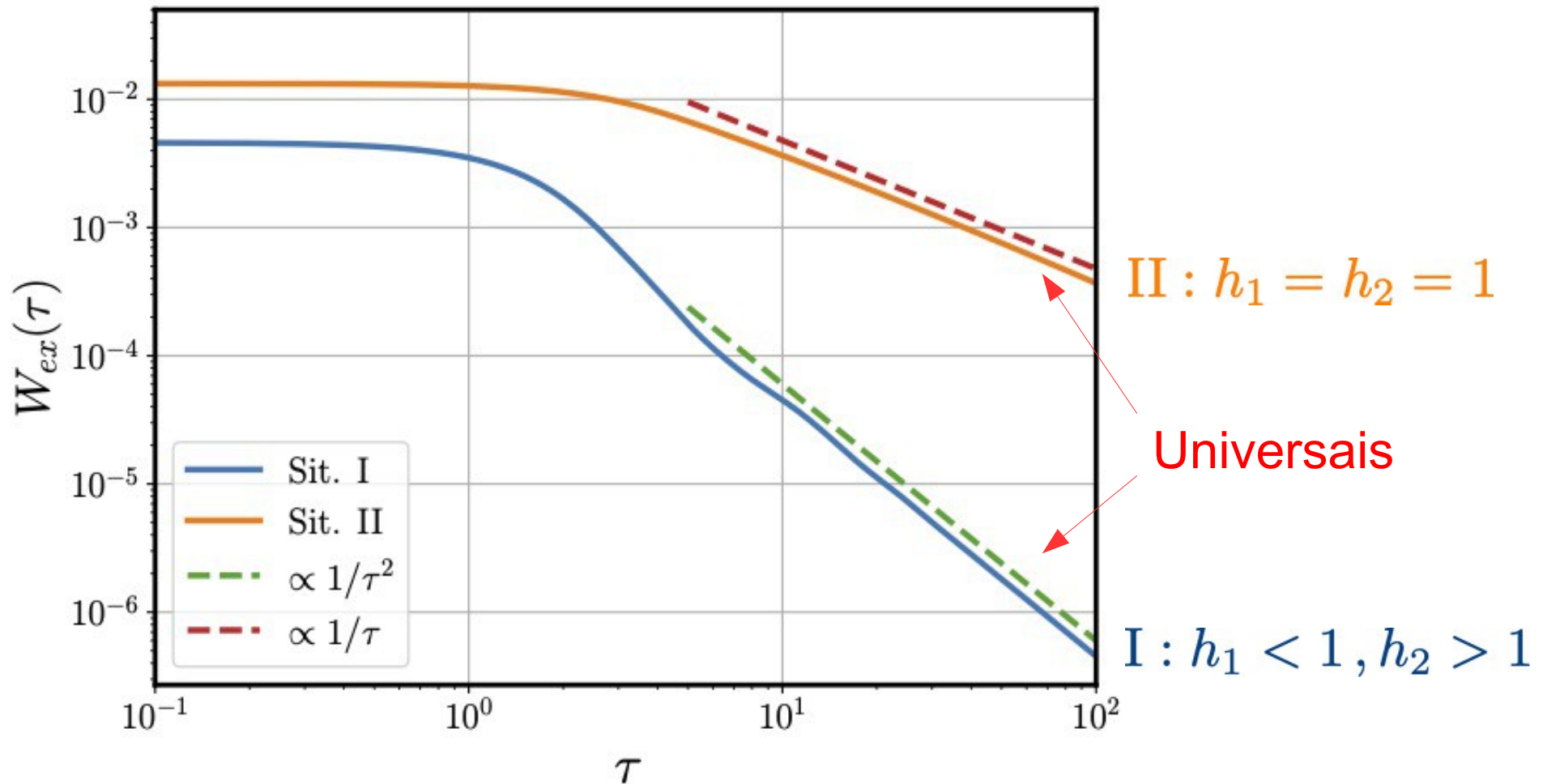
- Modelo XX: $J_z = 0$ - protocolo linear: $\lambda(t) = \frac{t}{\tau}$



$$g_0 = 1/4, \Delta = h_2 - 1 = 1, N = 600$$

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Modelo XX:** $J_z = 0$ - **protocolo linear:** $\lambda(t) = \frac{t}{\tau}$



$$g_0 = 1/4, \Delta = h_2 - 1 = 1, N = 600$$

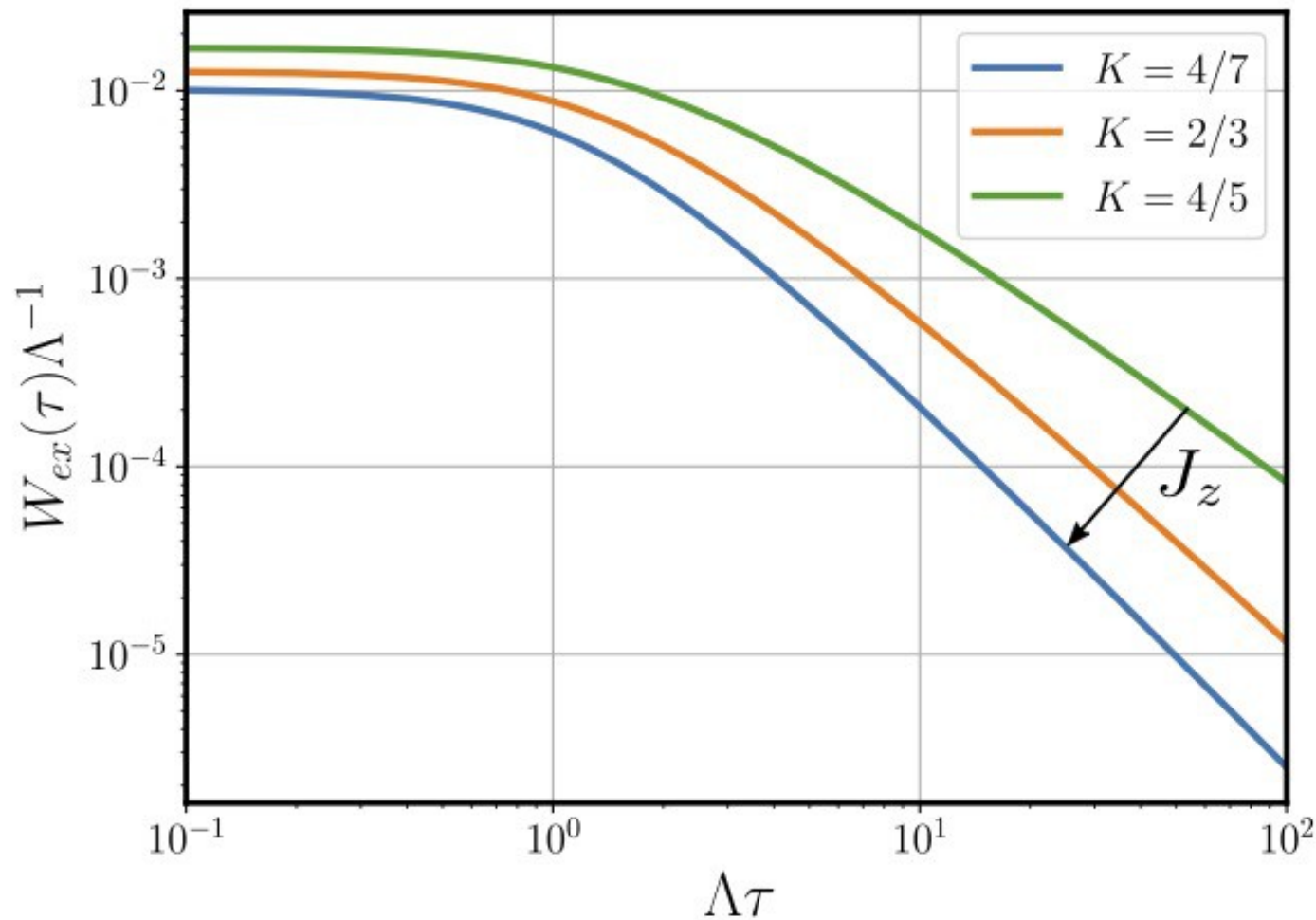
Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Modelo XXZ:** $0 < J_z < 1, h_\ell = 0$ - **protocolo linear:** $\lambda(t) = \frac{t}{\tau}$

Ambas as cadeias na fase crítica antiferromagnética

Resultados: Junção de duas cadeias quânticas de spin-1/2

- **Modelo XXZ:** $0 < J_z < 1, h_\ell = 0$ - **protocolo linear:** $\lambda(t) = \frac{t}{\tau}$

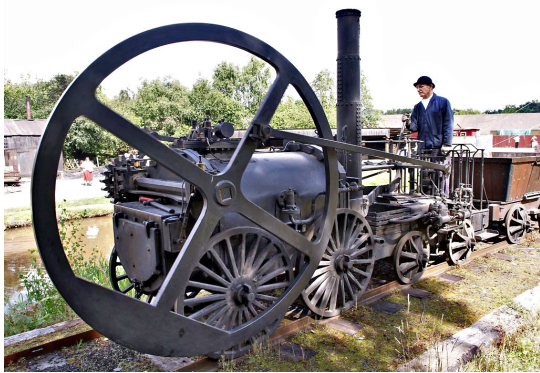


$$K \approx 1 - \frac{2}{\pi} J_z$$

$$g_0 = 1/4$$

Sumário

- **A Teoria de Perturbação Adiabática fornece decaimentos universais do custo energético para sistemas com espectro discreto.**
- **Para sistemas de espectro contínuo sem gap o comportamento do decaimento pode ser bastante rico, favorecendo inclusive a tendência ao regime adiabático (interações).**
- **A existência de um regime com decaimento universal de expoente -1 ainda deve ser melhor investigada.**



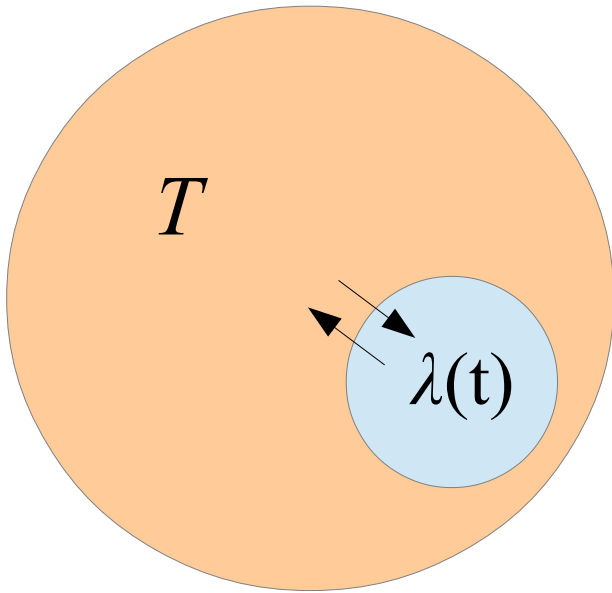
Obrigado pela atenção



Regimes próximos do equilíbrio

Processos lentos

Regimes próximos do equilíbrio



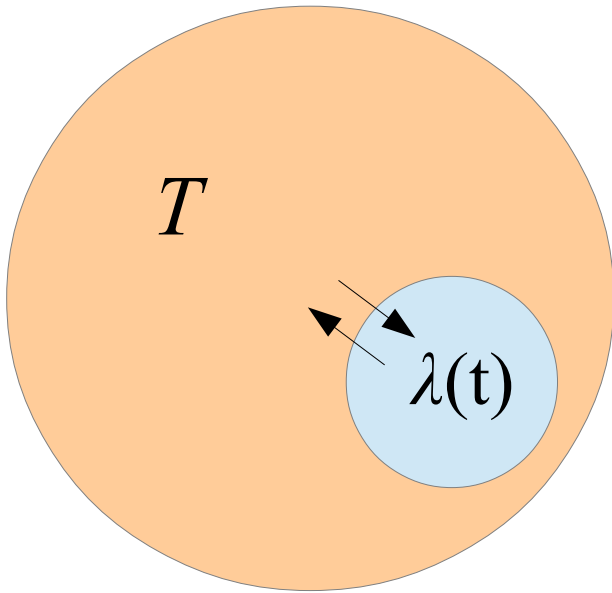
- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi(t - t') g(t')$$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \delta\lambda \Psi(0) g(t) + \delta\lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t - u)$$

Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

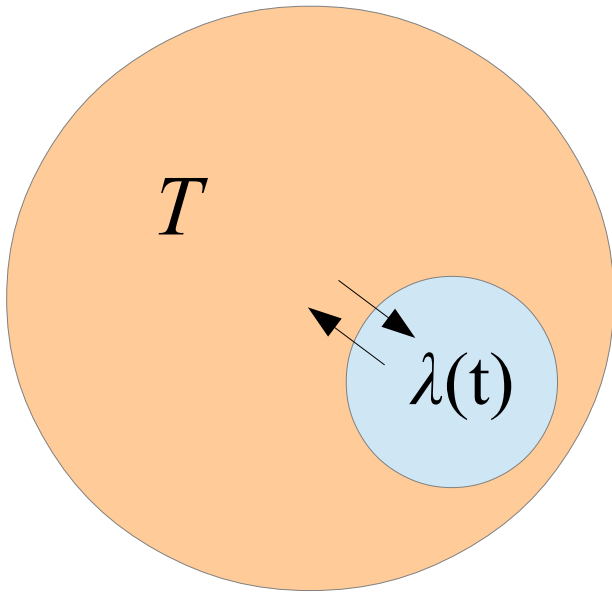
$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi(t - t') g(t')$$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \delta\lambda \Psi(0) g(t) + \delta\lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t - u)$$

$$\Phi(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

A red arrow points from the $\Psi(u)$ term in the equation above to the $\Psi(t)$ in this equation.

Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

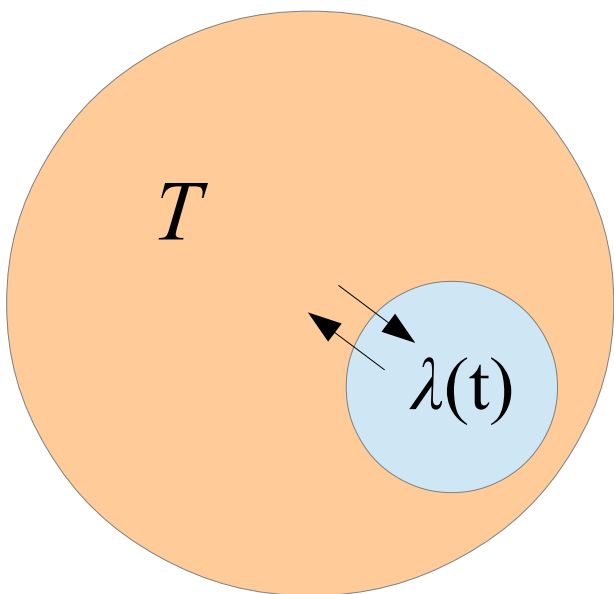
- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi(t - t') g(t')$$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \delta\lambda \Psi(0) g(t) + \delta\lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t - u)$$

$$= \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0) [\lambda(t) - \lambda_0]$$

Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

- **Regime linear:** $\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$

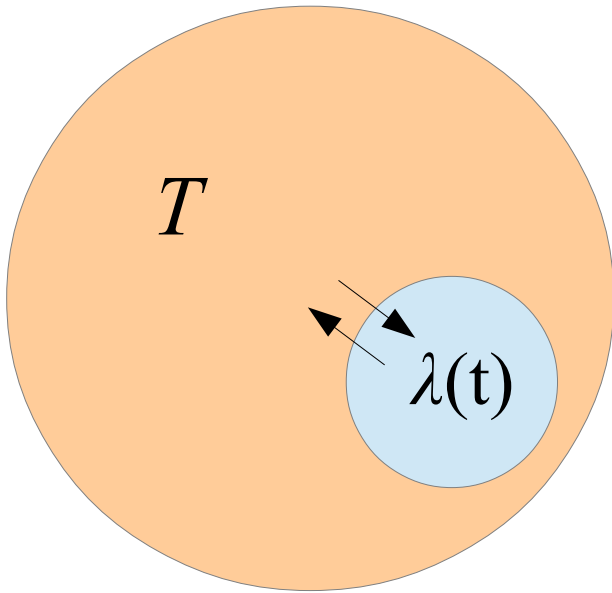
$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} = \delta\lambda \int_0^t dt' \Phi(t - t') g(t')$$

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \delta\lambda \Psi(0) g(t) + \delta\lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t - u)$$

$$= \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0) [\lambda(t) - \lambda_0]$$

Evolução paramétrica com
 $\lambda(t)$

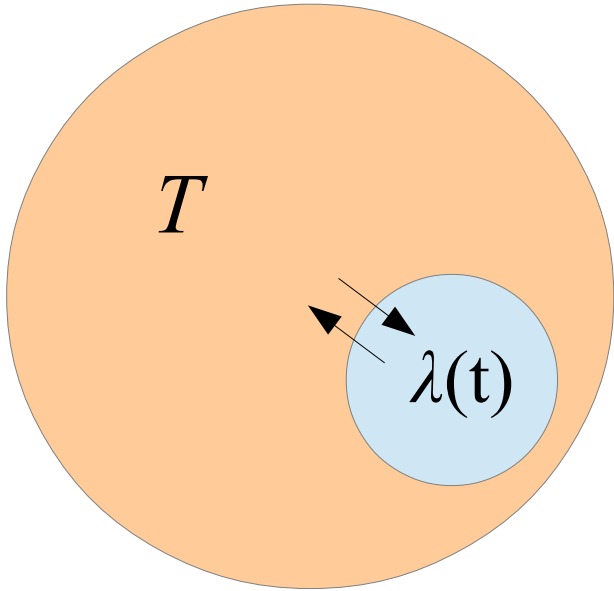
Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

$$W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0)[\lambda(t) - \lambda_0] \right)$$

Regimes próximos do equilíbrio

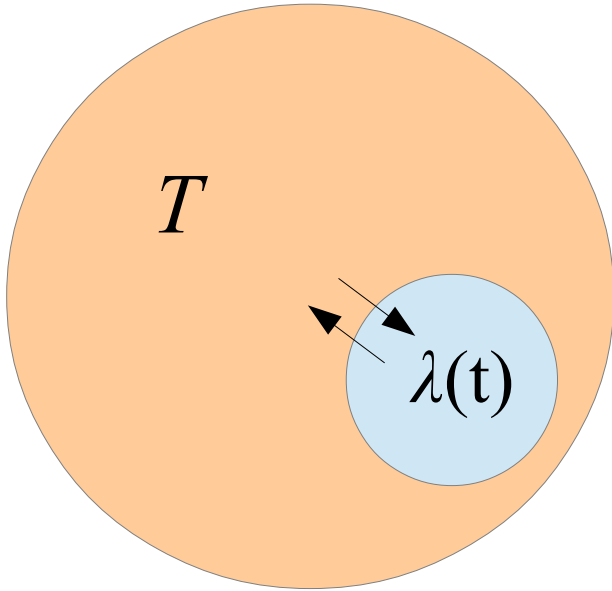


- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

$$W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0)[\lambda(t) - \lambda_0] \right)$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{F}(\lambda_0 + \delta\lambda) - \mathcal{F}(\lambda_0)$$

Regimes próximos do equilíbrio

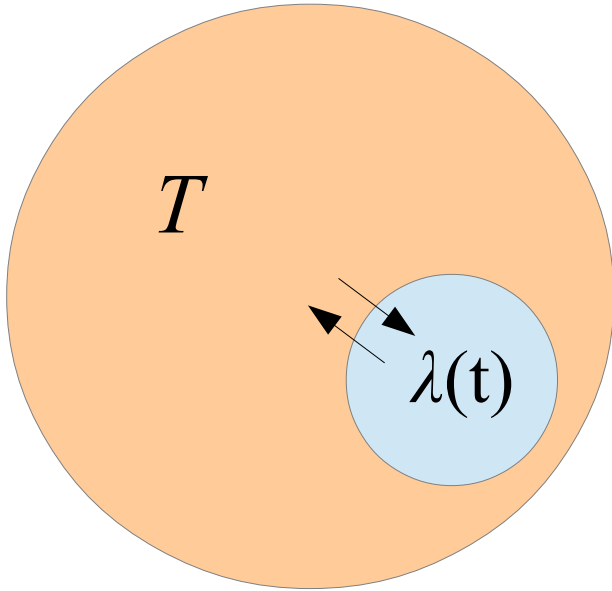


- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

$$W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0)[\lambda(t) - \lambda_0] \right)$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{F}(\lambda_0 + \delta\lambda) - \mathcal{F}(\lambda_0) \rightarrow \Delta F, \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} < 1$$

Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

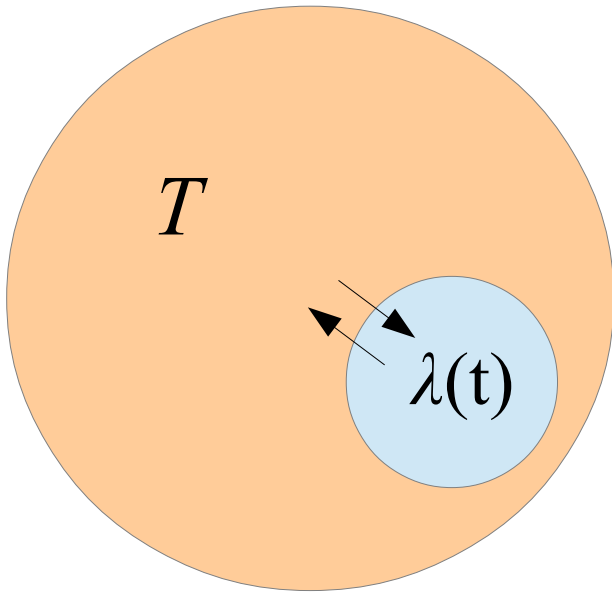
$$W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0)[\lambda(t) - \lambda_0] \right)$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{F}(\lambda_0 + \delta\lambda) - \mathcal{F}(\lambda_0) \rightarrow \Delta F, \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} < 1$$

- **Conclusão:**

$$\overline{\partial_\lambda H}(t) = \overline{\partial_\lambda H}(t)_{quase-est} + \overline{\partial_\lambda H}(t)_{tempo-fin}$$

Regimes próximos do equilíbrio



- **Trabalho:** $W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}[\lambda(t); t]$

$$W = \int_0^\tau dt \frac{d\lambda}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} - \Psi(0)[\lambda(t) - \lambda_0] \right)$$

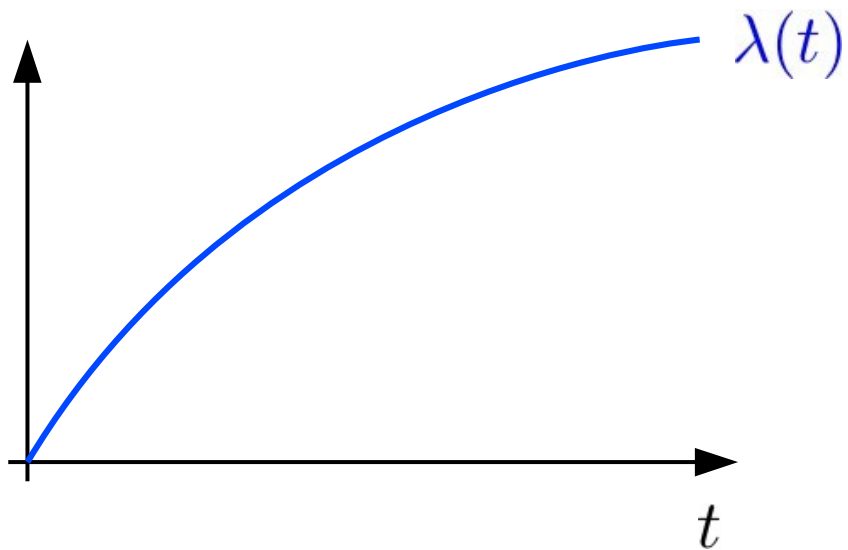
$$\Rightarrow W = \mathcal{F}(\lambda_0 + \delta\lambda) - \mathcal{F}(\lambda_0) \rightarrow \Delta F, \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} < 1$$

- **Conclusão:**

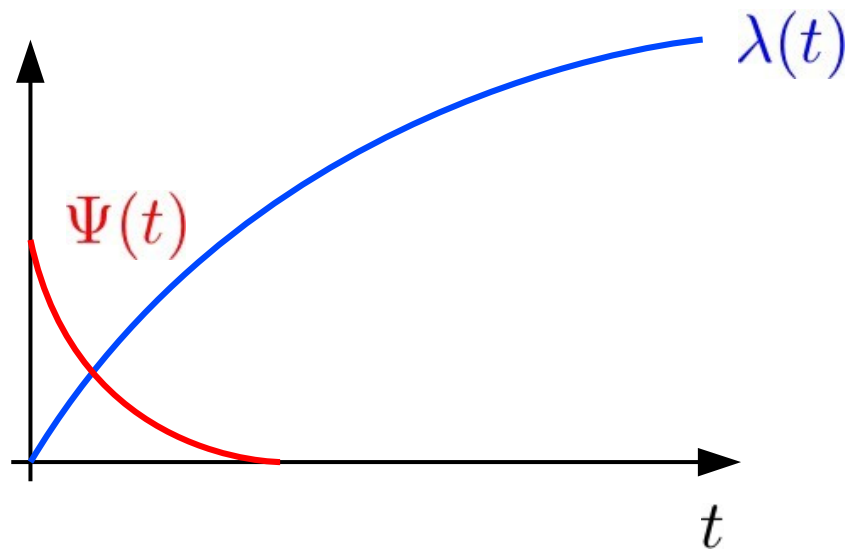
$$\overline{\partial_\lambda H}(t) = \overline{\partial_\lambda H}(t)_{quase-est} + \overline{\partial_\lambda H}(t)_{tempo-fin}$$

$$\Rightarrow W = W_{qs} + W_{ex}$$

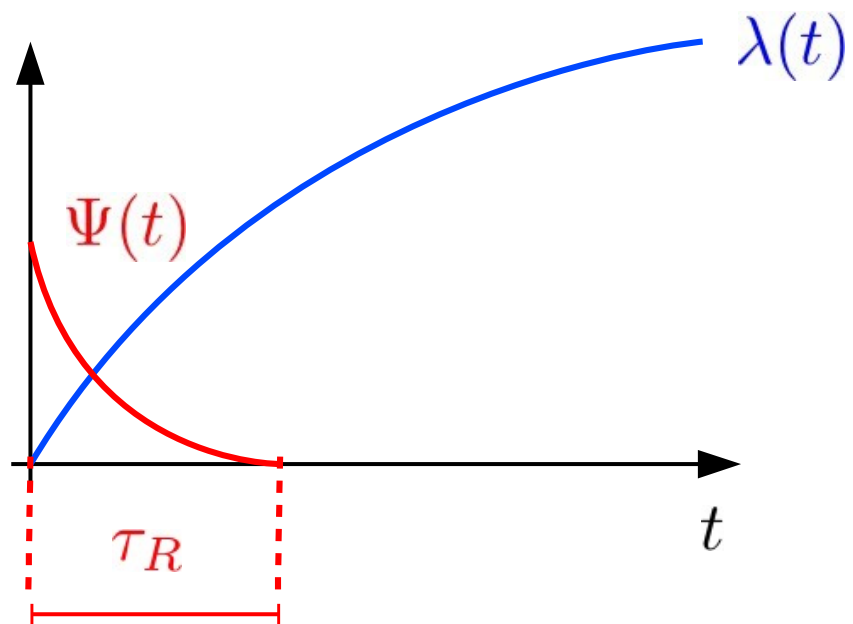
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



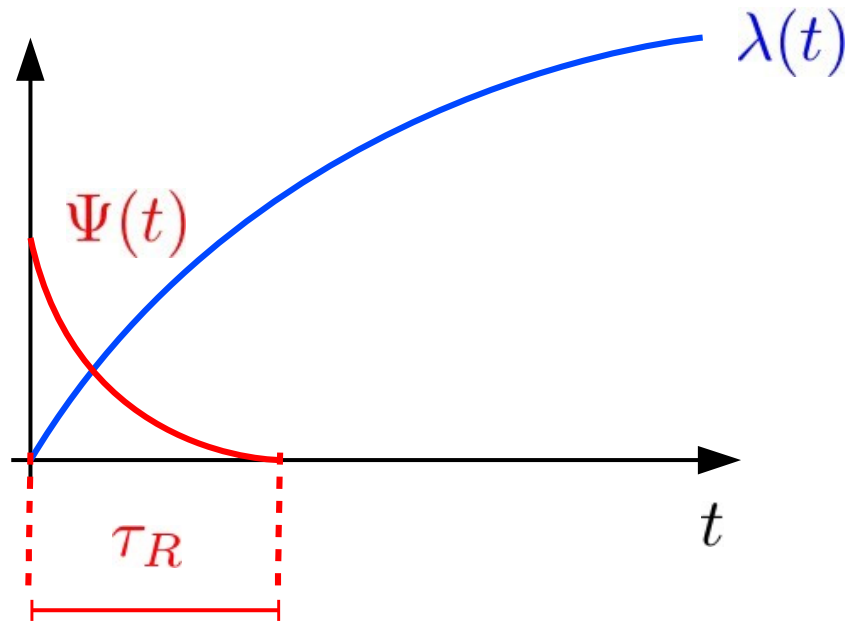
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

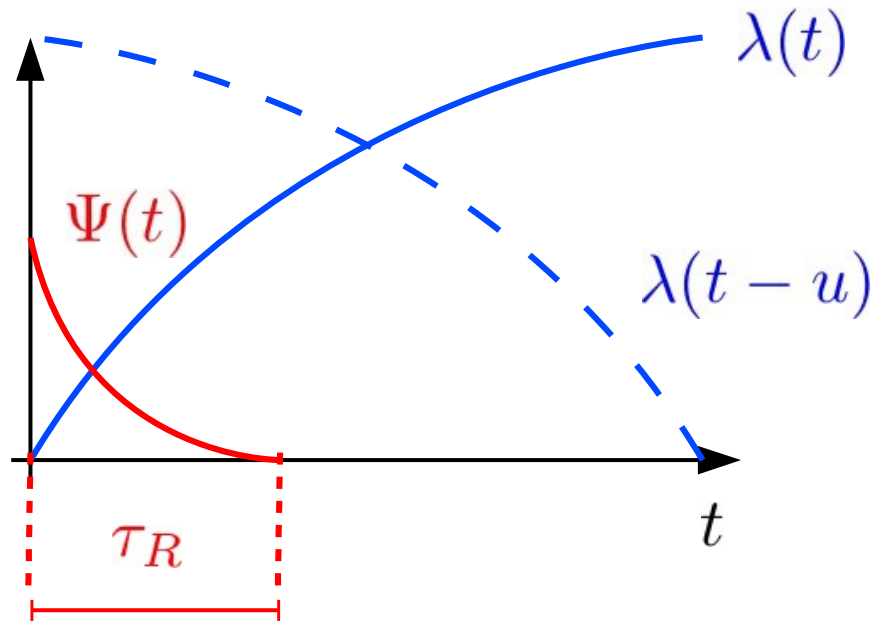


Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



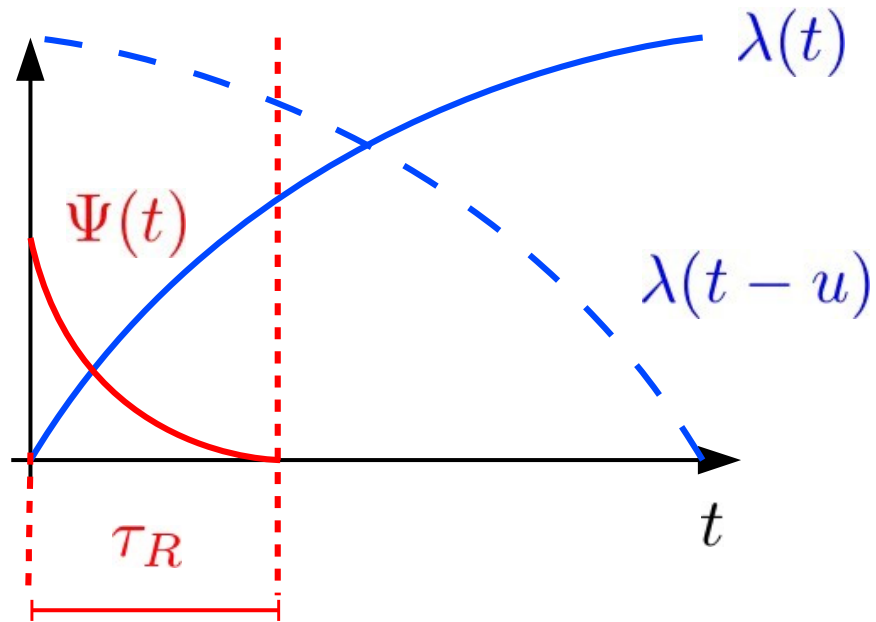
$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

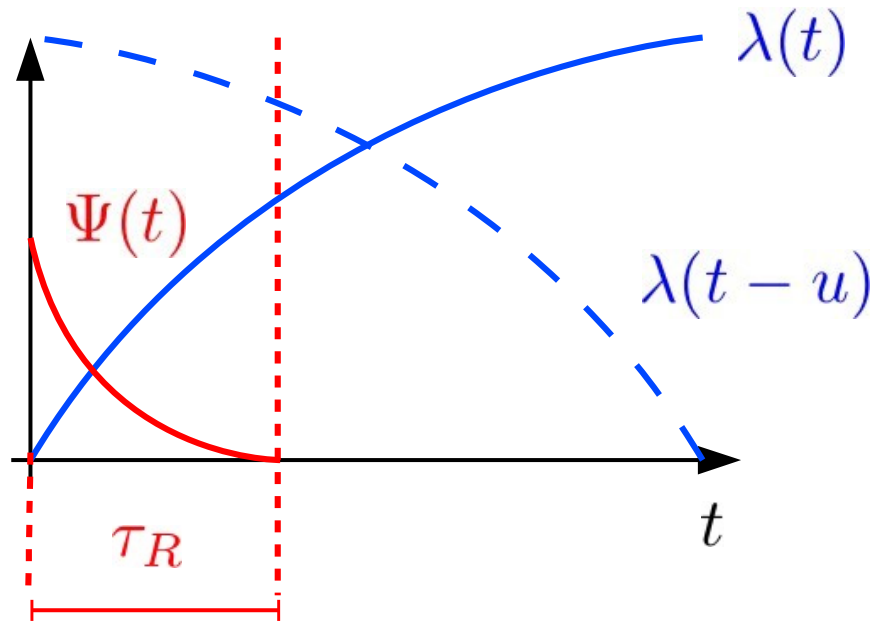
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u)$$

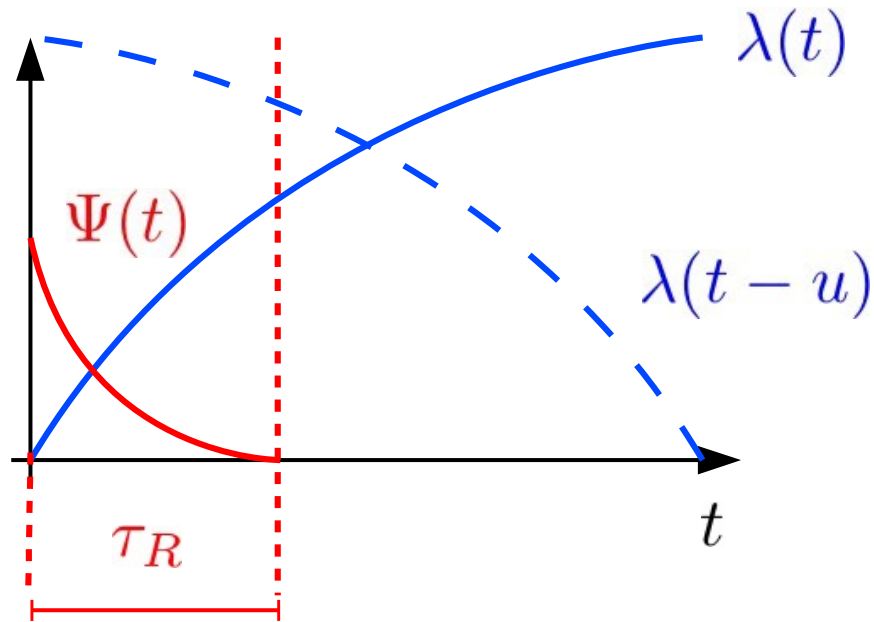
Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ = \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u) = \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

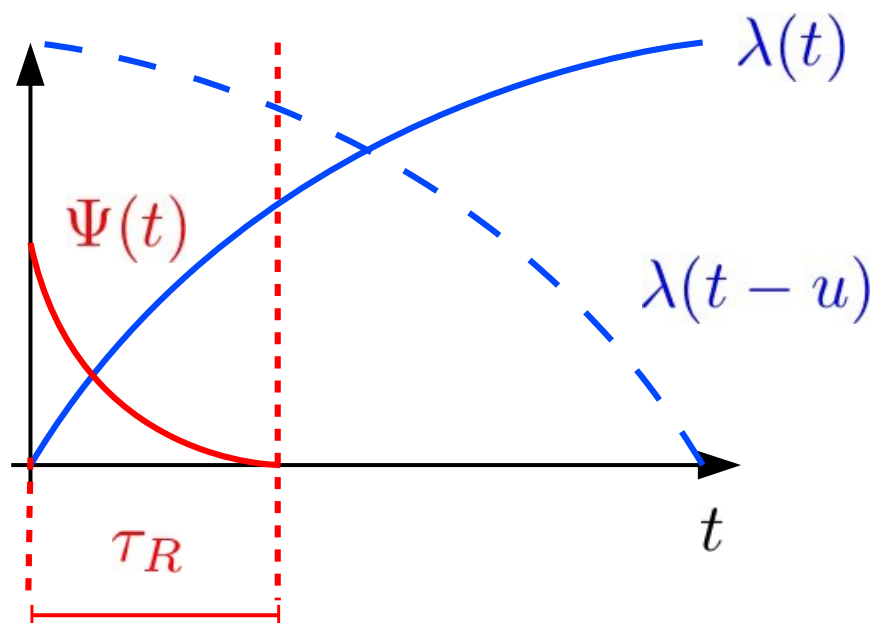


$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ = \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u) du = \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

$$\tau_R = \int_0^\infty dt \frac{\Psi(t)}{\Psi(0)}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

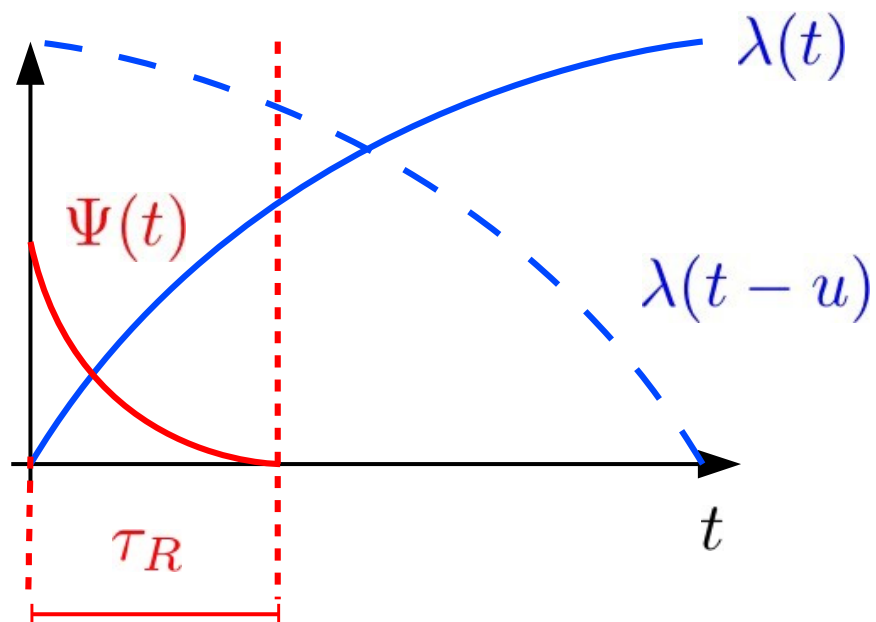


$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ = \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u) du = \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

$$\Rightarrow \overline{\partial_\lambda H}(t)_{tempo-fin} \approx \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



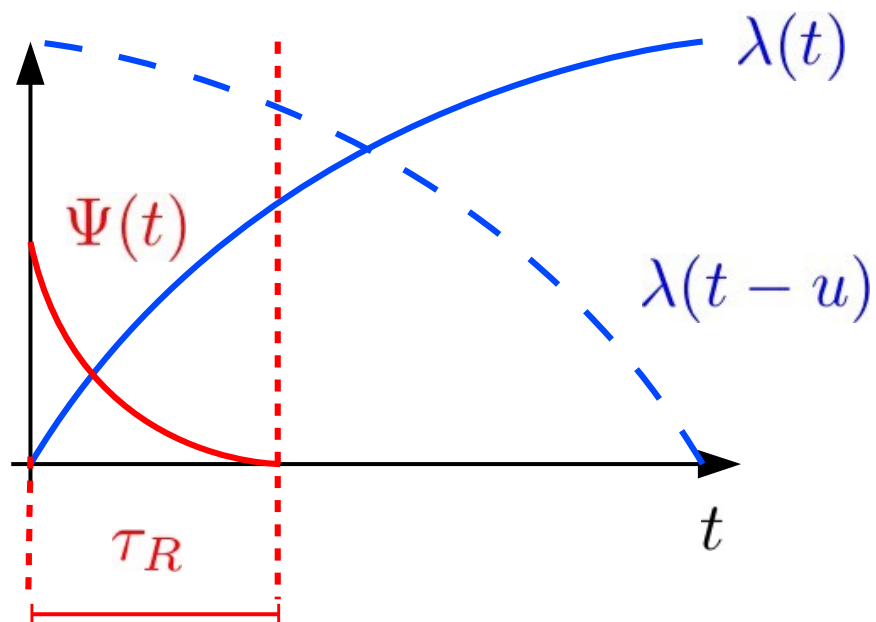
$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u) du = \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

$$\Rightarrow \overline{\partial_\lambda H}(t)_{\text{tempo-fim}} \approx \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

$$\Rightarrow W_{ex} \approx \Psi(0) \tau_R \int_0^\tau dt' \dot{\lambda}^2(t')$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



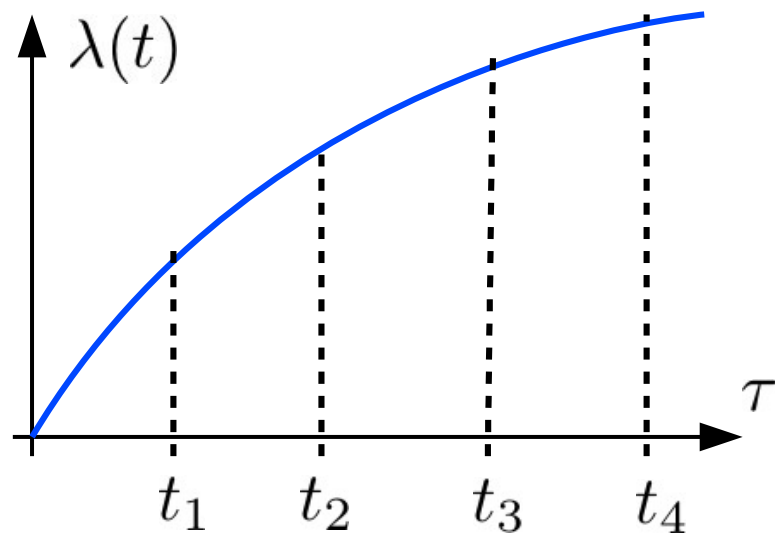
$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}(t) - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\lambda_0} &= \\ \delta \lambda \int_0^t du \Psi(u) \dot{g}(t-u) &= \\ = \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t du \Psi(u) \dot{\lambda}(t-u) \approx \dot{\lambda}(t) \int_0^\infty \Psi(u) du = \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

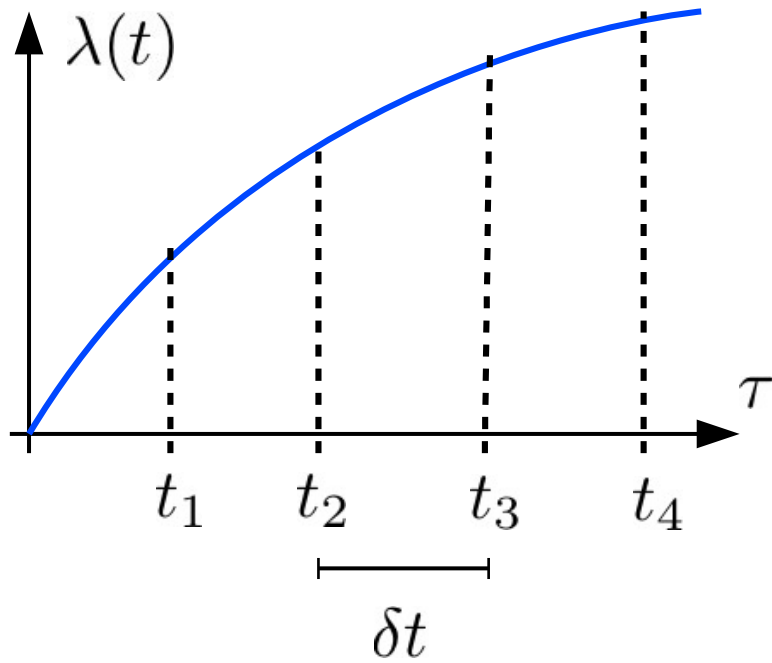
$$\Rightarrow \overline{\partial_\lambda H}(t)_{tempo-fin} \approx \dot{\lambda}(t) \Psi(0) \tau_R$$

$$\Rightarrow W_{ex} \approx \Psi(0) \tau_R \int_0^\tau dt' \dot{\lambda}^2(t'), \quad \delta \lambda / \lambda_0 \ll 1$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

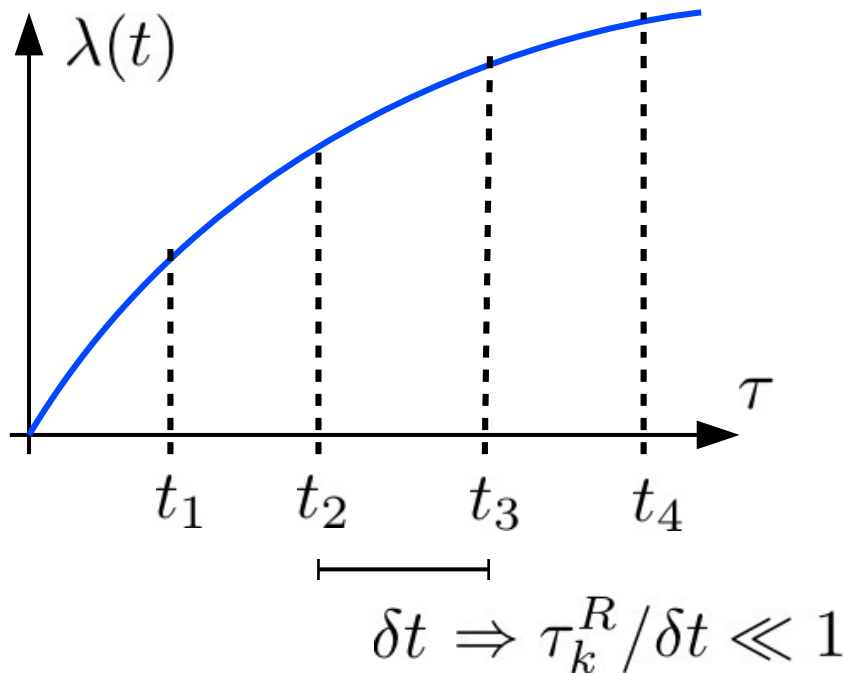


Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:**
$$W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos

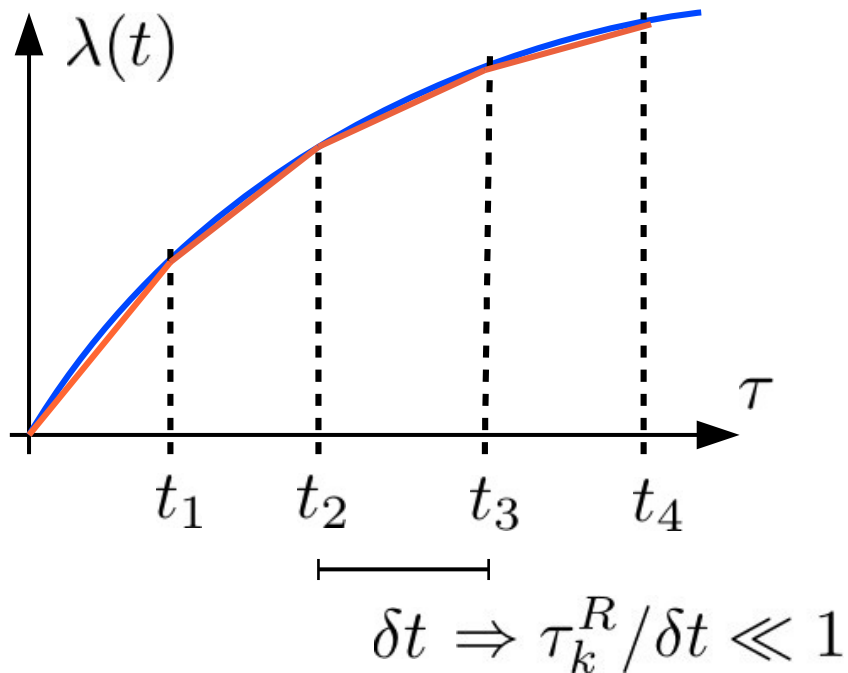


- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



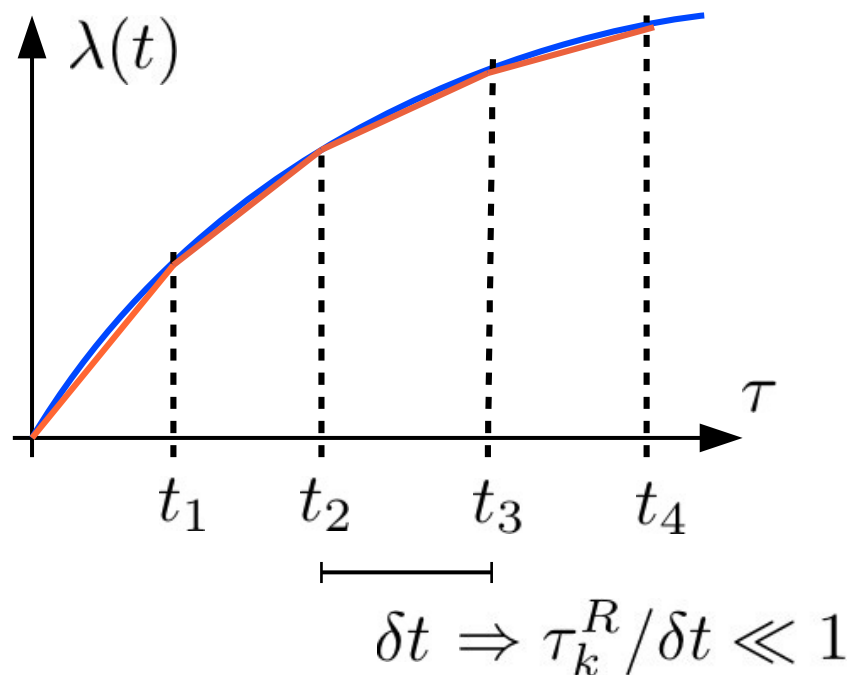
- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta W_{qs} + \delta W_{ex} = \delta F_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \dot{\lambda}(t') \left(\dot{\lambda}(t') \Psi_k(0) \tau_k^R \right)$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

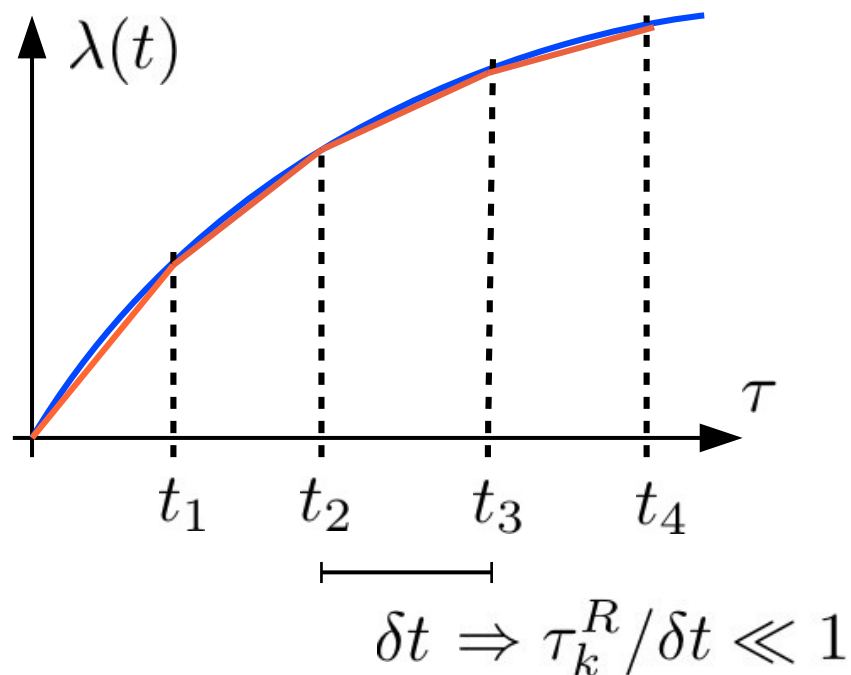
- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta W_{qs} + \delta W_{ex} = \delta F_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \dot{\lambda}(t') \left(\dot{\lambda}(t') \Psi_k(0) \tau_k^R \right)$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k)$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

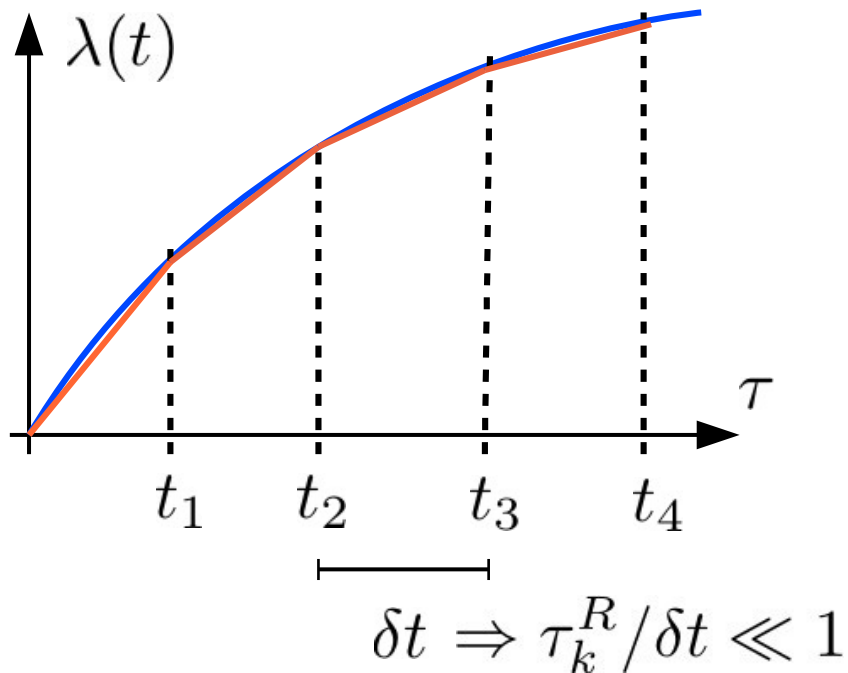
- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta W_{qs} + \delta W_{ex} = \delta F_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \dot{\lambda}(t') \left(\dot{\lambda}(t') \Psi_k(0) \tau_k^R \right)$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k) \quad ???$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

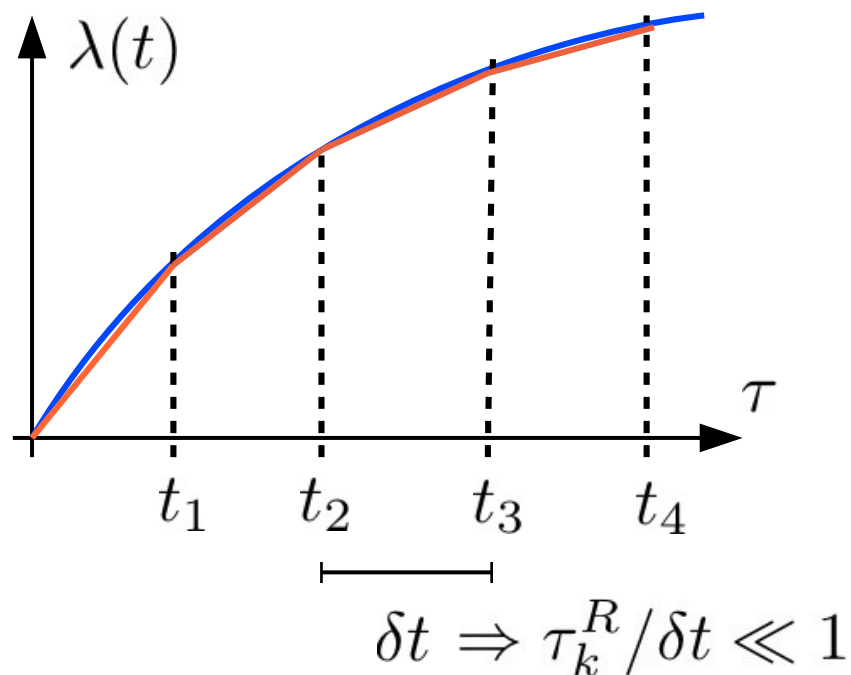
- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k)$$

- **Teorema Flutuação-Dissipação:**

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

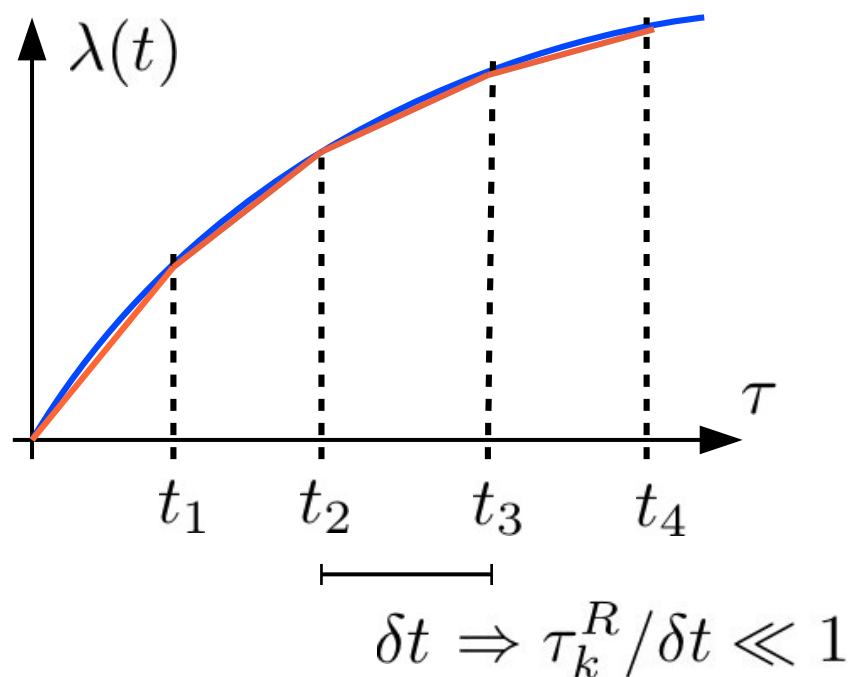
$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k)$$

- **Teorema Flutuação-Dissipação:**

$$\Psi_{\lambda}(t) \propto \langle \partial_{\lambda} H(0) \partial_{\lambda} H(t) \rangle_{\lambda} - \langle (\partial_{\lambda} H(0))^2 \rangle_{\lambda}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

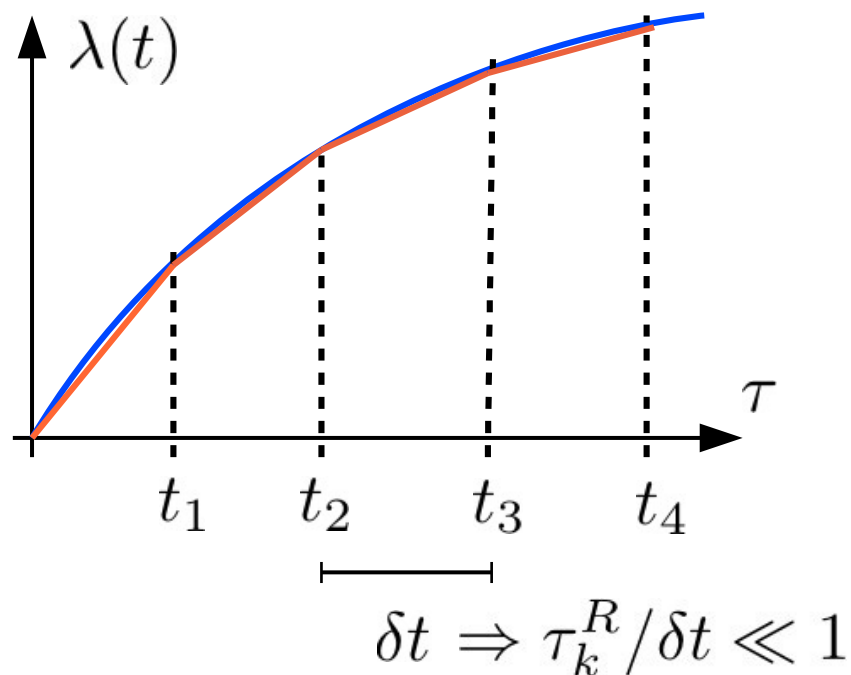
$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k)$$

- **Teorema Flutuação-Dissipação:**

$$\Rightarrow \Psi_{\lambda}(0) = \beta \text{Var}[\partial_{\lambda} H(0)] \equiv \beta \chi(\lambda), \quad \beta = (k_B T)^{-1}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

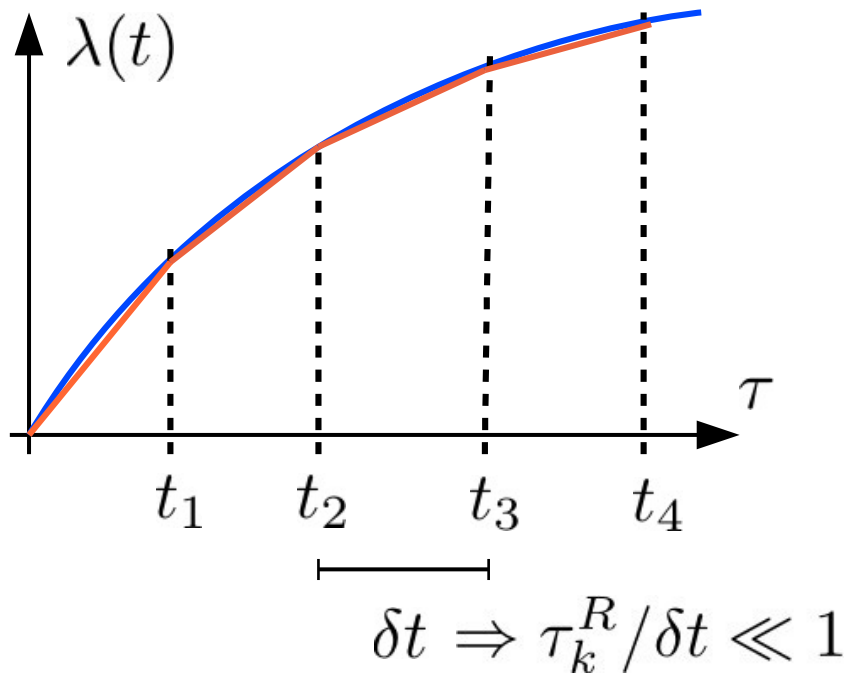
$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow \delta W_k \approx \delta F_k + \delta t \dot{\lambda}^2(t_k) \Psi_{\lambda_k}(0) \tau_R(\lambda_k)$$

- **Teorema Flutuação-Dissipação:**

$$\Rightarrow \tau_R(\lambda) = \int_0^\infty dt \frac{\Psi_\lambda(t)}{\Psi_\lambda(0)}$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



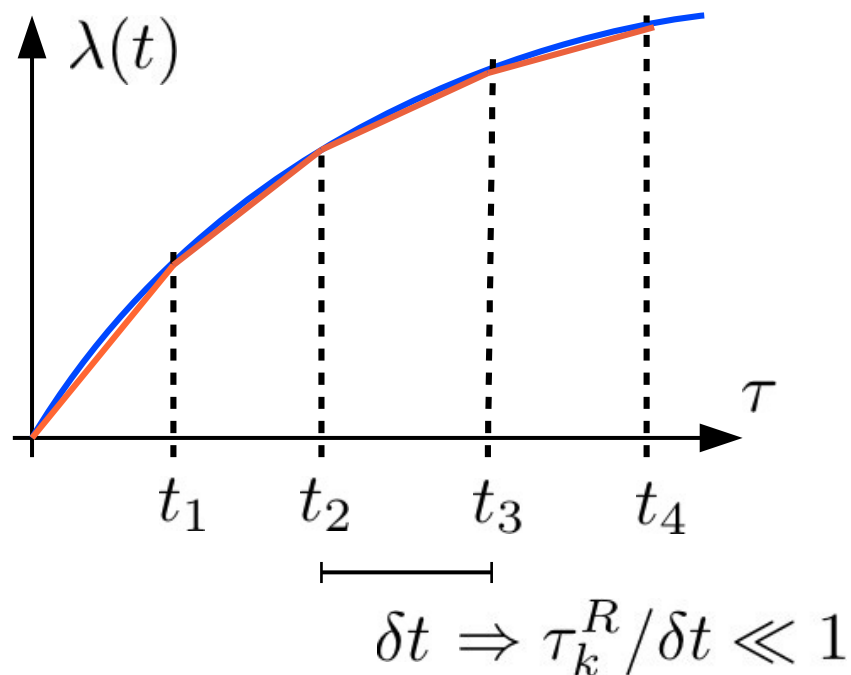
- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

$$\Rightarrow W_{ex} = \beta \delta t \sum_{k=1}^N \dot{\lambda}^2(t_k) \tau_R[\lambda(t_k)] \chi[\lambda(t_k)]$$

Regimes próximos do equilíbrio: processos lentos



- **Trabalho:** $W = \sum_{k=1}^n \delta W_k$

- **Processo:**

$$\frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k} \ll 1$$

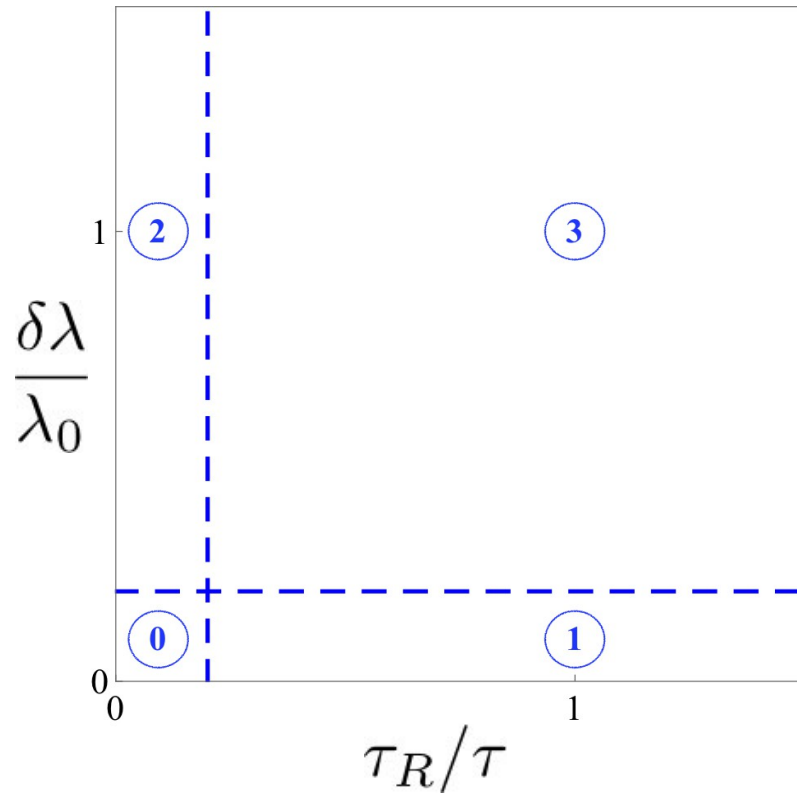
$$\Rightarrow W_{ex} = \beta \delta t \sum_{k=1}^N \dot{\lambda}^2(t_k) \tau_R[\lambda(t_k)] \chi[\lambda(t_k)]$$

$$\Rightarrow W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)], \quad \delta t \rightarrow 0$$

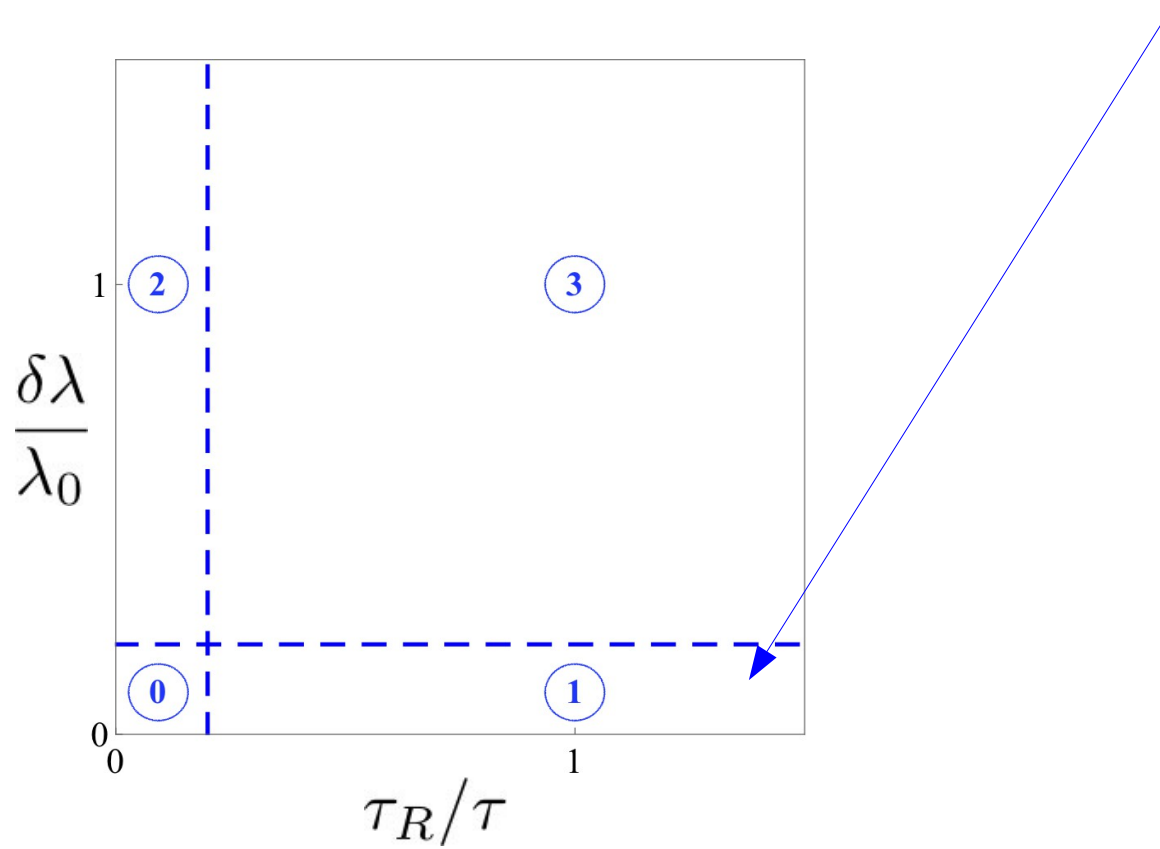
Regimes próximos do equilíbrio

Processos rápidos mas fracos

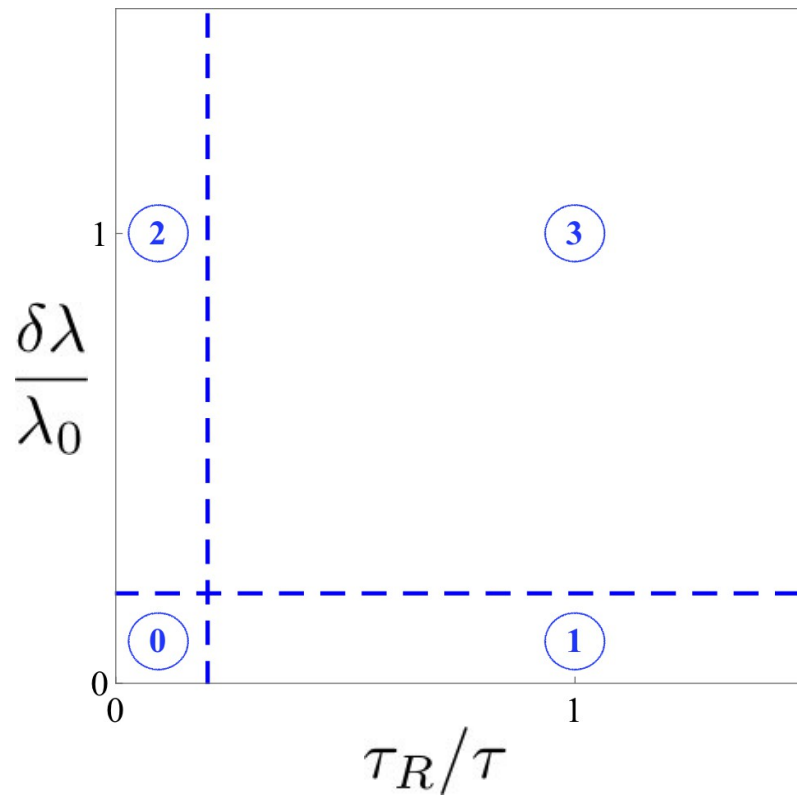
Regimes próximos do equilíbrio: processos rápidos mas fracos



Regimes próximos do equilíbrio: processos rápidos mas fracos



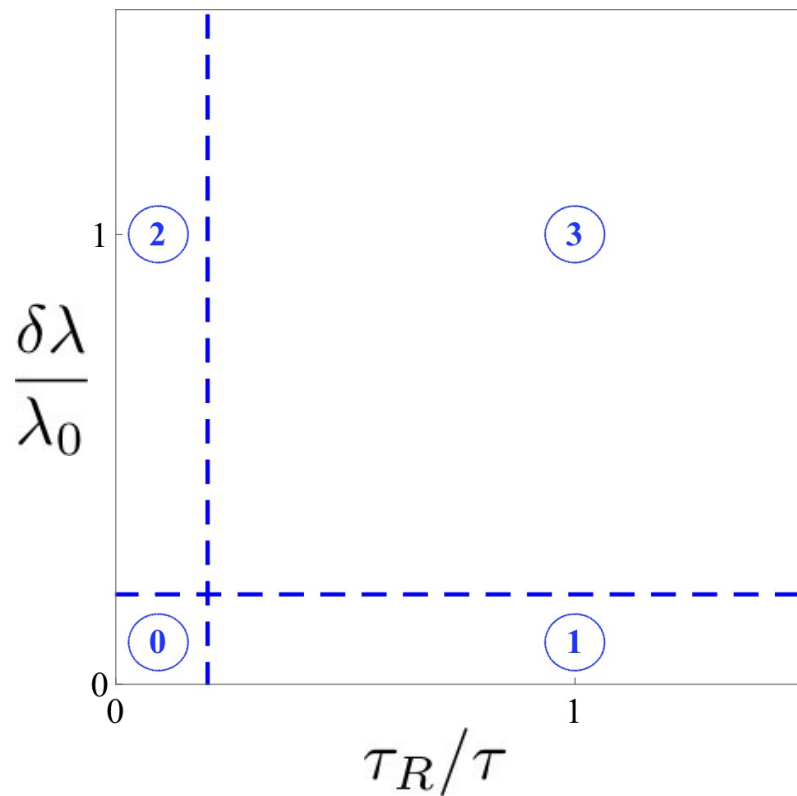
Regimes próximos do equilíbrio: processos rápidos mas fracos



- **Funcional:**

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

Regimes próximos do equilíbrio: *processos rápidos mas fracos*

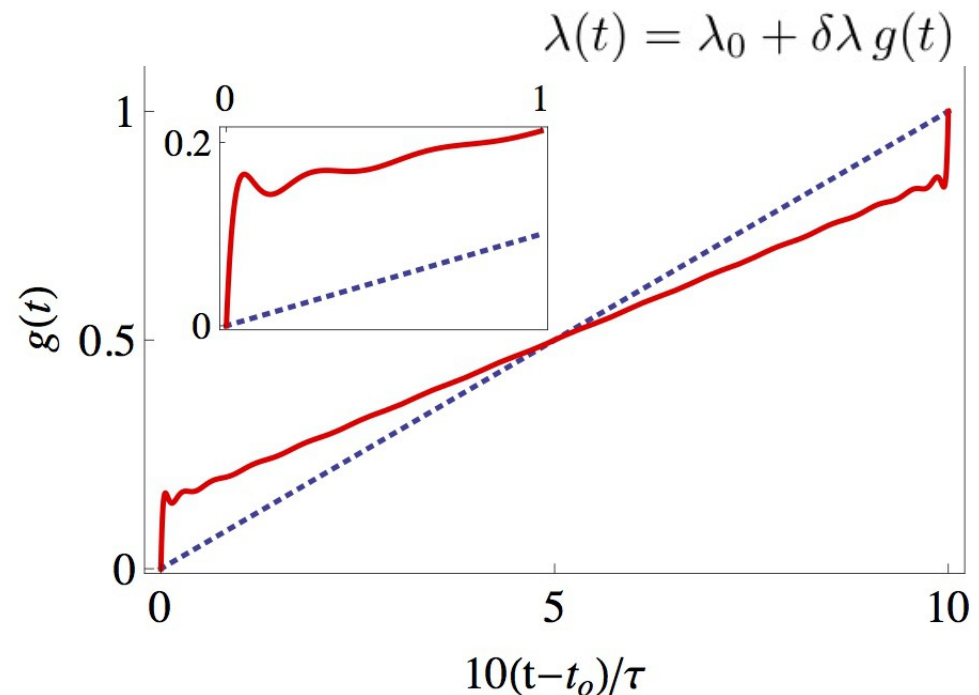


- Funcional:**

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

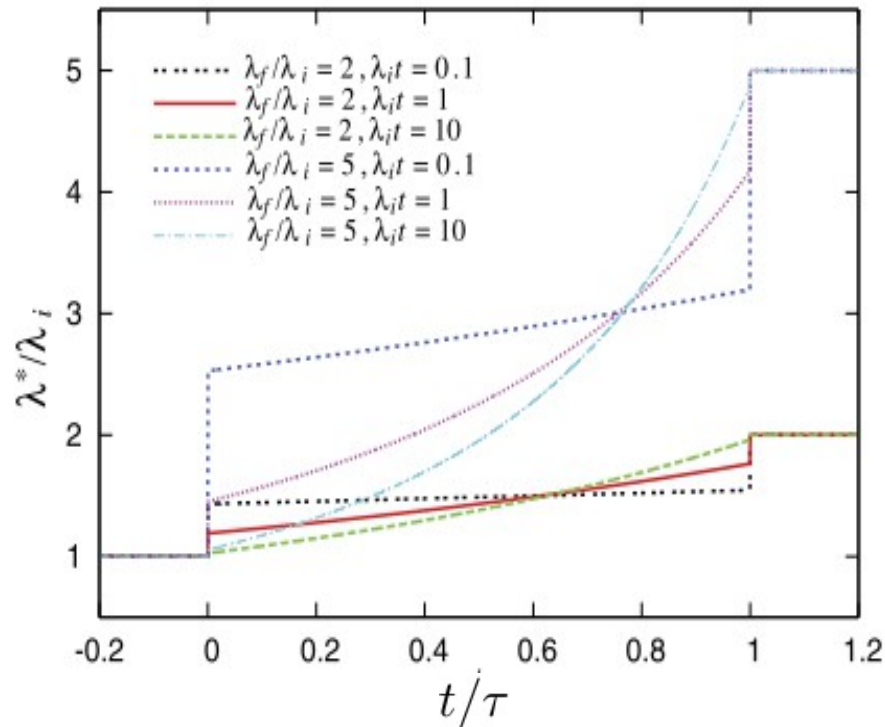
- Mov. Browniano super-amortecido**

$$H[\lambda(t)] = \frac{p^2}{2m} + \lambda(t) \frac{q^2}{2}$$



Regimes próximos do equilíbrio: processos rápidos mas fracos

Exato



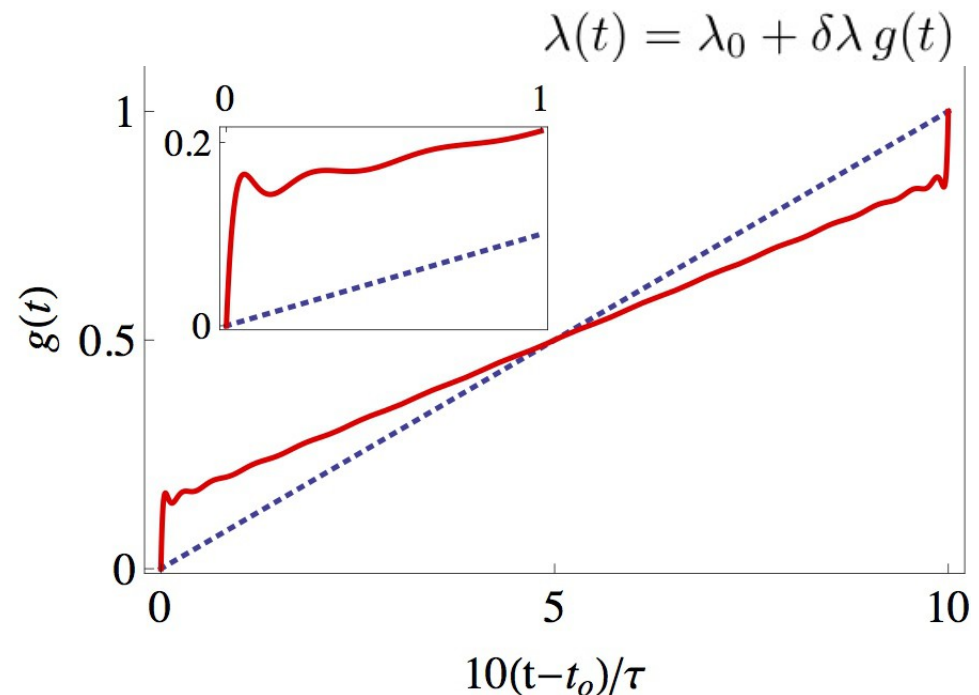
• Funcional:

$$W_{ex} =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t-t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

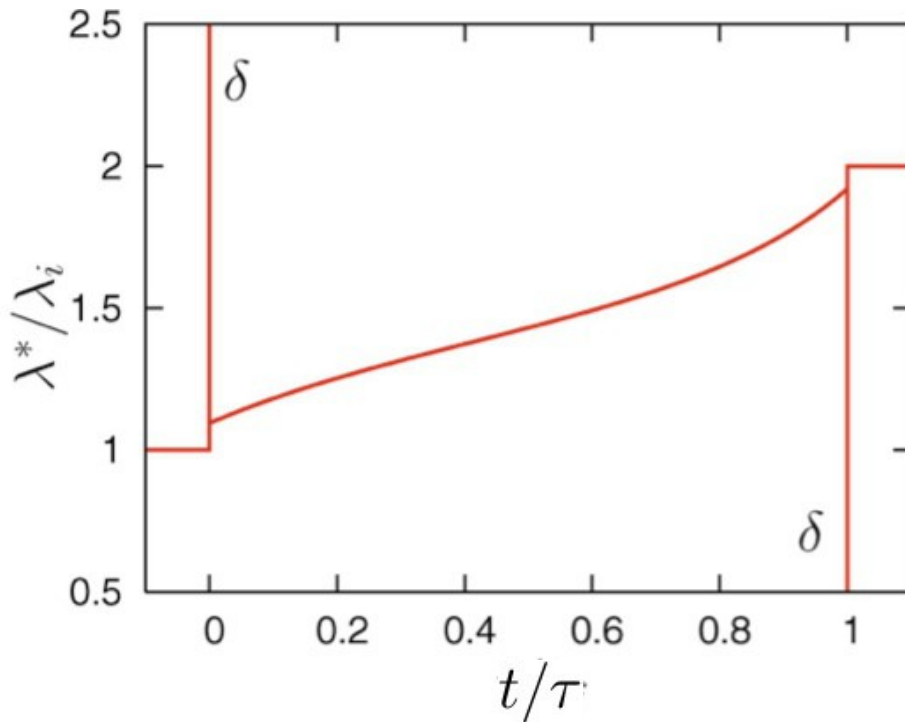
• Mov. Browniano super-amortecido

$$H[\lambda(t)] = \frac{p^2}{2m} + \lambda(t) \frac{q^2}{2}$$



Regimes próximos do equilíbrio: processos rápidos mas fracos

Exato



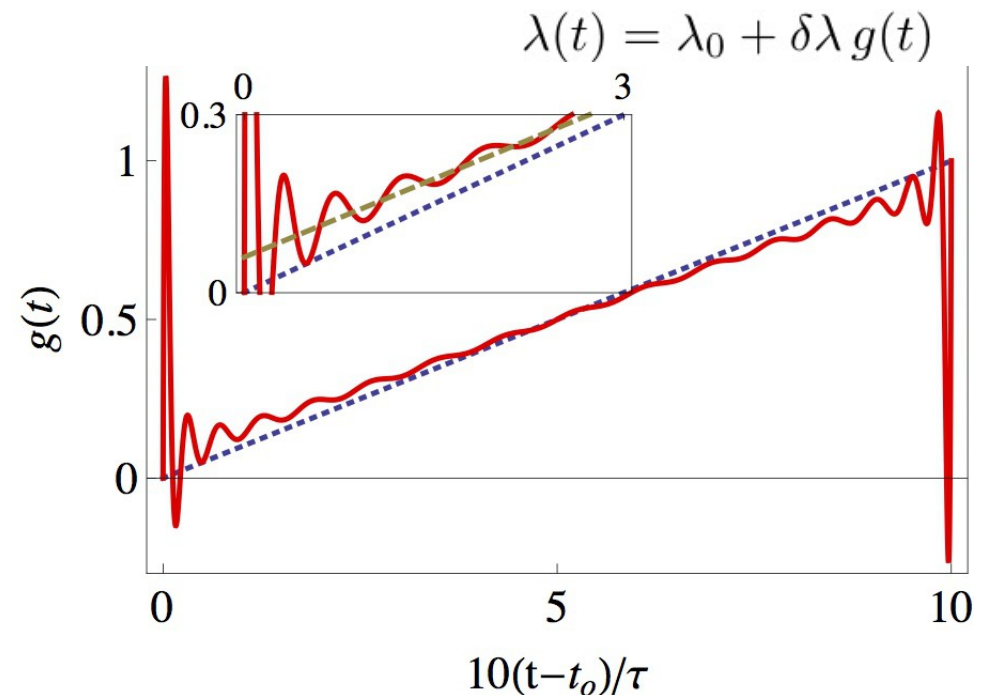
• **Funcional:**

$$W_{ex} =$$

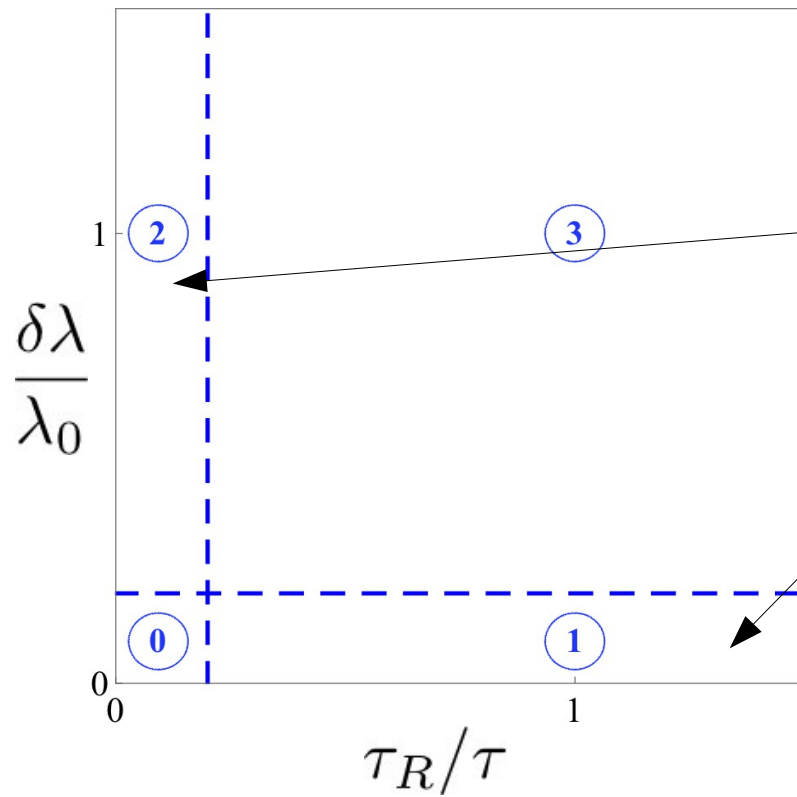
$$\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

• **Mov. Browniano sub-amortecido**

$$H[\lambda(t)] = \frac{p^2}{2m} + \lambda(t) \frac{q^2}{2}$$



Regimes próximos do equilíbrio

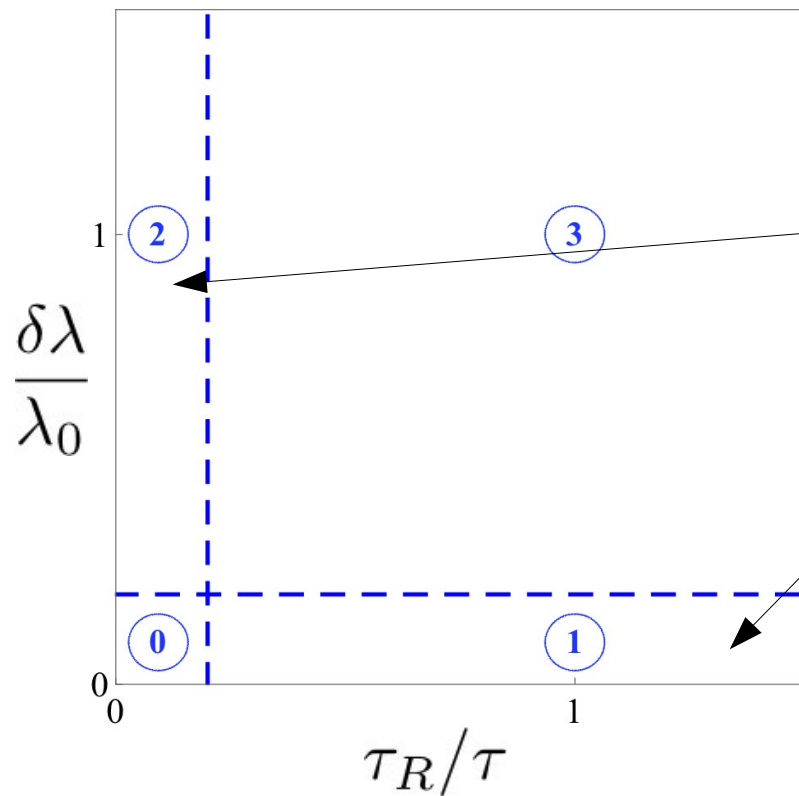


- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

Regimes próximos do equilíbrio



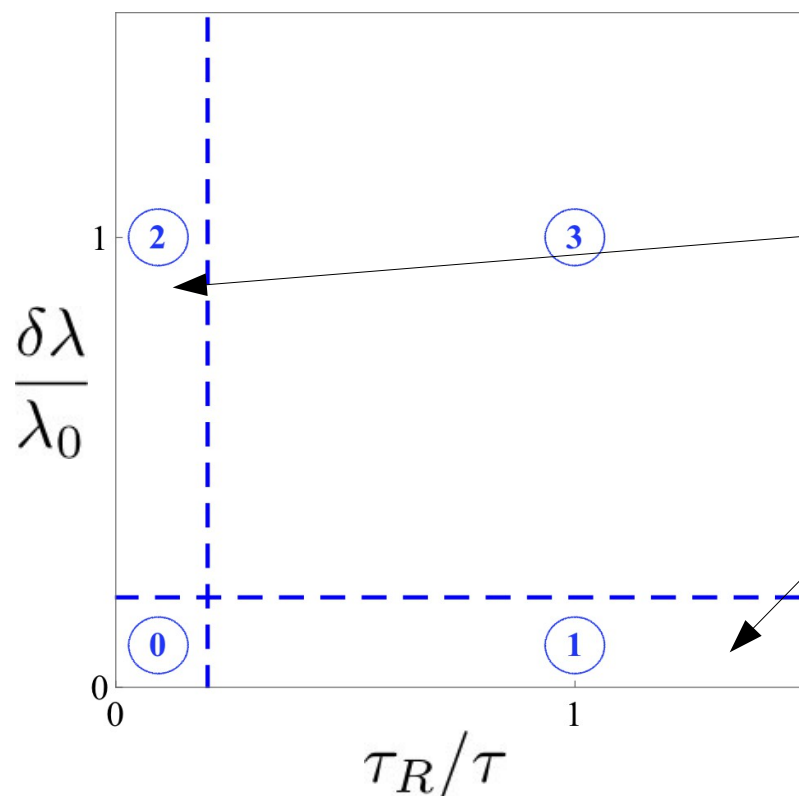
- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **A função $\Psi_\lambda(t)$ condensa toda a informação relevante sobre o sistema de interesse.**

Regimes próximos do equilíbrio



- **Custo energético:**

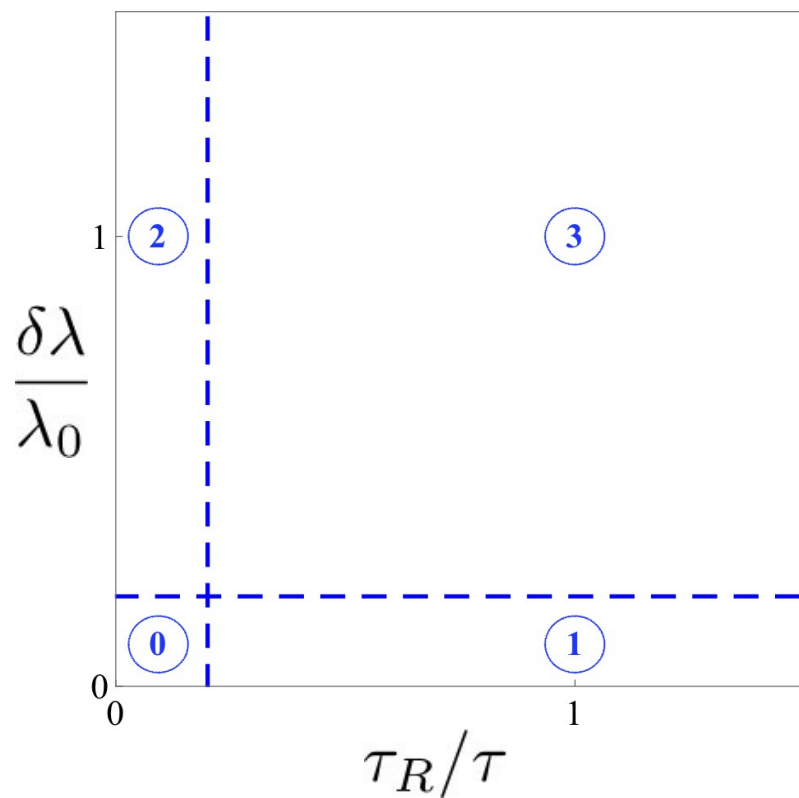
$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **A função $\Psi_\lambda(t)$ condensa toda a informação relevante sobre o sistema de interesse.**
- **Fenomenologia consistente com vínculos Hamiltonianos**

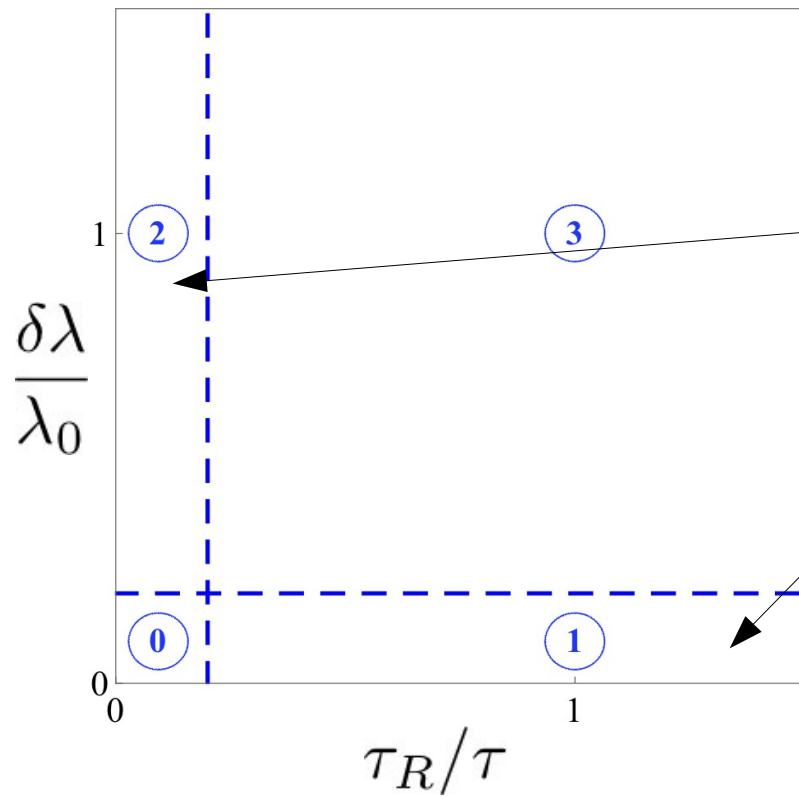
Sumário sobre a física dos processos ótimos

O que sabemos sobre os processos ótimos



- Regimes próximos do equilíbrio:

O que sabemos sobre os processos ótimos

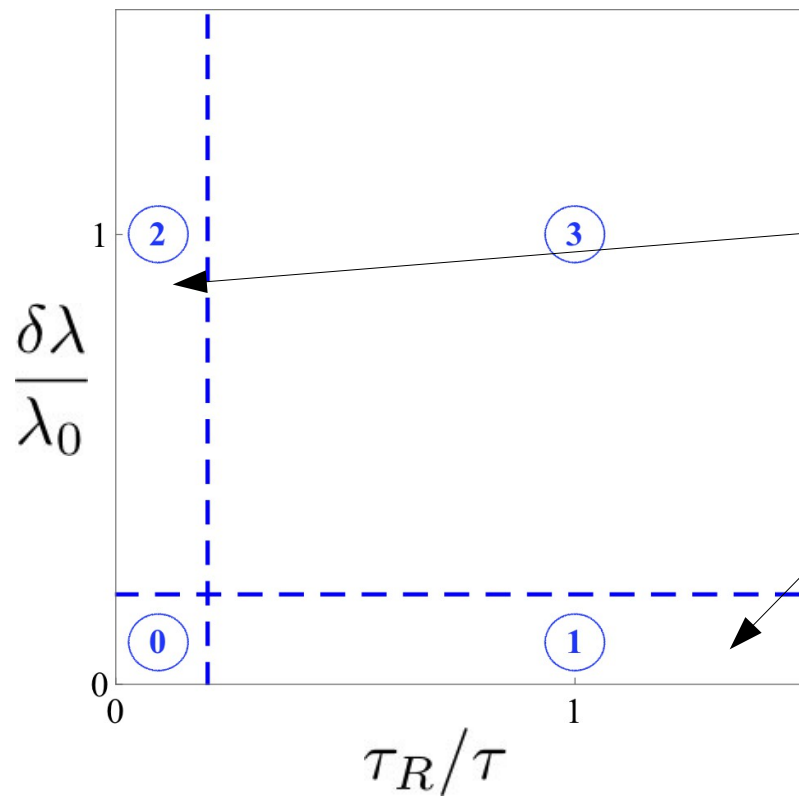


- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

O que sabemos sobre os processos ótimos



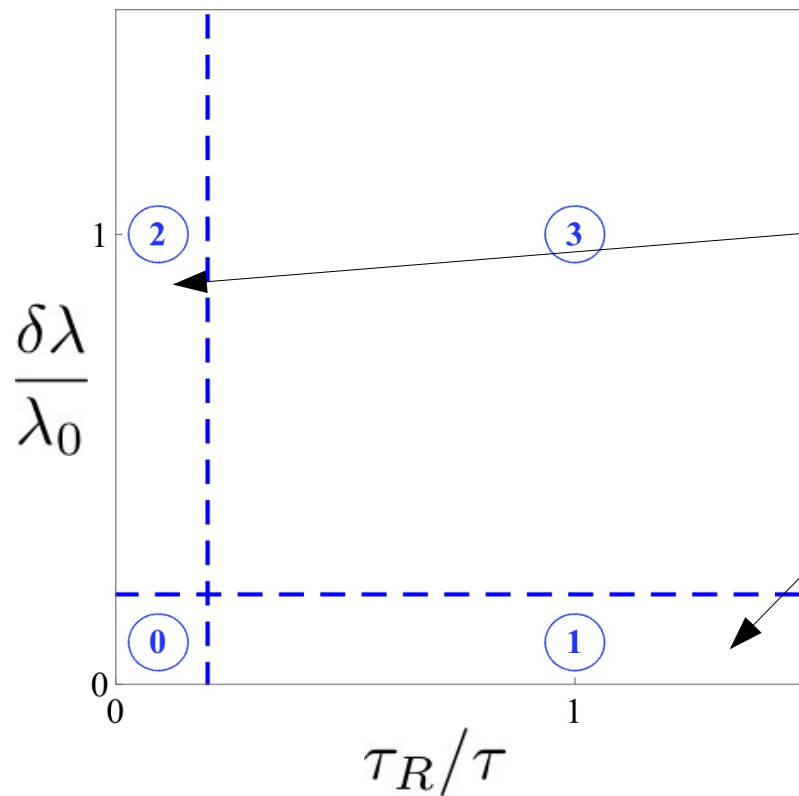
- Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- Região 2:** $W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$ $W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$

O que sabemos sobre os processos ótimos



- Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

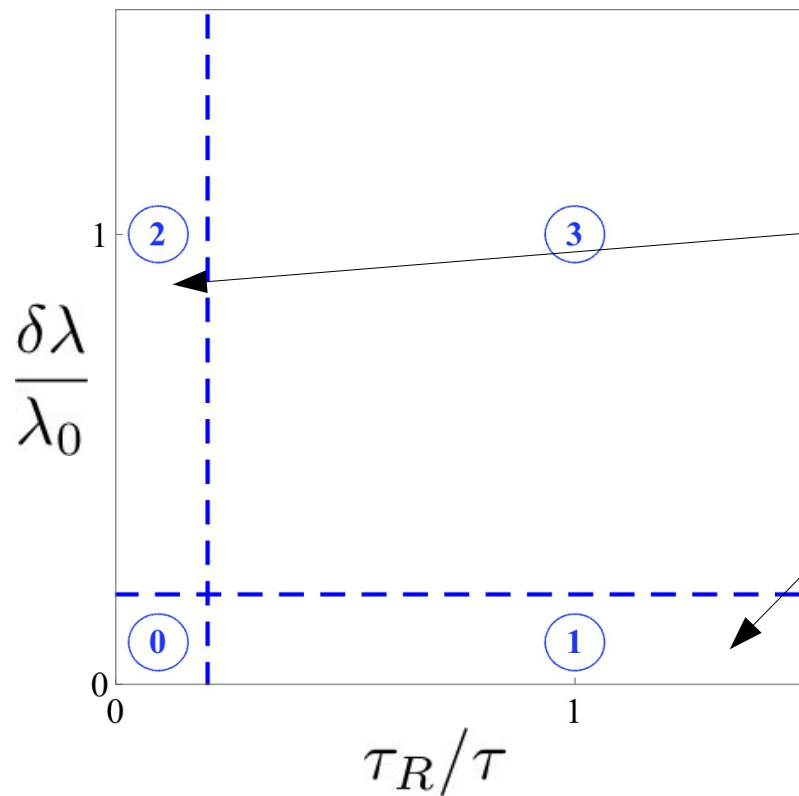
$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- Região 2:**

$$W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$$

$$W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$$

O que sabemos sobre os processos ótimos



• Custo energético:

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

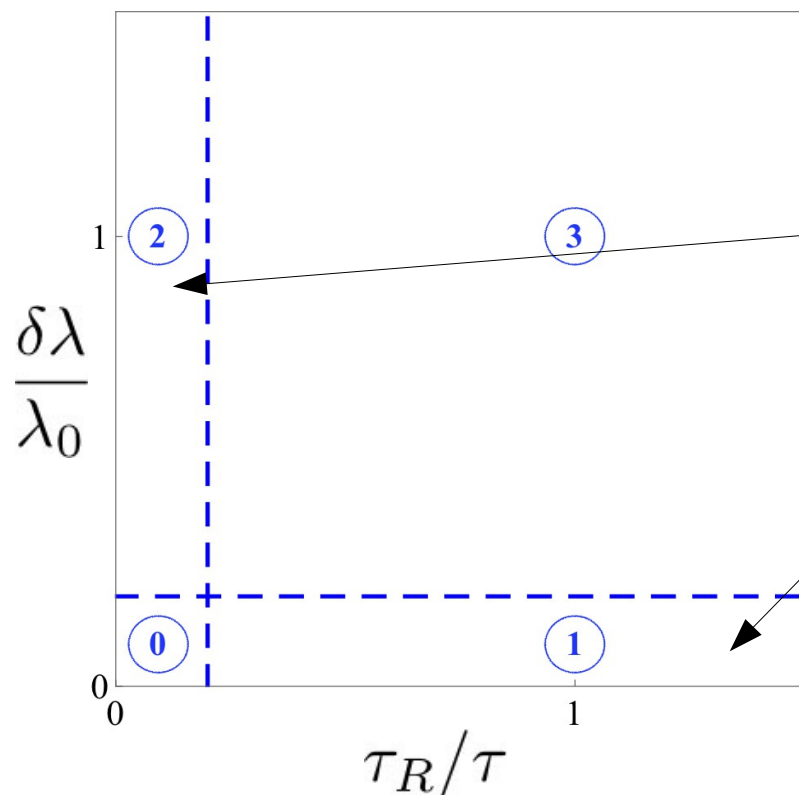
$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

???

• **Região 2:** $W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$

$W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$

O que sabemos sobre os processos ótimos



- Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

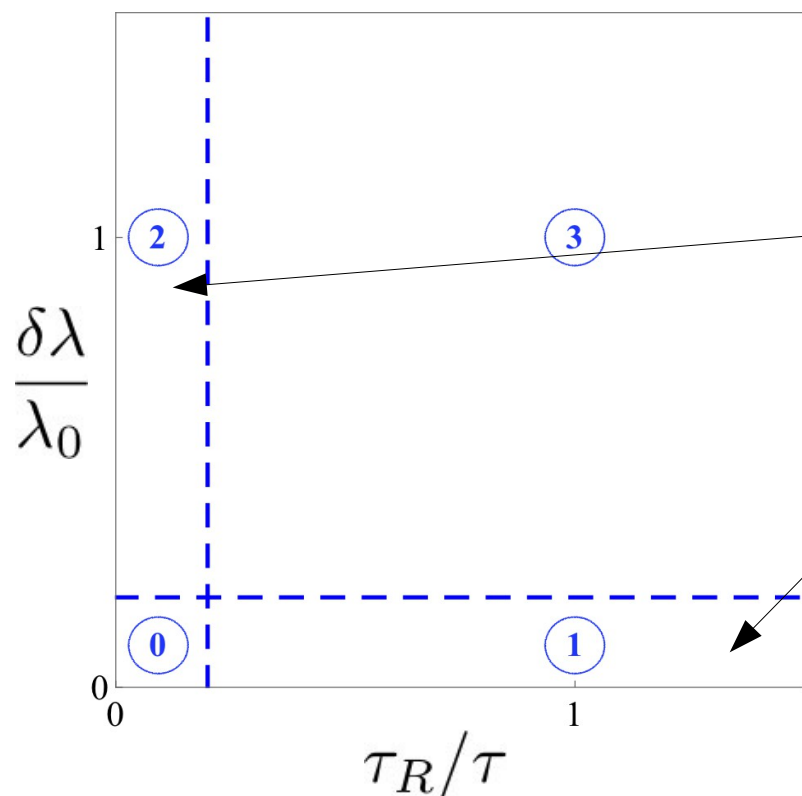
- Região 2:** $W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$

$$W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$$

Outro funcional
Teoria de Perturbação Adiabática

A Soriani, M. V. S. Bonanca, E. Miranda e
S. Deffner, em preparação

O que sabemos sobre os processos ótimos



- Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t-t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- Região 2:** $W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$

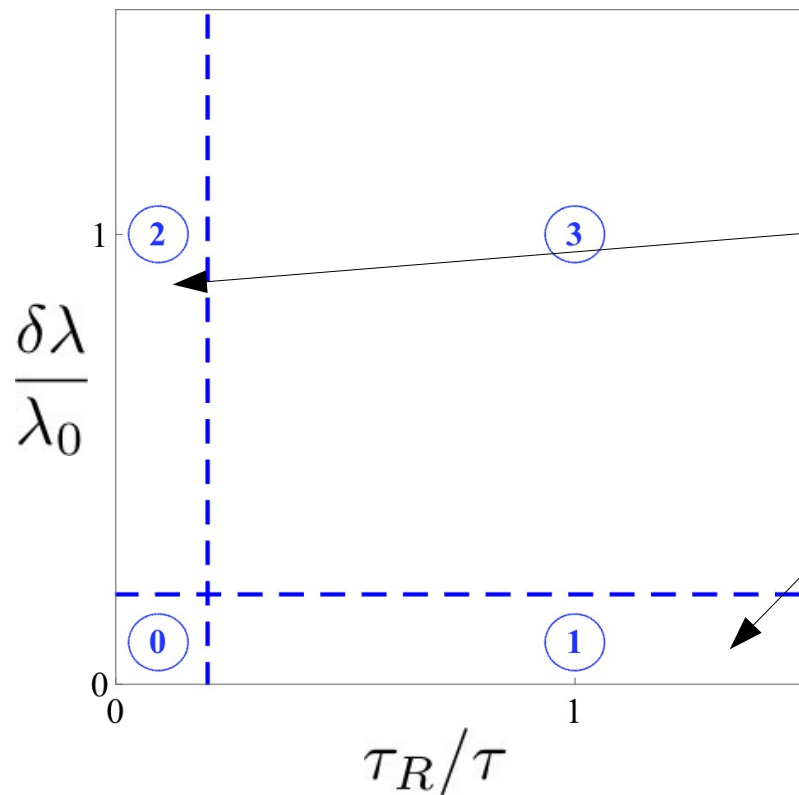
$$W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$$

**Derivadas nulas nos extremos
=> Processos quase ótimos!**

Outro funcional
Teoria de Perturbação Adiabática

A Soriani, M. V. S. Bonanca, E. Miranda e
S. Deffner, em preparação

O que sabemos sobre os processos ótimos



- Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

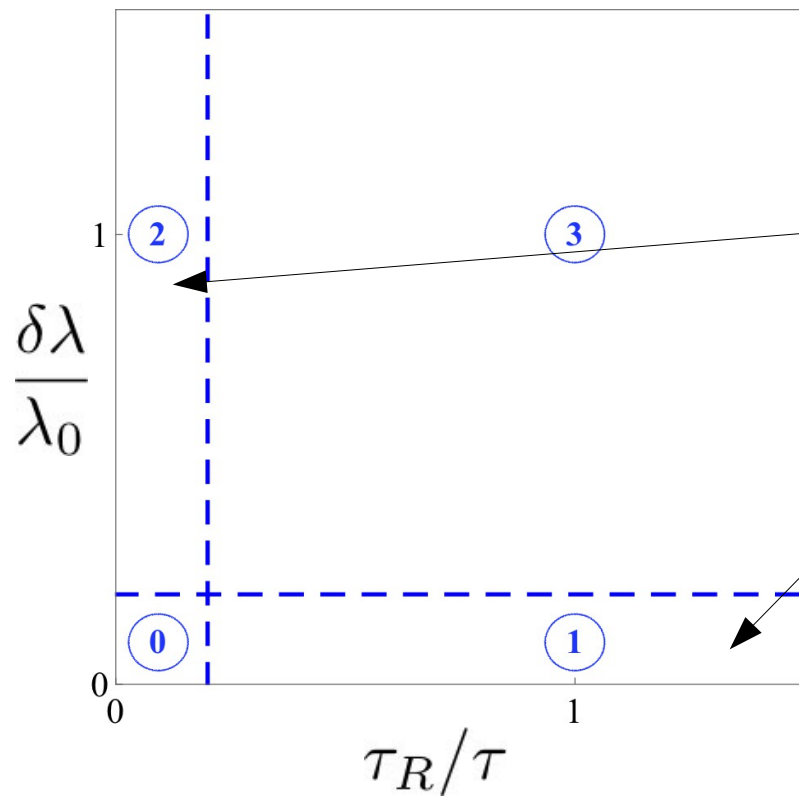
- Região 2:**

$$W_{ex}|_{isot} \sim \tau^{-1}$$

$$W_{ex}|_{term.iso} \sim \tau^{-2}$$

Exemplos: movimento Browniano, modelo de Ising 2D clássico

O que sabemos sobre os processos ótimos



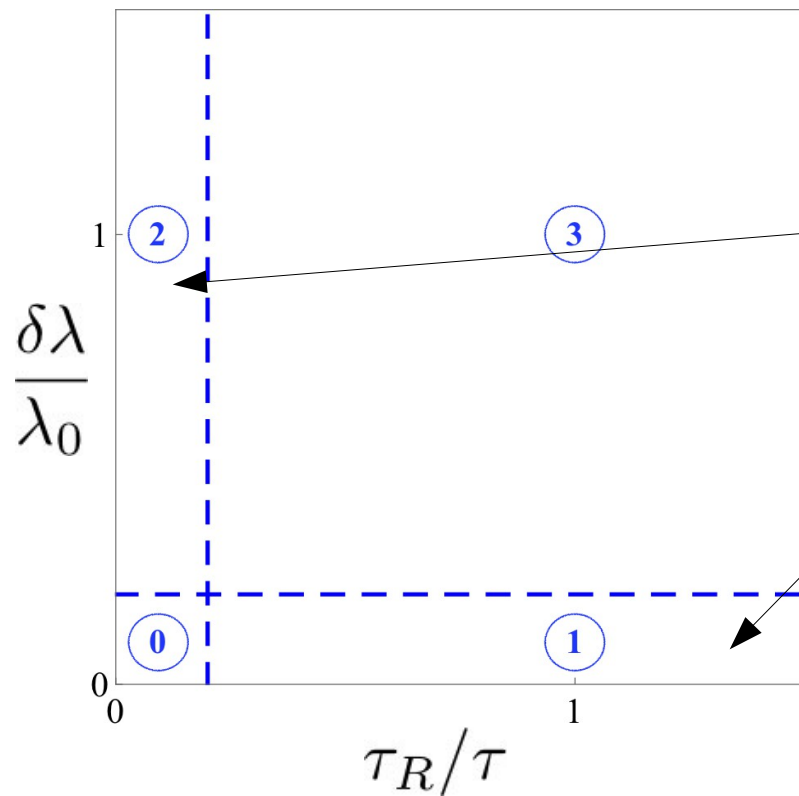
- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal**

O que sabemos sobre os processos ótimos



- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

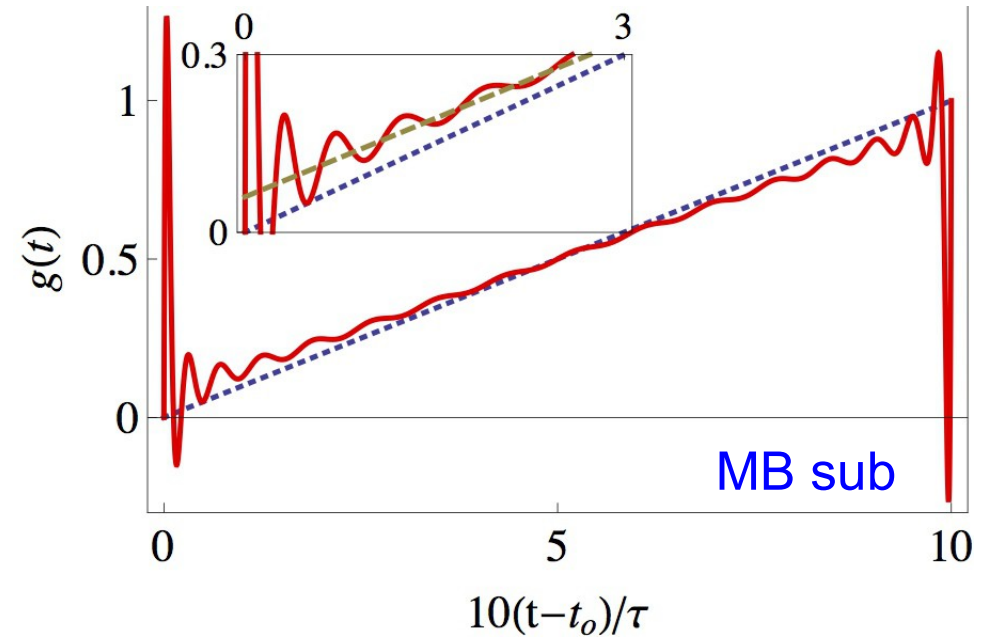
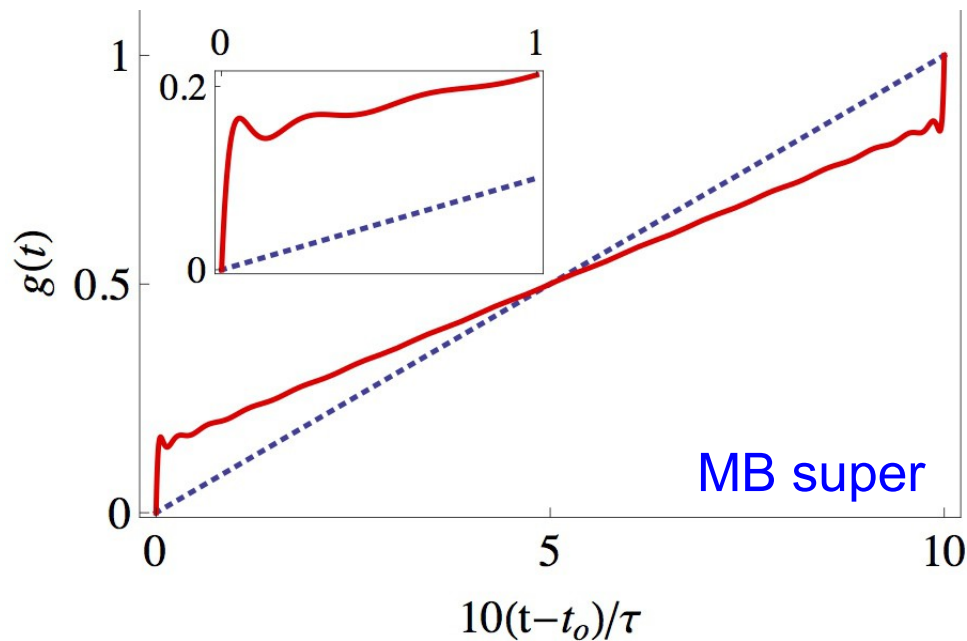
$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal**

$$\Psi_\lambda(t) = \Psi_\lambda(-t) \Rightarrow \lambda^*(t) = \lambda^*(\tau - t)$$

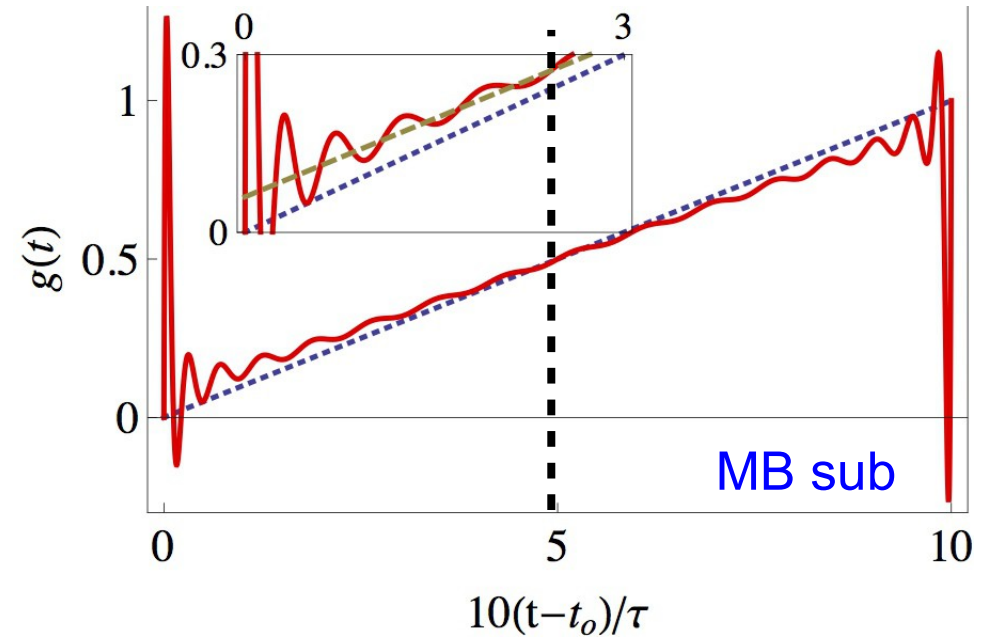
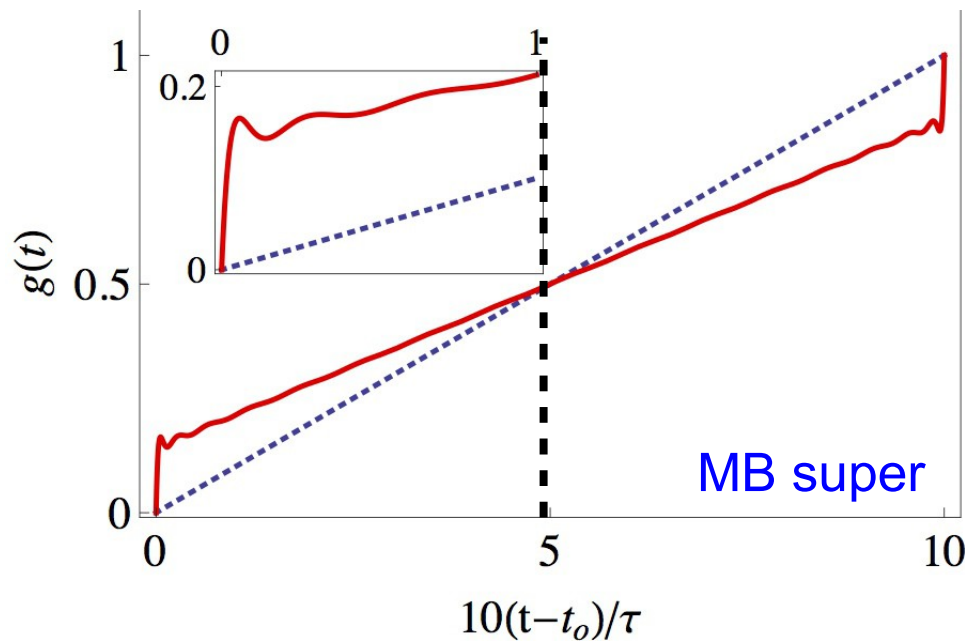
O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal**



O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal

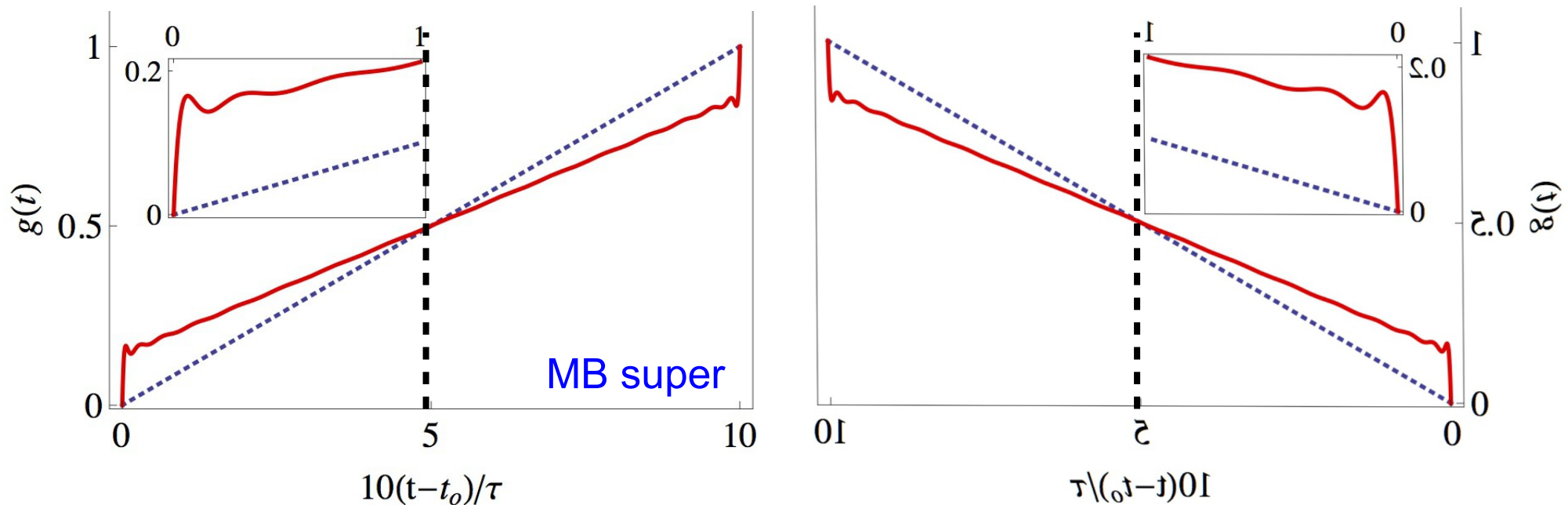


$$\lambda^*(t) = \lambda^*(\tau - t) \Rightarrow g^*(t) = 1 - g^*(\tau - t)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$$

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal**

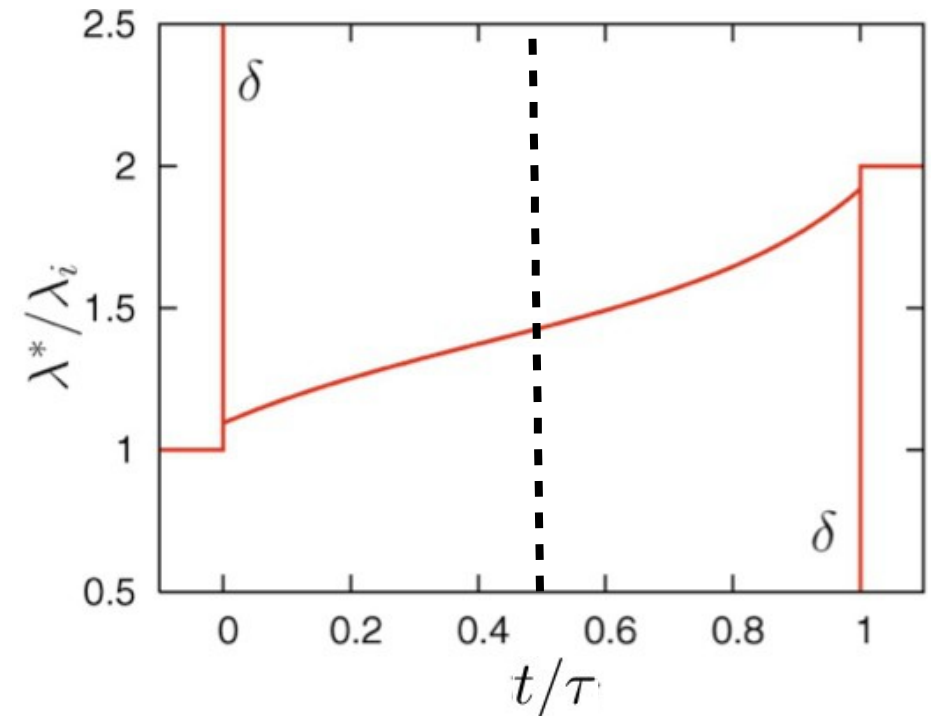
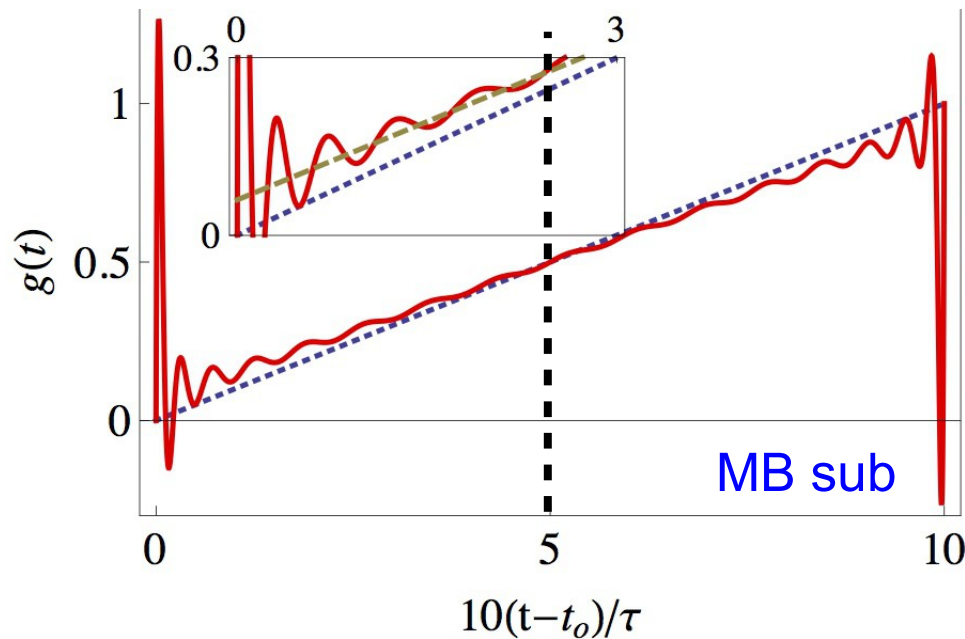


$$\lambda^*(t) = \lambda^*(\tau - t) \Rightarrow g^*(t) = 1 - g^*(\tau - t)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta\lambda g(t)$$

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal

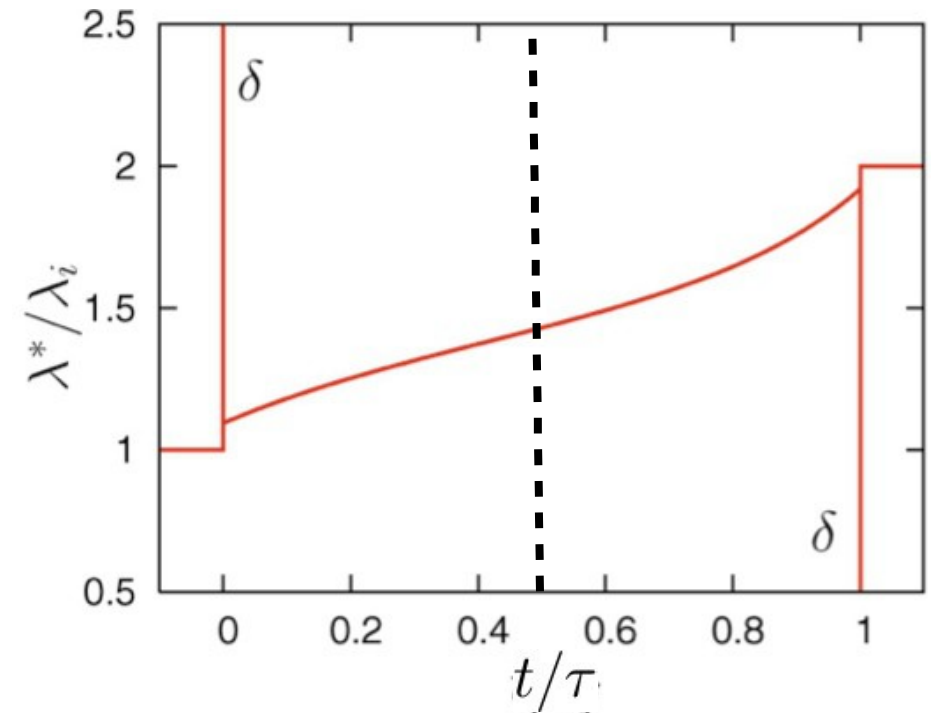
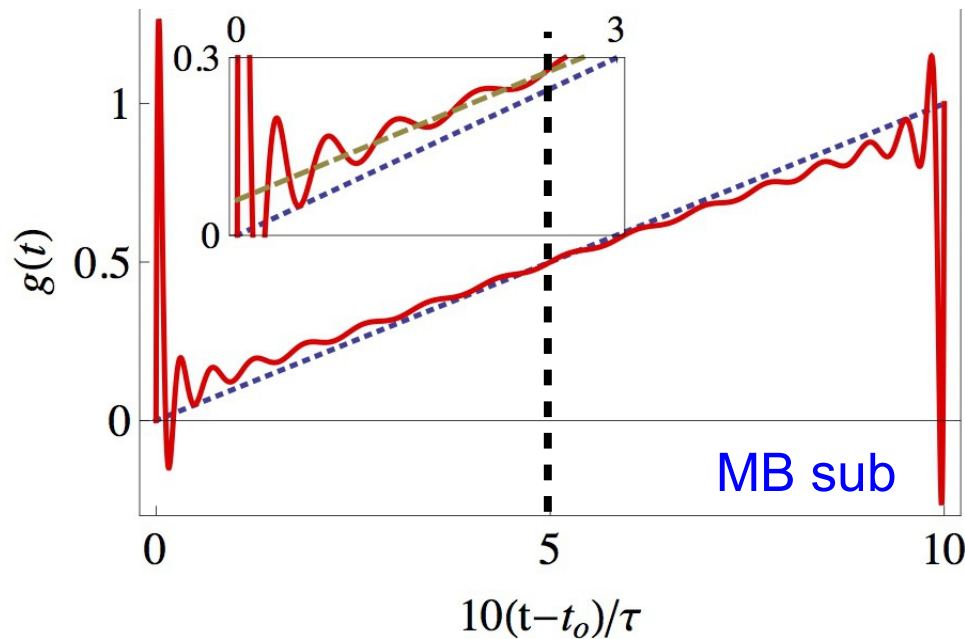


$$\lambda^*(t) = \lambda^*(\tau - t) \Rightarrow g^*(t) = 1 - g^*(\tau - t)$$

Simetria presente também arbitrariamente fora do equilíbrio

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos e simetria por reversão temporal



$$\lambda^*(t) = \lambda^*(\tau - t) \Rightarrow g^*(t) = 1 - g^*(\tau - t)$$

Simetria presente também arbitrariamente fora do equilíbrio

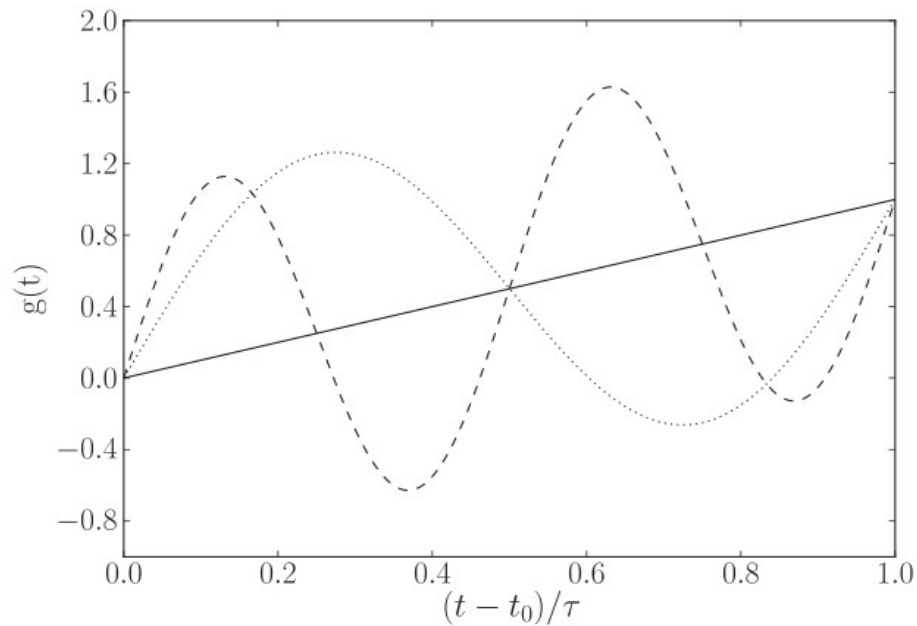
=> Vantagem da abordagem perturbativa!

O que sabemos sobre os processos ótimos

- **Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são montônicos**

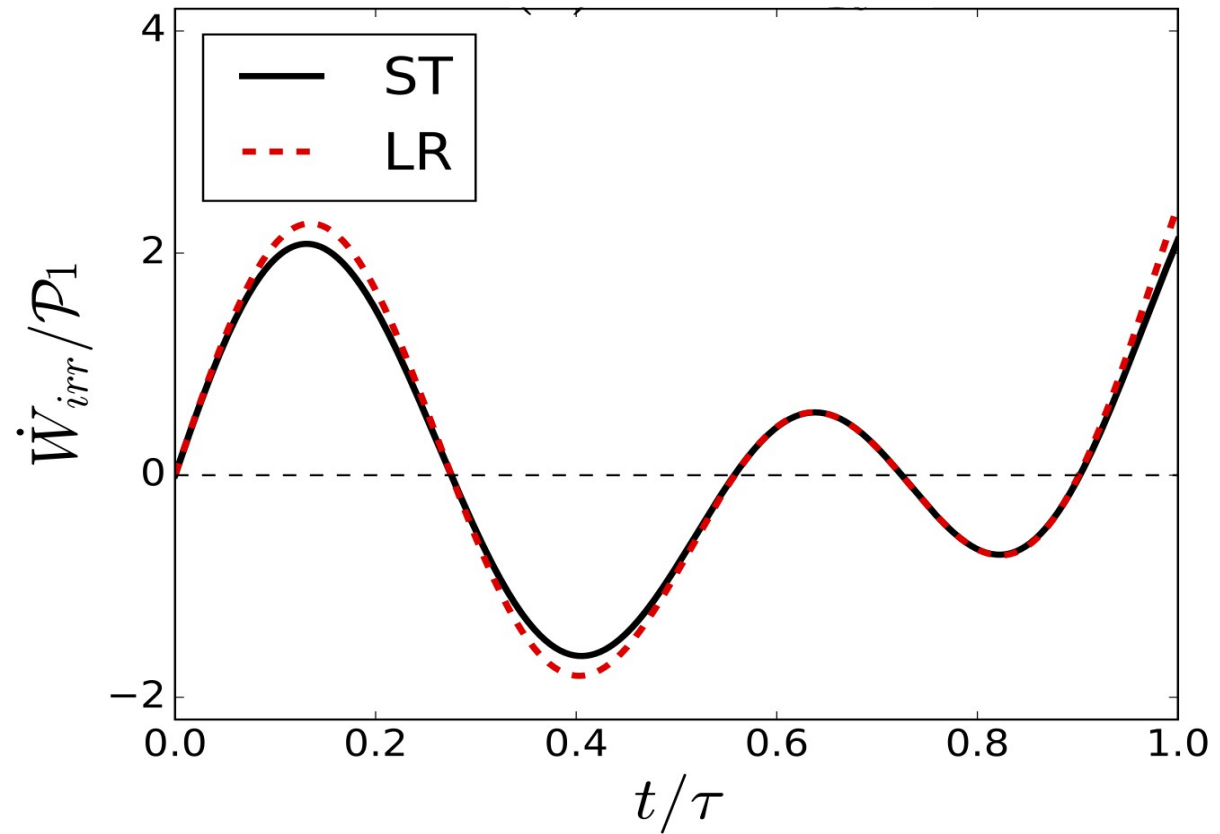
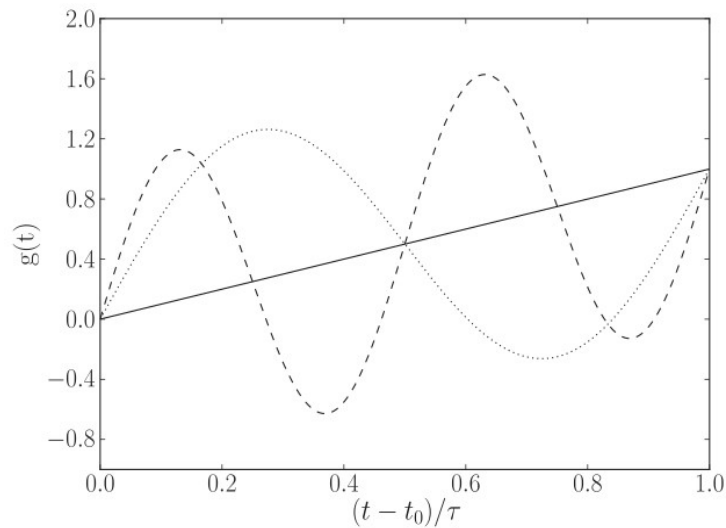
O que sabemos sobre os processos ótimos

- **Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são monotônicos**



O que sabemos sobre os processos ótimos

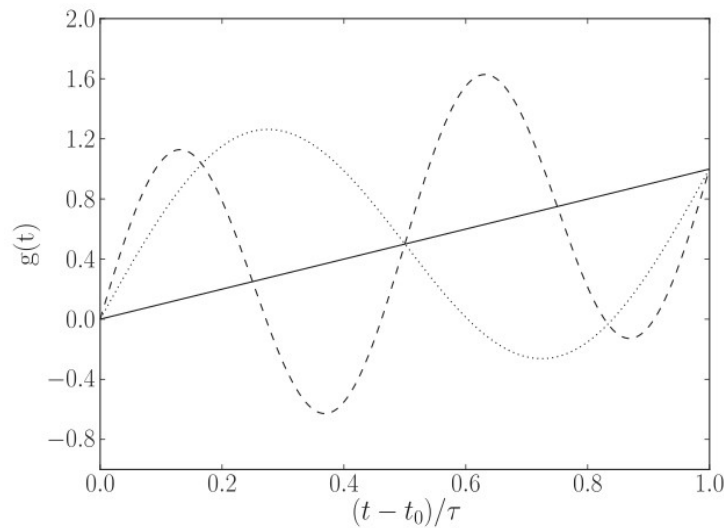
- Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são monotônicos



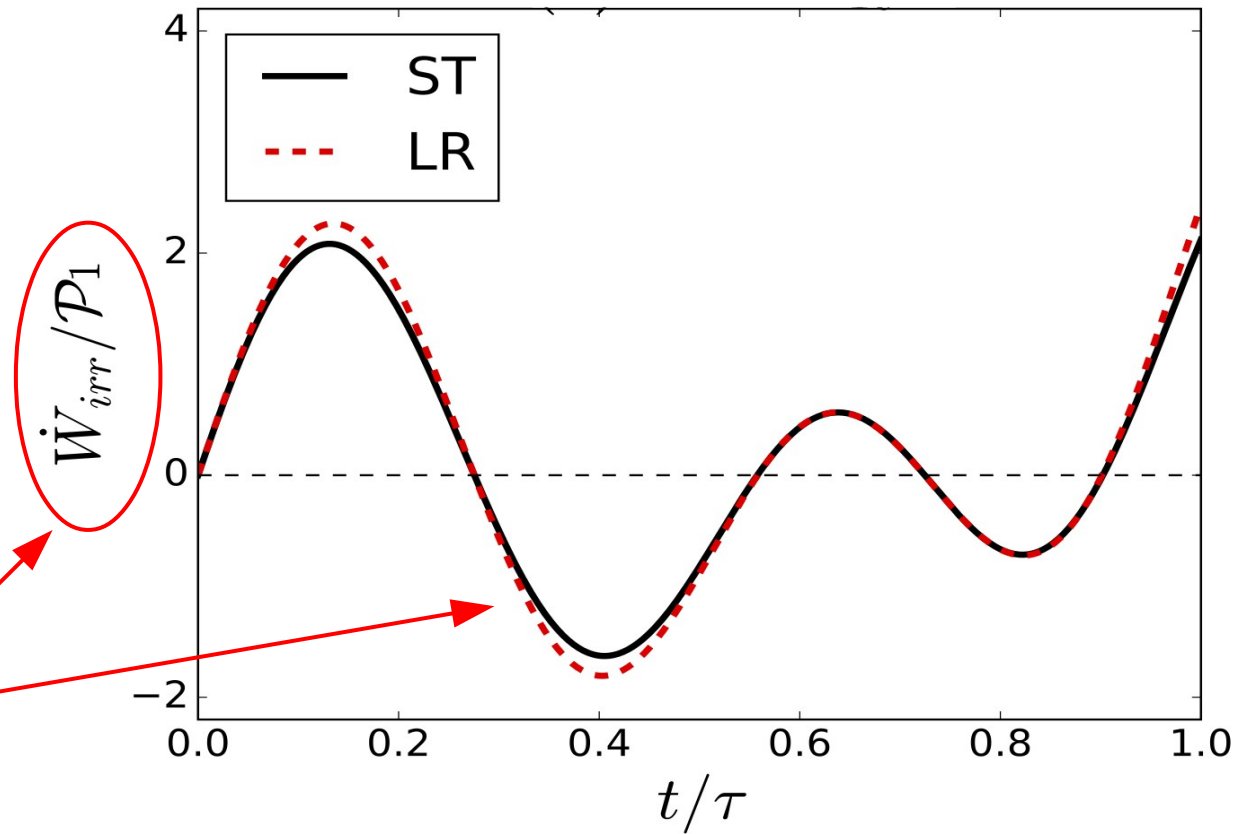
MB sub

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são monotônicos



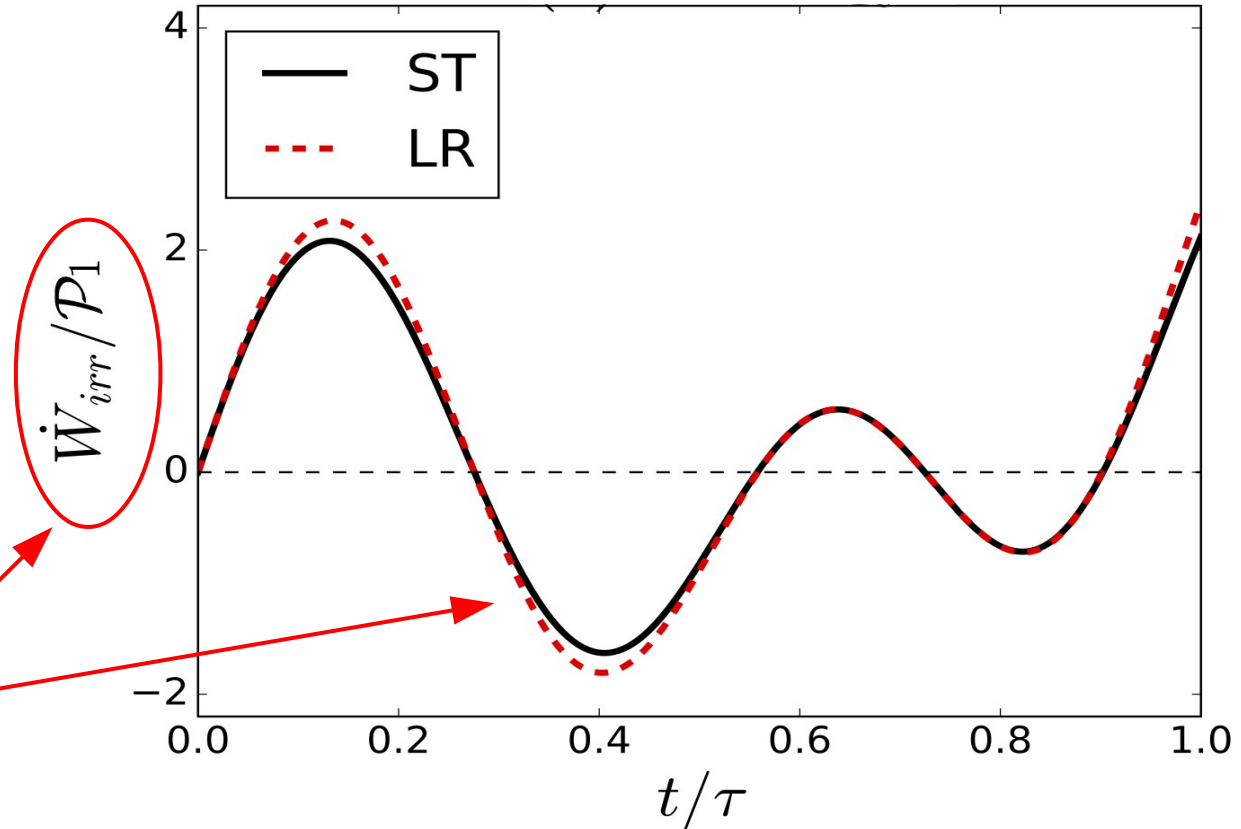
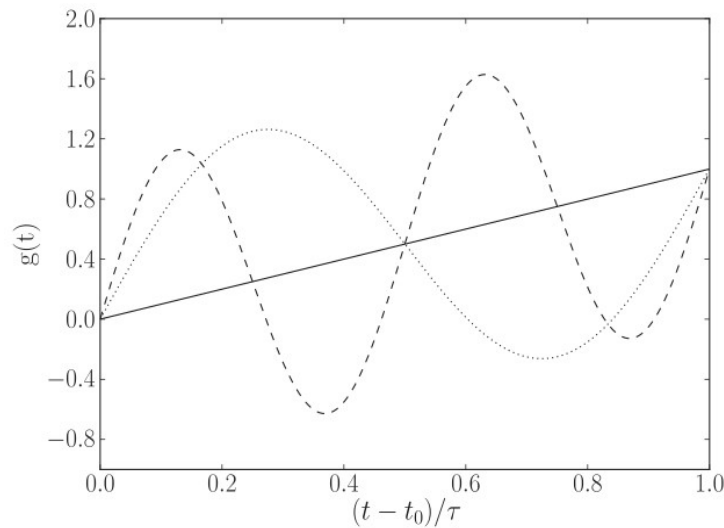
Potência negativa!



MB sub

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são monotônicos



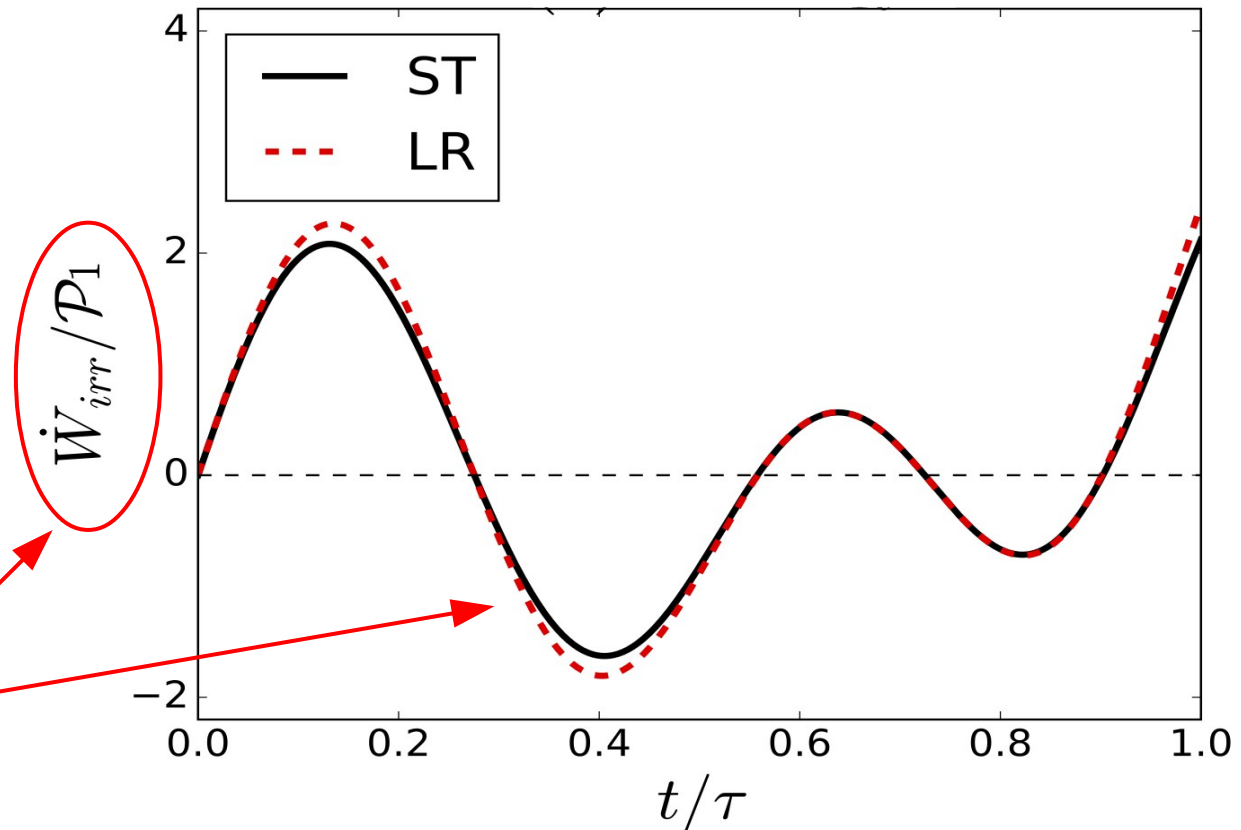
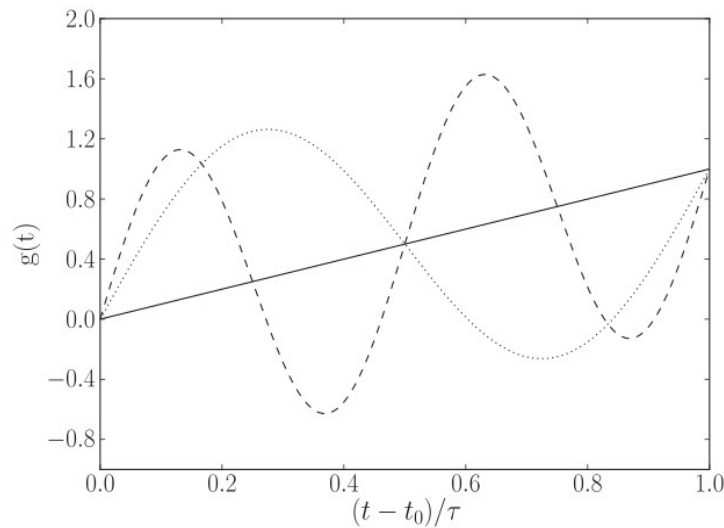
Potência negativa!

Taxas negativas de Produção de Entropia!

MB sub

O que sabemos sobre os processos ótimos

- Região 1: Protocolos ótimos *rápidos* NÃO são monotônicos

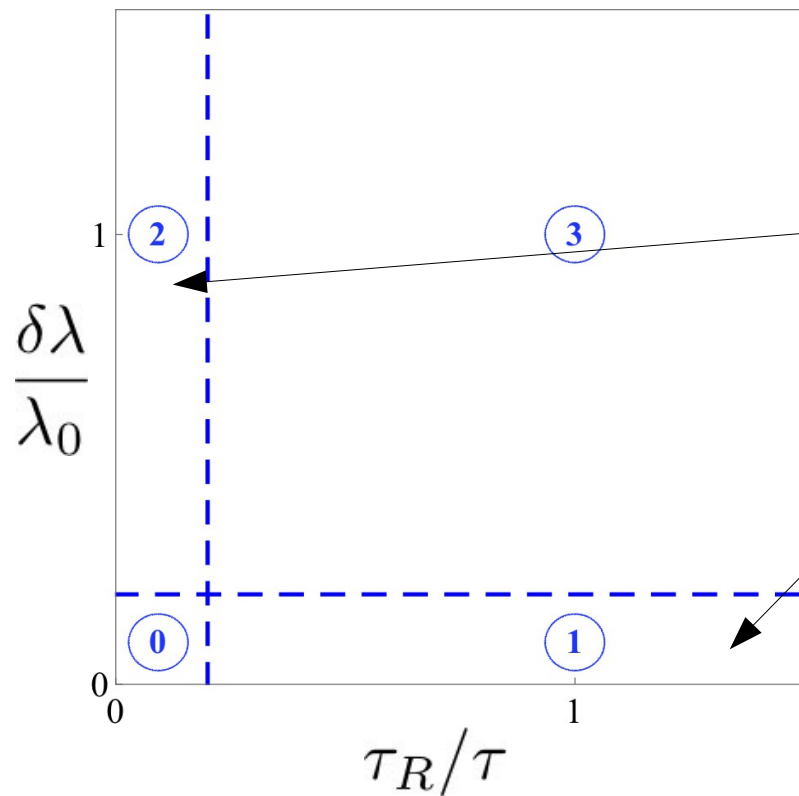


Potência negativa!

**Taxas negativas de Produção de Entropia!
2.a Lei?**

MB sub

O que **NÃO** sabemos sobre os processos ótimos

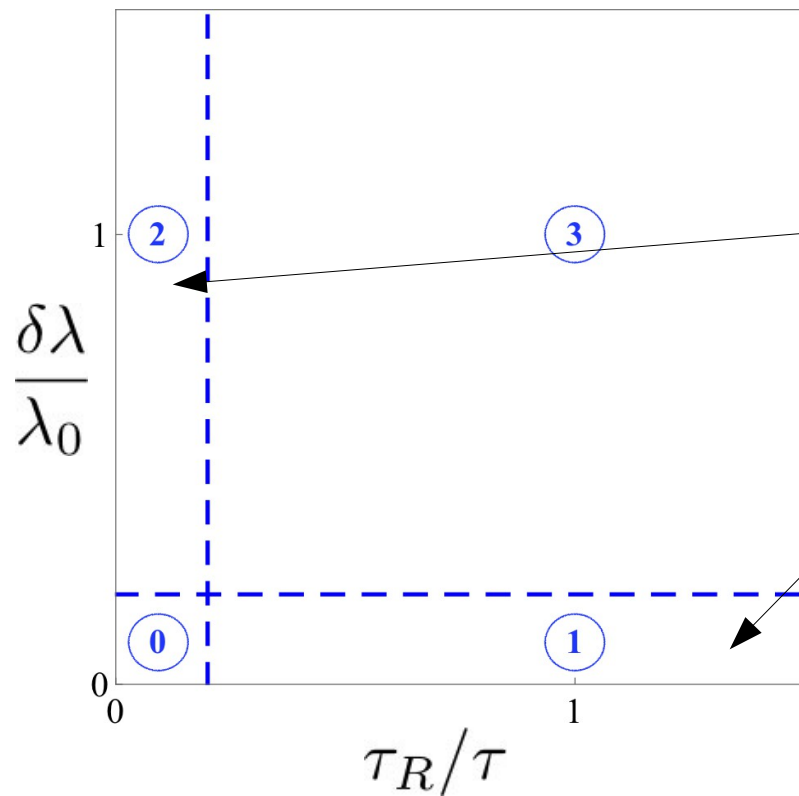


- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

O que **NÃO** sabemos sobre os processos ótimos



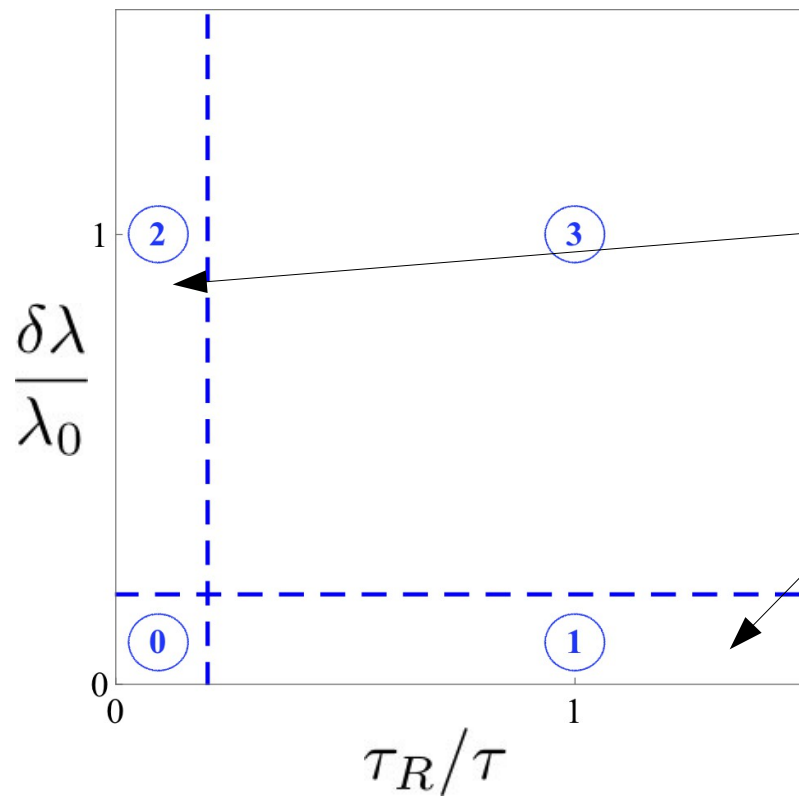
- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **Regime de validade das descrições perturbativas?**
- **Performance fora do equilíbrio (Região 3)?**

O que **NÃO** sabemos sobre os processos ótimos



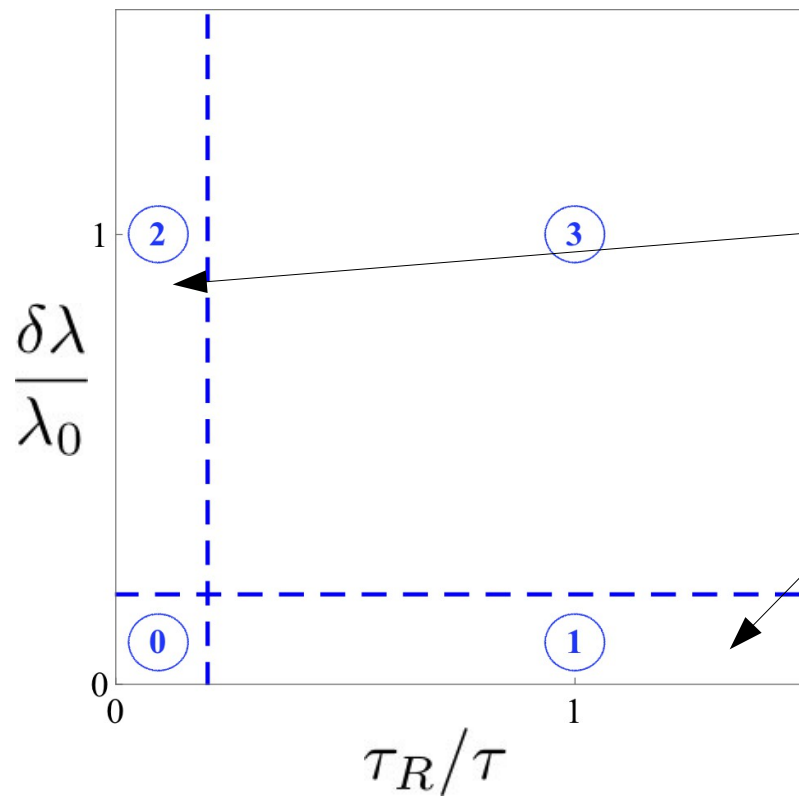
- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t - t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **Regime de validade das descrições perturbativas?**
- **Performance fora do equilíbrio (Região 3)?**

O que **NÃO** sabemos sobre os processos ótimos



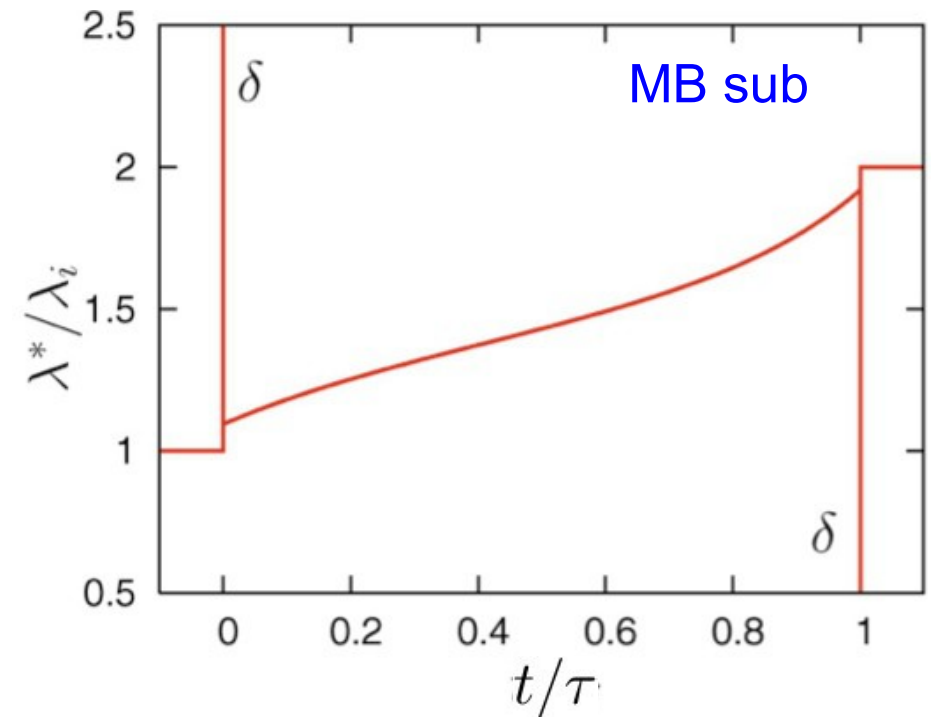
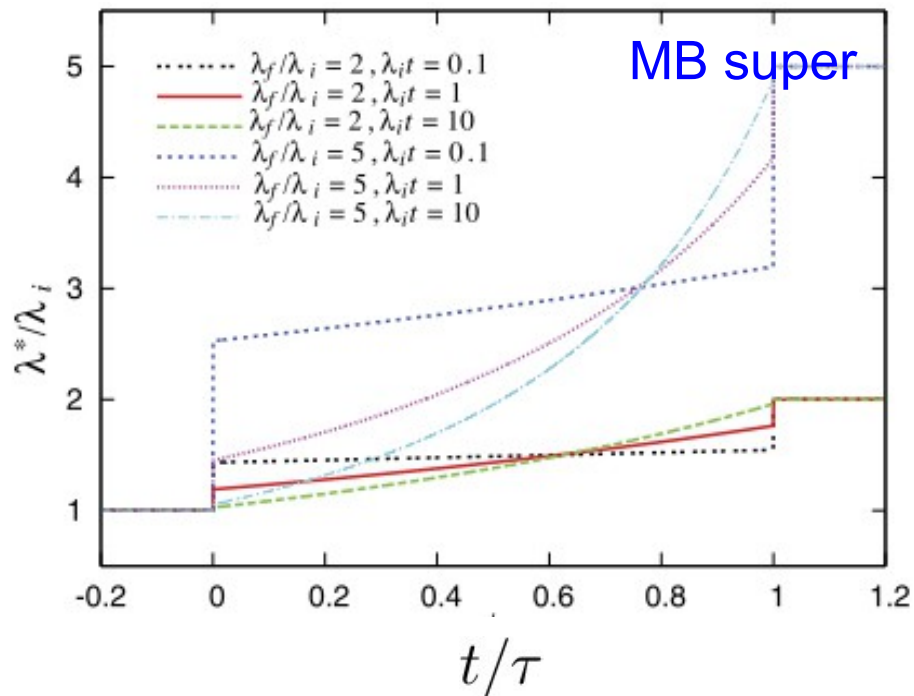
- **Custo energético:**

$$W_{ex} = \beta \int_0^\tau dt \dot{\lambda}^2(t) \tau_R[\lambda(t)] \chi[\lambda(t)]$$

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \Psi_{\lambda_0}(t-t') \dot{\lambda}(t) \dot{\lambda}(t')$$

- **Como obter sem soluções exatas?**
Expressões aproximadas em geral?

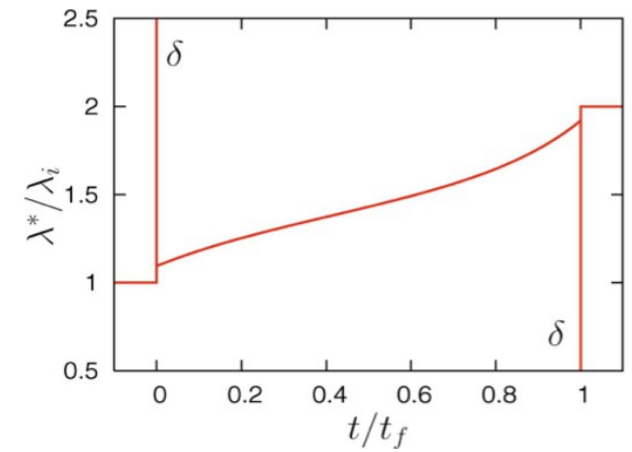
O que **NÃO** sabemos sobre os processos ótimos



- Saltos, picos? Por quê? Para quais sistemas?
- Saltos e picos somente nos extremos?
- Simetria? Por quê? Quando?

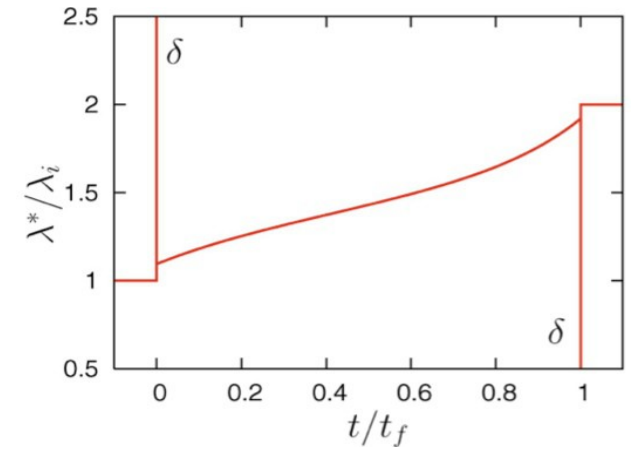
Sumário

- Se sabe muito pouco sobre a física dos processos ótimos fora do equilíbrio.



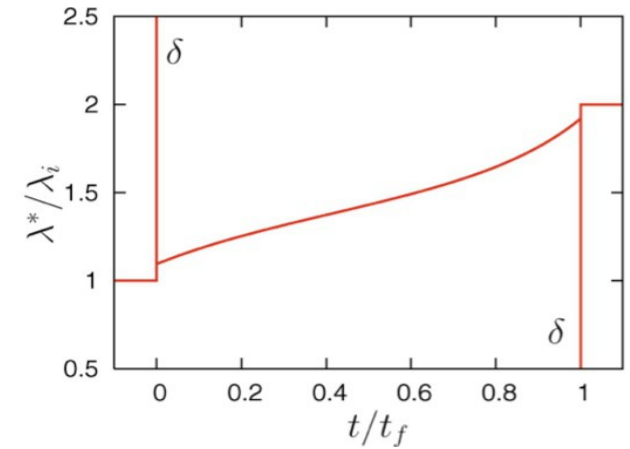
Sumário

- Se sabe muito pouco sobre a física dos processos ótimos fora do equilíbrio.
- Resultados exatos apenas para sistemas simples. Características contra-intuitivas ainda sem entendimento físico.



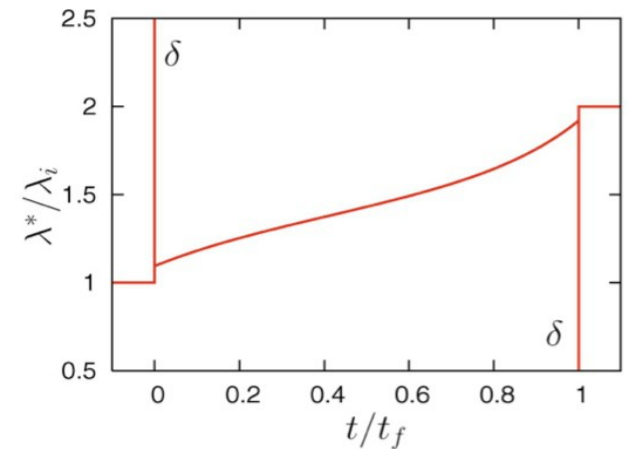
Sumário

- Se sabe muito pouco sobre a física dos processos ótimos fora do equilíbrio.
- Resultados exatos apenas para sistemas simples. Características contra-intuitivas ainda sem entendimento físico.
- Métodos numéricos, embora eficientes, não fornecem uma compreensão física das características dos processos ótimos.



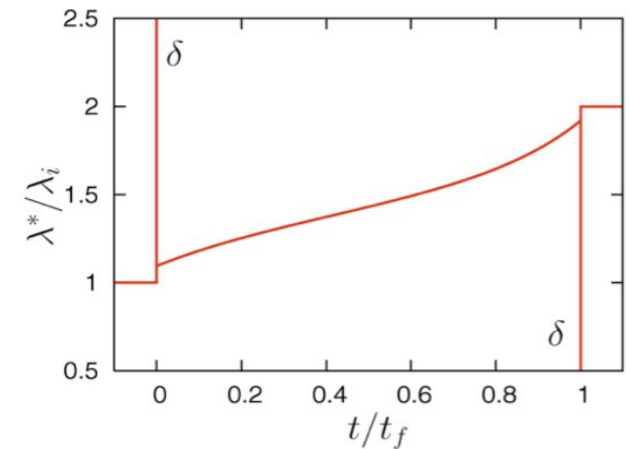
Sumário

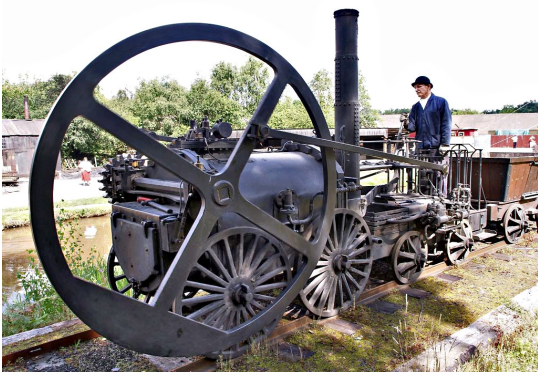
- Se sabe muito pouco sobre a física dos processos ótimos fora do equilíbrio.
- Resultados exatos apenas para sistemas simples. Características contra-intuitivas ainda sem entendimento físico.
- Métodos numéricos, embora eficientes, não fornecem uma compreensão física das características dos processos ótimos.
- Em regimes próximos ao equilíbrio, é possível formular funcionais bastante gerais para o custo energético do processo.



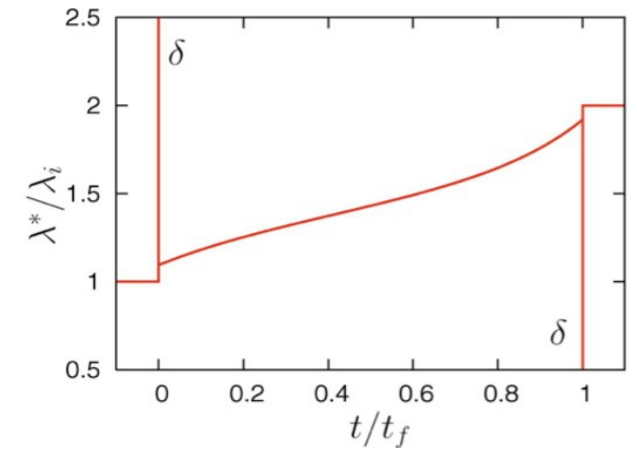
Sumário

- Se sabe muito pouco sobre a física dos processos ótimos fora do equilíbrio.
- Resultados exatos apenas para sistemas simples. Características contra-intuitivas ainda sem entendimento físico.
- Métodos numéricos, embora eficientes, não fornecem uma compreensão física das características dos processos ótimos.
- Em regimes próximos ao equilíbrio, é possível formular funcionais bastante gerais para o custo energético do processo.
- Os processos ótimos nesses regimes podem apresentar semelhanças com aqueles arbitrariamente fora do equilíbrio e podemos adquirir alguma compreensão física de suas características.





$$dS - \frac{\delta Q}{T} \geq 0$$



Obrigado pela atenção

