UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

LABORATÓRIO AVANÇADO DE FÍSICA

FLUTUAÇÃO ESTÍSTICA NA DESINTEGRAÇÃO RADIATIVA

1. INTRODUÇÃO

O decaimento radiativo é um processo aleatório. Consequentemente, qualquer medida que esteja baseada na observação de radiação emitida numa desintegração nuclear está sujeita, em algum grau, a flutuações estatísticas. Esta prática trata da análise estatística necessária para processar os resultados de experiências de contagem nuclear assim como dos testes de avaliação da aleatoriedade do sistema de medidas.

Na primeira experiência proposta são calculados os parâmetros que caracterizam uma coleção de N medidas independentes de uma mesma grandeza. Estes parâmetros que são a média ($\bar{n}$) e os desvios médio (d) e padrão (σ), constituem o valor mais provável da grandeza e o nível de confiança associável a ela respectivamente.

A segunda experiência trata do problema frequentemente enfrentado pelos pesquisadores que diz respeito ao tamanho que deve ter uma amostra (número de eventos), ou o tempo de contagem, a fim de evitar que uma medida seja realizada com precisão inadequada. Esta questão pode ser resolvida de modo relativamente simples quando se tem a noção do valor do desvio padrão (σ) da variável quantitativa que está sendo estudada.

Finalmente, a terceira experiência trata do teste do χ-quadrado, utilizado para determinar se as flutuações observadas em nossas medidas são consistentes com as flutuações esperadas, as quais tem origem somente estatístico. Teremos oportunidade de verificar que o χ-quadrado é um número com o auxílio do qual se pode testar a hipótese de que os desvios entre as frequências submetidas à comparação podem ser consideradas como casuais, contra a de que tais desvios sejam significativos. Com base nos dados obtidos traçaremos um histograma representativo e construiremos a curva normal sobreposta a ele.

2. EXPERIÊNCIA 1: *CARACTERIZAÇÃO DOS DADOS*

Tomando-se uma amostra radioativa e repetindo-se várias vezes sua contagem, supondo-se que o tempo entre uma contagem e outra seja desprezível, frente à meia vida, não se obtém sempre o mesmo valor. Isso se deve ao fato da emissão de radiação, bem como da sua detecção não ser constante, seguir uma distribuição estatística.

Assim, se forem observadas uma série de contagens n_1, n_2, n_3, ... n_N nas mesmas condições, o valor que melhor representa esta série será a média aritmética.

$$\bar{n} = \frac{\sum n_i}{N} \tag{1}$$

É necessário que se faça sempre uma análise estatística dos dados. Através dela é possível estimar-se a precisão das contagens, verificar se o detector e todo o sistema eletrônico se encontra funcionando em ordem, predeterminar o erro que se quer cometer numa dada medida e até tornar mínimo o erro cometido, escolhendo-se convenientemente os tempos de contagem.

A distribuição seguida é a chamada binomial, que em casos particulares se reduz às distribuições de Gauss ou Poisson.

O desvio padrão nestas distribuições pode ser calculado pela experessão: $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$.

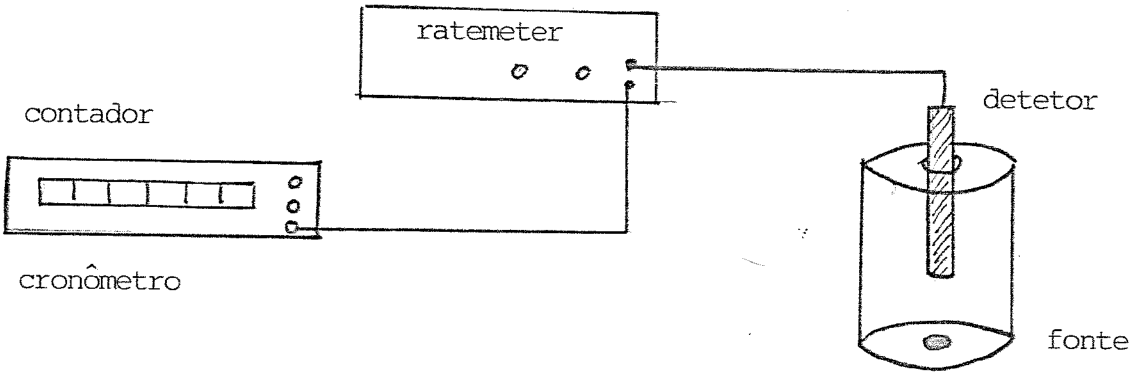
O desvio padrão de uma soma ou diferença de contagens é dada por

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{2}$$

Procedimento experimental

Equipamento necessário

- Detector G.M. (Geiger-Muller) - (Leybold)
- Cronômetro
- Fonte radioativa $Cs^{(137)}$
- Sistema eletrônico composto de fonte de alta tensão (ajustado a -400V) e um contador.



1) Coloque a fonte perto do detector e conte pelo menos 50 vezes sucessivamente, em períodos de um minuto.

2) As observações devem ser realizadas uma após a outra, sem interrupções longas e não devem ser mudadas as condições da experiência.

3) Calcule os seguintes parâmetros:

a) - contagem média $\bar{n} = \frac{1}{N}\sum_1^N n_i$

onde n_i são os valores das contagens e N o número de observações.

b) - desvios da contagem média: $\delta_i = |n_i - \bar{n}|$

c) - quadrados dos desvios: δ_i^2

d) - soma dos desvios: $\sum \delta_i$

e) - desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N-1}} \approx \sqrt{\bar{n}}$

f) - desvio médio: $d = \sqrt{\frac{\sum \delta_i}{\sqrt{N(N-1)}}}$.

3. EXPERIÊNCIA 2: *DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE CONTAGEM ENTRE A AMOSTRA E A RADIAÇÃO DE FUNDO - DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE CONTAGEM E/OU NÚMERO DE EVENTOS.*

3.1. Introdução

Dada uma certa amostra, o ritmo de contagem é definido como a razão entre o número acumulado num certo tempo e esse tempo $r = \frac{n}{t}$.

Então, tomando-se uma amostra de 100 cpm e contando-se durante um minuto, o seu erro estatístico será $\sqrt{100} = 10$; logo o erro porcentual será 10%. Tomando-se agora outra amostra de 10000 cpm e contando-se durante um minuto, seu erro estatístico será $\sqrt{10000} = 100$, logo o erro porcentual será 1%. Assim o erro da medida é dependente da atividade da amostra.

Na prática, ao ser realizada uma dada experiência, não se pode em geral dispor de amostras com atividade conveniente para um certo valor do erro. Para contornar isso, deve-se então aumentar o tempo de contagem de modo a obter-se, com qualquer atividade, o erro que for desejado.

3.2. Cálculo do erro padrão quando se faz a contagem durante um certo tempo

O rítmo de contagens é então dado por:

$$r = \frac{n}{t} \tag{3}$$

Pela teoria dos erros calcula-se:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\delta r}{\delta t}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta n}\right)^2 \sigma_n^2 \tag{4}$$

Desprezando o erro no tempo e lembrando que $\sigma_n = \sqrt{n}$ obtem-se:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{n}{t^2}\right) \quad \therefore \quad \sigma_r = \frac{\sqrt{n}}{t} \tag{5}$$

Assim o erro no rítmo de contagens será:

$$r \pm \sigma_r \quad \text{ou} \quad r \pm \frac{\sqrt{n}}{t} \quad \text{ou} \quad r \pm \sqrt{\frac{r}{t}} \tag{6}$$

Assim, se for contada a amostra de 100 contagens durante 100 minutos, tem-se:

$$r \pm \sqrt{\frac{100}{100}} = r \pm 1 \quad \therefore \quad \epsilon = \frac{1}{100} = 1\% \tag{7}$$

O erro porcentual é dado por:

$$\epsilon = \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sqrt{\frac{r}{t}}}{r} = \frac{1}{\sqrt{rt}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

Na prática isto só é válido quando a radiação de fundo é desprezível, caso contrário, deve ser levada em consideração.

Chamando:

r_A - rítmo de contagem da amostra

r_T - rítmo de contagem da amostra mais radiação de fundo

r_B - rítmo de contagem da radiação de fundo

tem-se: $r_A = r_T - r_B$

Quando se faz a diferença, os erros estatísticos se somam:

$$\sigma_{r_A}^2 = \sigma_{r_T}^2 + \sigma_{r_B}^2 \tag{9}$$

$$r_T = \frac{n_T}{t_T} \qquad \sigma_{r_T} = \frac{\sqrt{n_T}}{t_T} \tag{10}$$

$$r_B = \frac{n_B}{t_B} \qquad \sigma_{r_B} = \frac{\sqrt{n_B}}{t_B} \tag{11}$$

$$\sigma_{r_A} = \sqrt{\frac{n_T}{t_T^2} + \frac{n_B}{t_B^2}} \qquad = \sqrt{\frac{r_T}{t_T} + \frac{r_B}{t_B}} \tag{12}$$

3.3. Distribuição do tempo entre contagem da amostra e da radiação do fundo para obter um erro mínimo

Seja T_T o tempo total para a contagem da amostra e da radiação de fundo: $T_T = t_T + t_B$.

A primeira idéia é contar menos tempo a amostra que possui contagem mais alta e mais tempo a radiação de fundo que obviamente será menor. Entretanto, isso é completamente falso.

Temos:

$$\sigma_{r_A}^2 = \frac{r_T}{t_T} + \frac{r_B}{t_B} \tag{13}$$

mas

$$T_T = t_T + t_B \tag{14}$$

diferenciando teremos

$$dT_T = dt_T + dt_B = 0, \tag{15}$$

porque T_T é um tempo disponível fixo que temos para efetuar as medidas, então

$$dt_T = -dt_B \tag{16}$$

Como deseja-se cometer o mínimo erro possível, compatível com o tempo T disponível, diferencia-se a equação (1) para impor a condição de mínimo:

$$2\sigma_{r_A} d\sigma_{r_A} = -\frac{r_T \, dt_T}{t_T^2} - \frac{r_B \, dt_B}{t_B^2} = 0 \tag{17}$$

e segue

$$\frac{r_T}{r_B} = \frac{t_T^2}{t_B^2} \tag{18}$$

$$\frac{t_T}{t_B} = \sqrt{\frac{r_T}{r_B}} \tag{19}$$

3.4. Procedimento experimental

1 - Faça uma contagem de um minuto apenas para ter a ordem de grandeza da fonte e da radiação de fundo.

2 - Faça uma medida da fonte dada com precisão da ordem de 1%. Apresente os cálculos feitos.

3 - Suponha dispor de quinze minutos para fazer uma contagem da amostra e da radiação de fundo. Calcule a melhor distribuição do tempo.

4 - Faça a medida e verifique qual o erro porcentual cometido.

4. EXPERIÊNCIA 3: *TESTE DO* χ *QUADRADO*

4.1. Verificação do funcionamento de um sistema de contagens

Colocando-se num sistema de contagens uma amostra radioativa de vida longa comparada ao tempo de observação e repetindo-se sucessivamente a contagem num mesmo intervalo de tempo, sendo as contagens baixas, teremos os resultados distribuídos teoricamente como a distribuição de Poisson ou de Gauss.

Se o sistema está funcionando satisfatoriamente, verifica-se que esta previsão teórica é verdadeira. Por outro lado, se os resultados não se ajustam a uma distribuição normal, isto indica que há defeitos no sistema de detecção: ou no detector ou no equipamento eletrônico.

Consequentemente, deve realizar-se periodicamente, o chamado teste de funcionamento adequado do sistema de contagens.

Quando um equipamento de contagem é suspeito de registrar espúrias, provenientes de fatores que não dizem respeito à radiação nuclear, pode-se fazer ensaios comparando os desvios nos resultados de medidas sucessivas.

Uma técnica muito útil é a do chamado teste do χ quadrado, que permite avaliar a probabilidade de um certo conjunto de contagens ser uma distribuição gaussiana.

χ^2 é uma quantidade definida como:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{n} - n_i)^2}{\bar{n}} \tag{20}$$

onde N é o número de determinações feitas, n_i o valor da iésima contagem e $\bar{n}$ o valor médio das contagens.

Obtido este valo de χ^2, recorre-se a tabelas de distribuição de χ^2, nas quais se encontra a probabilidade P de obter certos valores de χ^2 para certos valores de N. Quanto menor for o valor de P, menor será a probabilidade das discrepâncias entre as contagens observadas terem ocorrido por acaso. Um valor de P muito pequeno leva então a suspeitar da existência de algum defeito no sistema de contagem. Do mesmo modo, um valor muito alto de P indica um acordo muito perfeito, o que também leva a suspeitar de algum vício sistemático no sistema de contagem. Na prática, aceita-se em geral, P entre 5 e 95%.

Agora que já sabemos calcular o valor de χ^2, suponhamos que fizessemos uma infinidade de experiências. É evidente que, após cada uma dessas séries, poderíamos calcular um χ^2, obtendo assim uma infinidade desses valores. Se com tal infinidade de valores fizessemos um gráfico, colocando em ordenada as porcentagens acumuladas com que eles foram encontrados, obteríamos uma distribuição de valores de χ^2, e a área delimitada por esta curva, dentro de determinados limites, estará associada à probabilidade de ocorrência de um determinado valor de χ^2.

Esta é a informação básica encontrada nas tabelas em anexo da distribuição de χ^2. Estas ordenam as probabilidades de ocorrência (valores da integral da distribuição) entre

0.9995 e 0.0005 (99.95 - 0.05 %), e os valores de χ^2 para os vários graus de liberdade do sistema (entre 1 e 200). O número de graus de liberdade de uma estatística, representado por ν, é definido como o número de observações independentes da amostra (isto é, seu tamanho) menos o número de informações que são necessários ao cálculo dos valores esperados teoricamente.

Assim, por exemplo, numa experiência com uma moeda, fazendo lances de cara ou coroa, temos 2 - 1 = 1 grau de liberdade, pois existem duas classes de resultados e necesitamos de uma única informação da amostra para calcular os valores esperados em cada uma delas. Num dado de 6 faces teremos ν = 6 - 1 = 5.

Suponhamos por exemplo que queremos por a prova a hipótese de que os dados de uma amostragem se apresentam segundo uma distribuição de Gauss, contra a hipótese alternativa de que isso não é verdadeiro. Se após o cálculo, realizado como descrito no exemplo 1 em anexo, obtemos χ^2 = 3.29, então, procurando na tabela de distribuição de χ^2 o valor 3.29 na fileira correspondente a 7 graus de liberdade, verificamos que a probabilidade está entre $0.8 < P < 0.9$. Isto significa que aceitamos que em 80% dos experimentos similares esperamos valores de χ^2 superiores ou iguais a 3.29. Podemos concluir pela aceitação da hipótese de que nossos dados têm uma distribuição de Gauss, visto que o χ^2 obtido indica que a <u>diferença</u> entre a distribuição observada e a esperada (Gaussiana) não é significativa.

Nas tabelas de distribuição de χ^2 em anexo podem ser encontrados os valores de P calculados através da integral entre χ^2 e ∞ ($\int_d$), e entre zero e χ^2 ($\int_g$).

4.2. Procedimento experimental

1 - Coloque a fonte no fundo do castelo e faça 100 contagens de um minuto. As observações devem ser realizadas uma após a outra sem interrupções longas e não devem ser alteradas as condições experimentais.

2 - Desenhe um histograma do número de eventos vs frequência, separando os dados em intervalos de 5 (ou 10 ou 20) unidades.

3 - Calcule o valor de χ^2 e procure na tabela o valor da probabilidade P correspondente a este número de observações.

5. Análise e questionário

5.1. Em relação a montagem experimental

a - Exemplifique o funcionamento de um detetor de radiação Geiger-Muller

b - Exemplifique o processo de desintegração radiativa da fonte de Cesio - 137.

c - Determine a atividade de 1 grama de ^{137}Cs (em curies, Ci) se a sua semi-vida para a desintegração beta é de 27 anos. (1 Ci = 3.7 x 10^{10} $\frac{des}{s}$).
(dica: Veja a referência 4.)

5.2. Experiência 1:

a - Verifique e justifique:

- a raiz quadrada da média $\sqrt{\bar{n}}$ é igual ao desvio padrão

- a razão entre o desvio médio e o desvio padrão é da ordem de 4/5.

b - Enumere as vezes em que o desvio é maior do que o dobro do desvio padrão: deve ocorrer em 4.6 % dos casos.

c - Enumere as observações nas quais o desvio é maior do que o desvio padrão: isto deve ocorrer em cerca de 31.7 % dos casos.

5.3. Experiência 2

Com os resultados da contagem de 15 minutos para a amostra e a radiação de fundo, calcule o erro porcentual cometido quando desprezamos a radiação de fundo ($\epsilon = 1/\sqrt{n}$)

ou quando a consideramos ($\epsilon_A = \sigma_{ra}/r_A$). Discuta seus resultados.

5.4. Experiência 3

a - A partir do valor de P encontrado indique se o sistema merece confiança ou não.

b - Trace a curva normal sobreposta ao histograma dos valores observados. Um procedimento sugerido para a obtenção dos dados necessários se encontra no exemplo 1 em anexo.

c - Um teste alternativo é constituído pelo chamado "Teste da hipótese da distribuição". Quando se quer por a prova a hipótese de que os dados se apresentam segundo uma distribuição dada, deve-se calcular:

$$\chi^2 = \sum \frac{(0-e)^2}{e} \tag{21}$$

onde 0 é o valor observado experimentalmente e e é valor teórico esperado segundo a distribuição. A probabilidade extraída da tabela de distribuição do χ^2 vai permitir concluir, ou não, pela aceitação da hipótese enunciada acima, visto que o χ^2 indicará se a diferença entre a distribuição observada e a esperada é ou não significativa. (Veja o exemplo 1 em anexo e a ref. 2).

d - Calcule o segundo e o terceiro momento (centrados na média) da distribuição observada e investigue a sua simetria. Para isto se pode utilizar as expressões seguintes:

$$m_2 = \left(\frac{\sum fx^2}{n} - \frac{(\sum fx)^2}{n^2}\right) i^2 \tag{22}$$

$$m_3 = \left(\frac{\sum fx^3}{n} - \frac{3\sum fx \sum fx^2}{n^2} + \frac{2(\sum fx)^3}{n^3}\right) i^3 \tag{23}$$

$$g_1 = m_3/m_2^{3/2} \tag{24}$$

onde os dados estão agrupados em classes (codificadas) x, de frequência absoluta f, e com intervalo de classe i (veja exemplo 1), n é o tamanho da amostragem. O coeficiente de

Fisher, g_1, é igual a zero quando a distribuição é simétrica. Ele indicará assimetria positiva quando for positico $(g_1 > 0)$ e, ao contrário, um alargamento da cauda da ditribuição à esquerda da média quando for negativo $(g_1 < 0)$.

Bibliografia

O aluno que não domina esta área fundamental, deve consultar os seguintes livros:

1) H.D. Young, Statistical Treatment of Experimental Data (a consultar na Biblioteca da Matmática).

2) B. Beiguelman, Curso prático de Bioestadística, Ed. Soc. Bras. de Genética, Ribeirão Preto (1988).

3) O.A.M. Helen, V.R. Vanin, Tratamento estatístico de Dados em Física Experimental (Biblioteca DFCM 511.43), ed. E. Blucher Ltda, 1981.

4) A. Beiser, Conceitos de Física Moderna (caps. 13 e 15), (Biblioteca DFCM 539, B423).

5) P.N. Meyer, Probabilidade, aplicações à estatística (Biblioteca DFCM 519.2, M613).

EXEMPLO 1

Numa experiência (imaginária) de desintegração radiativa realizamos 30 contagens de 5 segundos cada. Os resultados e sua análise estatística estão resumidos na tabela a seguir, onde a frequência f é o número de vezes que medimos uma certa contagem definida num intervalo (por exemplo, entre 45 e 49 na primeira contagem).

Na última coluna, $\underline{0}$ é o valor observado (f) e $\underline{e}$ é o valor esperado teoricamente (Gaussiana y(x)).

contagem	código x	freq. f	fx	fx^2	fx^3	$x - \bar{x}$	(y)	$\frac{(0-e)^2}{e}$
47	- 4	2	- 8	32	- 128	- 3.9	1.05	0.86
52	- 3	4	- 12	36	- 108	- 2.9	2.23	1.40
57	- 2	4	- 8	16	- 32	- 1.9	3.78	0.01
62	- 1	6	- 6	6	- 6	- 0.9	5.15	0.14
67	0	5	0	0	0	0.1	5.61	0.07
72	1	3	3	3	3	1.1	4.91	0.74
77	2	3	6	12	24	2.1	3.44	0.06
82	3	2	6	18	54	3.1	1.94	0.00
87	4	1	4	16	64	4.1	0.89	0.01
total:		30	- 15	139	- 129			3.29

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = 67 + \frac{-15}{30} = 66.50 \quad \text{(codificado como 0.1)} \qquad (25)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2 - (\sum fx)^2/n}{n-1}} = 2.13 \tag{26}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n}{s}exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right) \tag{27}$$

$\chi^2 = 3.29(0.8 < P < 0.9)$ indica que a diferença entre a distribuição observada e a esperada não é significativa.

$$m_2 = \left(\frac{139}{30} - \frac{(15)^2}{(30)^2}\right)5^2 = 109.5 \tag{28}$$

$$m_3 = \left(-\frac{129}{30} - \frac{3(-15)139}{30^2} + \frac{2(-15)^3}{30^3}\right)5^3 = 300 \tag{29}$$

$$g_1 = \frac{300}{\sqrt{(109.5)^3}} = 0.26 \tag{30}$$

g_1 não difere significativamente de zero, ou seja, a distribuição é simétrica.

ESPECIFICAÇÕES GERAIS

a) Tubo GM Leybold 55901

partículas detectáveis: $\alpha, \beta, gamma$

tensão de funcionamento: 450 V

largura do patamar: 200 V

vida: $> 10^{10}$ pulsos

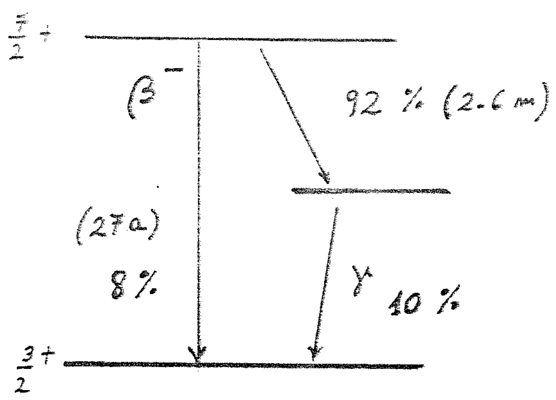
ruído no patamar: $\sim$ 0,2 pulsos/s com blindagem de 50 m de Pb e 30 mm de Al

janela: mica ϕ 9 mm, espessura 2,5 mg/cm^2

gás: halogeno

b) Fonte Cs^{137}

atividade: $\sim \mu$ Ci



Máximo Siu Li / José Pedro Donoso / Michel André Aegerter

(apflutum.tex)

Limites de signification de la distribution du χ^2 $\nu = 1$–50

$\int_\alpha$ = intégrale entre χ^2 et l'infini ($1 \int_\alpha = 2\alpha$, $\frac{1}{2} \int_\alpha = \alpha$ pour le test du χ^2). $\int_e$ = intégrale entre zéro et χ^2

$\int_\alpha$ 1 ½	0,99950 0,49975	0,9990 0,4995	0,9950 0,4975	0,990 0,495	0,9750 0,4875	0,950 0,475	0,90 0,45	0,80 0,40	0,70 0,35	0,60 0,30	0,50 0,25	0,40 0,20	0,30 0,15	0,20 0,10	0,10 0,05	0,050 0,025	0,0250 0,0125	0,010 0,005	0,0050 0,0025	0,0010 0,0005	0,00050 0,00025
$\int_e$ 1 ½	0,00050 0,00025	0,0010 0,0005	0,0050 0,0025	0,010 0,005	0,0250 0,0125	0,050 0,025	0,10 0,05	0,20 0,10	0,30 0,15	0,40 0,20	0,50 0,25	0,60 0,30	0,70 0,35	0,80 0,40	0,90 0,45	0,950 0,475	0,9750 0,4875	0,990 0,495	0,9950 0,4975	0,9990 0,4995	0,99950 0,49975
ν																					
1	0,000000393	0,00000157	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,275	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116
2	0,00100	0,00200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,022	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	1,869	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	2,753	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,998
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	3,655	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	4,570	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	5,493	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	6,423	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	7,357	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	8,295	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,419
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	9,237	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	10,182	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	11,129	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	12,079	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	13,030	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	13,983	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	14,937	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	15,893	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352	16,850	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	17,809	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	18,768	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010
22	6,405	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	19,729	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	20,690	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	52,000
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	21,652	23,337	25,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	22,616	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	54,947
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	23,579	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719	24,544	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	25,509	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	26,475	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,302	60,734
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	27,442	29,336	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,161
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440	28,409	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373	29,376	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,329	62,487	64,995
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307	30,344	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242	31,313	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178	32,282	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,198
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115	33,252	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053	34,222	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,883	69,346	71,972
38	15,644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992	35,192	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351
39	16,273	17,261	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932	36,163	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	32,345	34,872	37,134	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095
41	17,544	18,575	21,421	22,906	25,215	27,326	29,907	33,251	35,813	38,105	40,335	42,651	45,224	48,363	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053	74,745	77,459
42	18,186	19,238	22,138	23,650	25,999	28,144	30,765	34,157	36,755	39,077	41,335	43,679	46,282	49,456	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336	76,084	78,820
43	18,832	19,905	22,859	24,398	26,785	28,965	31,625	35,065	37,698	40,050	42,335	44,706	47,339	50,548	55,230	59,304	62,990	67,459	70,616	77,418	80,176
44	19,482	20,576	23,584	25,148	27,575	29,787	32,487	35,974	38,641	41,022	43,335	45,734	48,396	51,639	56,369	60,481	64,201	68,709	71,893	78,749	81,528
45	20,136	21,251	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	36,884	39,585	41,995	44,335	46,761	49,452	52,729	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166	80,077	82,876
46	20,794	21,929	25,041	26,657	29,160	31,439	34,215	37,795	40,529	42,968	45,335	47,787	50,507	53,818	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437	81,400	84,220
47	21,456	22,610	25,774	27,416	29,956	32,268	35,081	38,708	41,474	43,942	46,335	48,814	51,562	54,906	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704	82,720	85,560
48	22,121	23,295	26,511	28,177	30,755	33,098	35,949	39,621	42,420	44,915	47,335	49,840	52,616	55,993	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969	84,037	86,897
49	22,789	23,983	27,249	28,941	31,555	33,930	36,818	40,534	43,366	45,889	48,335	50,866	53,670	57,079	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231	85,350	88,231
50	23,461	24,674	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	41,449	44,313	46,864	49,335	51,892	54,723	58,164	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661	89,561

Limites de signification de la distribution du χ^2 $\nu = 51–100$

$\int_e$ = intégrale entre χ^2 et l'infini (1 $\int_e = 2\alpha$, ½ $\int_e = \alpha$ pour le test du χ^2). $\int_e$ = intégrale entre zéro et χ^2

$\int_a$ 1 / ½	0,99950 / 0,49975	0,9990 / 0,4995	0,9950 / 0,4975	0,990 / 0,495	0,9750 / 0,4875	0,950 / 0,475	0,90 / 0,45	0,80 / 0,40	0,70 / 0,35	0,60 / 0,30
$\int_a$ 1 / ½	0,00050 / 0,00025	0,0010 / 0,0005	0,0050 / 0,0025	0,010 / 0,005	0,0250 / 0,0125	0,050 / 0,025	0,10 / 0,05	0,20 / 0,10	0,30 / 0,15	0,40 / 0,20
ν										
51	24,136	25,368	28,735	30,475	33,162	35,600	38,560	42,365	45,261	47,838
52	24,814	26,065	29,481	31,246	33,968	36,437	39,433	43,281	46,209	48,813
53	25,495	26,765	30,230	32,018	34,776	37,276	40,308	44,199	47,157	49,788
54	26,179	27,468	30,981	32,793	35,586	38,116	41,183	45,117	48,106	50,764
55	26,866	28,173	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	46,036	49,056	51,739
56	27,556	28,881	32,490	34,350	37,212	39,801	42,937	46,955	50,005	52,715
57	28,248	29,592	33,248	35,131	38,027	40,646	43,816	47,876	50,956	53,691
58	28,943	30,305	34,008	35,913	38,844	41,492	44,696	48,797	51,906	54,667
59	29,640	31,021	34,771	36,698	39,662	42,339	45,577	49,718	52,857	55,643
60	30,340	31,739	35,535	37,485	40,482	43,188	46,459	50,641	53,809	56,620
61	31,043	32,459	36,301	38,273	41,303	44,038	47,342	51,564	54,761	57,597
62	31,748	33,181	37,068	39,063	42,126	44,889	48,226	52,487	55,714	58,574
63	32,455	33,906	37,838	39,855	42,950	45,741	49,111	53,411	56,666	59,551
64	33,165	34,633	38,610	40,649	43,776	46,595	49,996	54,336	57,619	60,528
65	33,877	35,362	39,383	41,444	44,603	47,450	50,883	55,262	58,573	61,506
66	34,591	36,093	40,158	42,240	45,431	48,305	51,770	56,188	59,527	62,484
67	35,307	36,826	40,935	43,038	46,261	49,162	52,659	57,115	60,481	63,461
68	36,025	37,561	41,713	43,838	47,092	50,020	53,548	58,042	61,436	64,440
69	36,745	38,298	42,494	44,639	47,924	50,879	54,438	58,970	62,391	65,418
70	37,467	39,036	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	59,898	63,346	66,396
71	38,192	39,777	44,058	46,246	49,592	52,600	56,221	60,827	64,302	67,375
72	38,918	40,520	44,843	47,051	50,428	53,462	57,113	61,756	65,258	68,353
73	39,646	41,264	45,629	47,858	51,265	54,325	58,006	62,686	66,214	69,332
74	40,376	42,010	46,417	48,666	52,103	55,189	58,900	63,616	67,170	70,311
75	41,107	42,757	47,206	49,475	52,942	56,054	59,795	64,547	68,127	71,290
76	41,841	43,506	47,998	50,286	53,782	56,920	60,690	65,478	69,084	72,270
77	42,576	44,257	48,788	51,097	54,623	57,786	61,586	66,409	70,042	73,249
78	43,313	45,010	49,582	51,910	55,466	58,654	62,483	67,341	70,999	74,228
79	44,051	45,764	50,376	52,725	56,309	59,522	63,380	68,274	71,957	75,208
80	44,791	46,520	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	69,207	72,915	76,188
81	45,533	47,277	51,969	54,357	57,998	61,261	65,176	70,140	73,874	77,168
82	46,276	48,036	52,767	55,174	58,845	62,132	66,076	71,074	74,833	78,148
83	47,021	48,796	53,567	55,993	59,692	63,004	66,976	72,008	75,792	79,128
84	47,767	49,557	54,368	56,813	60,540	63,876	67,876	72,943	76,751	80,108
85	48,515	50,320	55,170	57,634	61,389	64,749	68,777	73,878	77,710	81,089
86	49,264	51,085	55,973	58,456	62,239	65,623	69,679	74,813	78,670	82,069
87	50,015	51,850	56,777	59,279	63,089	66,498	70,581	75,749	79,630	83,050
88	50,767	52,617	57,582	60,103	63,941	67,373	71,484	76,685	80,590	84,031
89	51,521	53,386	58,389	60,928	64,793	68,249	72,387	77,622	81,550	85,012
90	52,276	54,155	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	78,558	82,511	85,993
91	53,032	54,926	60,005	62,581	66,501	70,003	74,196	79,496	83,472	86,974
92	53,790	55,698	60,815	63,409	67,356	70,882	75,101	80,433	84,433	87,955
93	54,549	56,471	61,625	64,238	68,211	71,760	76,006	81,371	85,394	88,936
94	55,309	57,246	62,437	65,068	69,068	72,640	76,912	82,309	86,356	89,917
95	56,070	58,022	63,250	65,898	69,925	73,520	77,818	83,248	87,317	90,899
96	56,833	58,799	64,063	66,730	70,783	74,400	78,725	84,187	88,279	91,881
97	57,597	59,577	64,878	67,562	71,642	75,282	79,633	85,126	89,241	92,862
98	58,362	60,356	65,694	68,396	72,501	76,164	80,541	86,065	90,204	93,844
99	59,128	61,136	66,510	69,230	73,361	77,046	81,449	87,005	91,166	94,826
100	59,897	61,919	67,328	70,065	74,222	77,930	82,358	87,945	92,129	95,808

$\int_a$ 1 / ½	0,50 / 0,25	0,40 / 0,20	0,30 / 0,15	0,20 / 0,10	0,10 / 0,05	0,050 / 0,025	0,0250 / 0,0125	0,010 / 0,005	0,0050 / 0,0025	0,0010 / 0,0005	0,00050 / 0,00025
$\int_a$ 1 / ½	0,50 / 0,25	0,60 / 0,30	0,70 / 0,35	0,80 / 0,40	0,90 / 0,45	0,950 / 0,475	0,9750 / 0,4875	0,990 / 0,495	0,9950 / 0,4975	0,9990 / 0,4995	0,99950 / 0,49975
ν											
51	50,335	52,917	55,775	59,248	64,295	68,669	72,616	77,386	80,747	87,268	90,887
52	51,335	53,942	56,827	60,332	65,422	69,832	73,810	78,616	82,001	89,272	92,211
53	52,335	54,967	57,879	61,414	66,548	70,993	75,002	79,843	83,253	90,573	93,532
54	53,335	55,992	58,930	62,496	67,673	72,153	76,192	81,069	84,502	91,872	94,849
55	54,335	57,016	59,980	63,577	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749	93,167	96,163
56	55,335	58,049	61,031	64,658	69,918	74,468	78,567	83,513	86,994	94,460	97,475
57	56,335	59,064	62,080	65,737	71,040	75,624	79,752	84,733	88,236	95,751	98,784
58	57,335	60,088	63,129	66,816	72,160	76,778	80,936	85,950	89,477	97,039	100,090
59	58,335	61,111	64,178	67,894	73,279	77,931	82,117	87,166	90,715	98,324	101,394
60	59,335	62,135	65,226	68,972	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607	102,695
61	60,335	63,158	66,274	70,049	75,514	80,232	84,476	89,591	93,186	100,888	103,993
62	61,335	64,181	67,322	71,125	76,630	81,381	85,654	90,802	94,419	102,166	105,289
63	62,335	65,204	68,369	72,201	77,745	82,529	86,830	92,010	95,649	103,442	106,583
64	63,335	66,226	69,416	73,276	78,860	83,675	88,004	93,217	96,878	104,716	107,874
65	64,335	67,249	70,462	74,351	79,973	84,821	89,177	94,422	98,105	105,988	109,164
66	65,335	68,271	71,508	75,425	81,086	85,965	90,349	95,626	99,330	107,258	110,451
67	66,335	69,293	72,554	76,498	82,197	87,108	91,519	96,828	100,554	108,525	111,735
68	67,334	70,315	73,600	77,571	83,308	88,250	92,688	98,028	101,776	109,791	113,018
69	68,334	71,337	74,645	78,643	84,418	89,391	93,856	99,227	102,996	111,055	114,298
70	69,334	72,358	75,689	79,715	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317	115,577
71	70,334	73,380	76,734	80,786	86,635	91,670	96,189	101,621	105,432	113,577	116,854
72	71,334	74,401	77,778	81,857	87,743	92,808	97,353	102,816	106,648	114,835	118,129
73	72,334	75,422	78,822	82,927	88,850	93,945	98,516	104,010	107,862	116,091	119,402
74	73,334	76,443	79,865	83,997	89,956	95,081	99,678	105,202	109,074	117,346	120,673
75	74,334	77,464	80,908	85,066	91,061	96,217	100,839	106,393	110,286	118,599	121,942
76	75,334	78,485	81,951	86,135	92,166	97,351	101,999	107,583	111,495	119,851	123,209
77	76,334	79,505	82,994	87,203	93,270	98,484	103,158	108,771	112,704	121,100	124,475
78	77,334	80,526	84,036	88,271	94,374	99,617	104,316	109,958	113,911	122,348	125,739
79	78,334	81,546	85,078	89,338	95,476	100,749	105,473	111,144	115,117	123,594	127,001
80	79,334	82,566	86,120	90,405	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839	128,261
81	80,334	83,586	87,161	91,472	97,680	103,009	107,783	113,512	117,524	126,083	129,520
82	81,334	84,606	88,202	92,538	98,780	104,139	108,937	114,695	118,726	127,324	130,777
83	82,334	85,626	89,243	93,604	99,880	105,267	110,090	115,876	119,927	128,565	132,033
84	83,334	86,646	90,284	94,669	100,980	106,395	111,242	117,057	121,126	129,804	133,287
85	84,334	87,665	91,325	95,734	102,079	107,522	112,393	118,236	122,325	131,041	134,540
86	85,334	88,685	92,365	96,799	103,177	108,648	113,544	119,414	123,522	132,277	135,792
87	86,334	89,704	93,405	97,863	104,275	109,773	114,693	120,591	124,718	133,512	137,042
88	87,334	90,723	94,445	98,927	105,372	110,898	115,841	121,767	125,912	134,745	138,290
89	88,334	91,742	95,484	99,991	106,469	112,022	116,989	122,942	127,106	135,977	139,537
90	89,334	92,761	96,524	101,054	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208	140,783
91	90,334	93,780	97,563	102,116	108,661	114,268	119,282	125,289	129,491	138,438	142,027
92	91,334	94,799	98,602	103,179	109,756	115,390	120,427	126,462	130,681	139,666	143,270
93	92,334	95,818	99,641	104,242	110,850	116,511	121,571	127,633	131,871	140,893	144,511
94	93,334	96,836	100,679	105,303	111,944	117,632	122,715	128,803	133,059	142,119	145,751
95	94,334	97,855	101,717	106,364	113,038	118,752	123,858	129,973	134,247	143,343	146,990
96	95,334	98,873	102,755	107,425	114,131	119,871	125,000	131,141	135,433	144,567	148,228
97	96,334	99,892	103,793	108,486	115,223	120,990	126,141	132,309	136,619	145,789	149,464
98	97,334	100,910	104,831	109,547	116,315	122,108	127,282	133,476	137,803	147,010	150,699
99	98,334	101,928	105,868	110,607	117,406	123,225	128,422	134,642	138,987	148,230	151,934
100	99,334	102,946	106,906	111,667	118,498	124,342	129,561	135,806	140,169	149,448	153,165

Limites de signification de la distribution du χ^2* $\nu = 101-150$

$\int_\alpha$ = intégrale entre χ^2 et l'infini (1 $\int_\alpha = 2\alpha$, ½ $\int_\alpha = \alpha$ pour le test du χ^2) $\int_\rho$ = intégrale entre zéro et χ^2

$\int_\alpha$ 1 / ½	0,99950 0,49975	0,9990 0,4995	0,9950 0,4975	0,990 0,495	0,9750 0,4875	0,950 0,475	0,90 0,45	0,80 0,40	0,70 0,35	0,60 0,30	0,50 0,25	0,40 0,20	0,30 0,15	0,20 0,10	0,10 0,05	0,050 0,025	0,0250 0,0125	0,010 0,005	0,0050 0,0025	0,0010 0,0005	0,00050 0,00025
$\int_\rho$ 1 / ½	0,00050 0,00025	0,0010 0,0005	0,0050 0,0025	0,010 0,005	0,0250 0,0125	0,050 0,025	0,10 0,05	0,20 0,10	0,30 0,15	0,40 0,20	0,50 0,25	0,60 0,30	0,70 0,35	0,80 0,40	0,90 0,45	0,950 0,475	0,9750 0,4875	0,990 0,495	0,9950 0,4975	0,9990 0,4995	0,99950 0,49975
ν																					
101	60,666	62,702	68,147	70,901	75,084	78,813	83,267	88,886	93,092	96,790	100,334	103,964	107,943	112,726	119,589	125,458	130,700	136,971	141,351	150,666	154,397
102	61,436	63,485	68,966	71,738	75,946	79,698	84,177	89,826	94,055	97,772	101,334	104,982	108,980	113,786	120,679	126,574	131,837	138,134	142,532	151,883	155,628
103	62,207	64,270	69,786	72,575	76,809	80,582	85,088	90,767	95,018	98,754	102,334	105,999	110,017	114,845	121,769	127,689	132,975	139,297	143,712	153,098	156,857
104	62,978	65,056	70,607	73,413	77,672	81,468	85,998	91,709	95,981	99,737	103,334	107,017	111,053	115,903	122,858	128,804	134,111	140,459	144,891	154,313	158,086
105	63,752	65,842	71,429	74,252	78,537	82,354	86,909	92,650	96,945	100,719	104,334	108,035	112,090	116,962	123,947	129,918	135,247	141,620	146,069	155,527	159,313
106	64,526	66,630	72,252	75,092	79,401	83,240	87,821	93,592	97,909	101,701	105,334	109,052	113,126	118,020	125,035	131,031	136,382	142,780	147,246	156,739	160,539
107	65,301	67,419	73,075	75,933	80,267	84,127	88,733	94,534	98,873	102,684	106,334	110,070	114,162	119,078	126,123	132,144	137,517	143,940	148,423	157,951	161,765
108	66,077	68,208	73,899	76,774	81,133	85,015	89,645	95,477	99,837	103,667	107,334	111,087	115,198	120,135	127,211	133,257	138,650	145,099	149,599	159,161	162,989
109	66,854	68,999	74,725	77,616	82,000	85,903	90,558	96,419	100,801	104,649	108,334	112,104	116,233	121,193	128,298	134,369	139,784	146,257	150,774	160,371	164,212
110	67,632	69,791	75,551	78,459	82,867	86,792	91,471	97,362	101,766	105,632	109,334	113,121	117,269	122,250	129,385	135,480	140,916	147,414	151,948	161,580	165,434
111	68,412	70,583	76,377	79,302	83,735	87,681	92,385	98,306	102,730	106,615	110,334	114,138	118,304	123,306	130,472	136,591	142,048	148,571	153,121	162,787	166,655
112	69,192	71,377	77,205	80,146	84,604	88,570	93,299	99,249	103,695	107,598	111,334	115,156	119,340	124,363	131,558	137,701	143,180	149,727	154,294	163,994	167,875
113	69,973	72,171	78,033	80,991	85,473	89,461	94,213	100,193	104,660	108,581	112,334	116,172	120,375	125,419	132,643	138,811	144,311	150,882	155,466	165,200	169,094
114	70,755	72,966	78,862	81,837	86,343	90,351	95,128	101,137	105,625	109,564	113,334	117,189	121,410	126,475	133,729	139,921	145,441	152,036	156,637	166,405	170,312
115	71,538	73,762	79,692	82,683	87,213	91,242	96,043	102,081	106,590	110,547	114,334	118,206	122,444	127,531	134,813	141,030	146,571	153,190	157,807	167,609	171,530
116	72,322	74,559	80,523	83,530	88,084	92,134	96,958	103,025	107,556	111,531	115,334	119,223	123,479	128,587	135,898	142,138	147,700	154,344	158,977	168,812	172,746
117	73,107	75,357	81,354	84,377	88,955	93,026	97,874	103,970	108,521	112,514	116,334	120,239	124,513	129,642	136,982	143,246	148,829	155,496	160,146	170,015	173,961
118	73,893	76,156	82,186	85,225	89,827	93,918	98,790	104,915	109,487	113,497	117,334	121,256	125,548	130,697	138,066	144,354	149,957	156,648	161,314	171,216	175,176
119	74,680	76,956	83,019	86,074	90,700	94,811	99,707	105,860	110,453	114,481	118,334	122,273	126,582	131,752	139,149	145,461	151,084	157,799	162,481	172,417	176,389
120	75,468	77,756	83,852	86,924	91,573	95,705	100,624	106,806	111,419	115,465	119,334	123,289	127,616	132,806	140,233	146,567	152,211	158,950	163,648	173,617	177,602
121	76,256	78,557	84,686	87,774	92,446	96,599	101,541	107,751	112,385	116,448	120,334	124,305	128,650	133,861	141,315	147,673	153,338	160,100	164,814	174,815	178,813
122	77,046	79,360	85,521	88,624	93,320	97,493	102,458	108,697	113,351	117,432	121,334	125,322	129,684	134,915	142,398	148,779	154,464	161,249	165,979	176,014	180,024
123	77,836	80,162	86,356	89,476	94,195	98,388	103,376	109,643	114,317	118,416	122,334	126,338	130,717	135,969	143,480	149,885	155,589	162,398	167,144	177,211	181,234
124	78,627	80,966	87,193	90,328	95,070	99,283	104,295	110,589	115,284	119,399	123,334	127,354	131,751	137,022	144,562	150,989	156,714	163,546	168,308	178,407	182,443
125	79,419	81,771	88,029	91,180	95,946	100,178	105,213	111,536	116,250	120,383	124,334	128,370	132,784	138,076	145,643	152,094	157,838	164,694	169,471	179,603	183,652
126	80,212	82,576	88,867	92,033	96,822	101,074	106,132	112,483	117,217	121,367	125,334	129,386	133,817	139,129	146,724	153,198	158,962	165,841	170,634	180,799	184,859
127	81,006	83,382	89,705	92,887	97,699	101,971	107,051	113,430	118,184	122,351	126,334	130,402	134,850	140,182	147,805	154,301	160,086	166,987	171,796	181,992	186,066
128	81,800	84,189	90,544	93,741	98,576	102,867	107,971	114,377	119,151	123,335	127,334	131,418	135,883	141,235	148,885	155,405	161,209	168,133	172,957	183,186	187,272
129	82,595	84,996	91,383	94,596	99,453	103,765	108,891	115,324	120,118	124,320	128,334	132,434	136,916	142,288	149,965	156,507	162,331	169,278	174,118	184,378	188,477
130	83,391	85,805	92,223	95,451	100,331	104,662	109,811	116,272	121,086	125,304	129,334	133,450	137,949	143,340	151,045	157,610	163,453	170,423	175,278	185,570	189,681
131	84,188	86,614	93,063	96,307	101,210	105,560	110,732	117,219	122,053	126,288	130,334	134,465	138,981	144,392	152,125	158,712	164,575	171,567	176,437	186,761	190,885
132	84,985	87,423	93,905	97,164	102,089	106,459	111,652	118,167	123,021	127,272	131,334	135,481	140,014	145,444	153,204	159,814	165,696	172,711	177,596	187,952	192,087
133	85,784	88,234	94,746	98,021	102,968	107,357	112,573	119,116	123,988	128,257	132,334	136,497	141,046	146,496	154,283	160,915	166,816	173,854	178,755	189,141	193,289
134	86,583	89,045	95,589	98,878	103,848	108,257	113,495	120,064	124,956	129,241	133,334	137,512	142,078	147,548	155,361	162,016	167,936	174,996	179,912	190,330	194,490
135	87,383	89,857	96,432	99,736	104,729	109,156	114,416	121,012	125,924	130,226	134,334	138,528	143,110	148,599	156,440	163,116	169,056	176,138	181,069	191,519	195,691
136	88,183	90,669	97,275	100,595	105,609	110,056	115,338	121,961	126,892	131,210	135,334	139,543	144,142	149,651	157,518	164,216	170,175	177,280	182,226	192,706	196,890
137	88,984	91,483	98,119	101,454	106,491	110,956	116,261	122,910	127,860	132,195	136,334	140,559	145,174	150,702	158,595	165,316	171,294	178,420	183,382	193,893	198,089
138	89,786	92,297	98,964	102,314	107,372	111,857	117,183	123,859	128,829	133,180	137,334	141,574	146,206	151,753	159,673	166,415	172,412	179,561	184,537	195,080	199,288
139	90,589	93,111	99,809	103,174	108,254	112,758	118,106	124,809	129,797	134,164	138,334	142,589	147,237	152,803	160,750	167,514	173,530	180,701	185,692	196,265	200,485
140	91,393	93,926	100,655	104,035	109,137	113,659	119,029	125,758	130,766	135,149	139,334	143,694	148,269	153,854	161,827	168,613	174,648	181,840	186,846	197,450	201,682
141	92,197	94,742	101,502	104,896	110,020	114,561	119,953	126,708	131,734	136,134	140,334	144,619	149,300	154,904	162,904	169,711	175,765	182,979	188,000	198,634	202,878
142	93,001	95,559	102,349	105,757	110,903	115,463	120,876	127,658	132,703	137,119	141,334	145,635	150,331	155,954	163,980	170,809	176,881	184,117	189,153	199,818	204,073
143	93,807	96,376	103,196	106,620	111,787	116,366	121,800	128,608	133,672	138,104	142,334	146,650	151,362	157,004	165,056	171,907	177,998	185,255	190,306	201,001	205,268
144	94,613	97,194	104,044	107,482	112,671	117,268	122,724	129,558	134,641	139,089	143,334	147,665	152,393	158,054	166,132	173,004	179,114	186,393	191,458	202,183	206,462
145	95,420	98,012	104,892	108,345	113,556	118,171	123,649	130,508	135,610	140,074	144,334	148,680	153,424	159,104	167,207	174,101	180,229	187,530	192,610	203,365	207,656
146	96,227	98,832	105,741	109,209	114,441	119,075	124,574	131,459	136,579	141,059	145,334	149,694	154,455	160,153	168,283	175,198	181,344	188,666	193,761	204,546	208,848
147	97,035	99,651	106,591	110,073	115,326	119,979	125,499	132,409	137,548	142,044	146,334	150,709	155,486	161,202	169,358	176,294	182,459	189,802	194,911	205,726	210,040
148	97,844	100,472	107,441	110,937	116,212	120,883	126,424	133,360	138,518	143,029	147,334	151,724	156,516	162,251	170,432	177,390	183,573	190,938	196,061	206,906	211,232
149	98,654	101,293	108,292	111,802	117,098	121,787	127,349	134,311	139,487	144,015	148,334	152,739	157,547	163,300	171,507	178,485	184,687	192,073	197,211	208,085	212,422
150	99,464	102,114	109,143	112,668	117,985	122,692	128,275	135,263	140,457	145,000	149,334	153,753	158,577	164,349	172,581	179,581	185,800	193,207	198,360	209,264	213,613

Limites de signification de la distribution du χ^2* $\nu = 151\text{–}200$

* $\int_\alpha$ = intégrale entre χ^2 et l'infini (1 $\int_\alpha = 2\alpha$, ½ $\int_\alpha = \alpha$ pour le test du χ^2); $\int_\beta$ = intégrale entre zéro et χ^2

$\int_\alpha$ 1	0,99950	0,9990	0,9950	0,990	0,9750	0,950	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,0250	0,010	0,0050	0,0010	0,00050
$\int_\alpha$ ½	0,49975	0,4995	0,4975	0,495	0,4875	0,475	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,0125	0,005	0,0025	0,0005	0,00025
$\int_\beta$ 1	0,00050	0,0010	0,0050	0,010	0,0250	0,050	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,950	0,9750	0,990	0,9950	0,9990	0,99950
$\int_\beta$ ½	0,00025	0,0005	0,0025	0,005	0,0125	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,475	0,4875	0,495	0,4975	0,4995	0,49975
ν																					
151	100,274	102,936	109,994	113,534	118,872	123,597	129,201	136,214	141,427	145,985	150,334	154,768	159,608	165,398	173,655	180,676	186,913	194,342	199,508	210,442	214,892
152	101,086	103,759	110,846	114,400	119,759	124,502	130,127	137,165	142,396	146,971	151,334	155,783	160,638	166,446	174,729	181,770	188,026	195,475	200,656	211,619	215,991
153	101,898	104,582	111,699	115,267	120,646	125,408	131,054	138,117	143,366	147,956	152,334	156,797	161,668	167,495	175,803	182,865	189,139	196,609	201,804	212,796	217,179
154	102,710	105,406	112,552	116,134	121,535	126,314	131,980	139,069	144,336	148,942	153,334	157,812	162,698	168,543	176,876	183,959	190,251	197,742	202,951	213,973	218,367
155	103,523	106,230	113,405	117,001	122,423	127,220	132,907	140,021	145,306	149,927	154,334	158,826	163,728	169,591	177,949	185,052	191,362	198,874	204,098	215,148	219,554
156	104,337	107,055	114,259	117,870	123,312	128,127	133,835	140,973	146,277	150,913	155,334	159,841	164,758	170,639	179,022	186,146	192,471	200,006	205,244	216,323	220,740
157	105,151	107,881	115,114	118,738	124,201	129,034	134,762	141,925	147,247	151,898	156,334	160,855	165,787	171,686	180,094	187,239	193,584	201,138	206,389	217,498	221,926
158	105,966	108,707	115,968	119,607	125,090	129,941	135,690	142,878	148,217	152,884	157,334	161,869	166,817	172,734	181,167	188,332	194,695	202,269	207,535	218,672	223,111
159	106,782	109,534	116,824	120,476	125,980	130,848	136,618	143,831	149,188	153,870	158,334	162,883	167,847	173,781	182,239	189,424	195,805	203,400	208,679	219,845	224,296
160	107,598	110,361	117,680	121,346	126,870	131,756	137,546	144,783	150,158	154,856	159,334	163,898	168,876	174,828	183,311	190,516	196,915	204,530	209,824	221,018	225,480
161	108,415	111,189	118,536	122,216	127,761	132,664	138,474	145,736	151,129	155,841	160,334	164,912	169,905	175,875	184,382	191,608	198,025	205,660	210,967	222,191	226,663
162	109,232	112,017	119,393	123,086	128,651	133,573	139,403	146,689	152,100	156,827	161,334	165,926	170,935	176,922	185,454	192,700	199,134	206,789	212,111	223,363	227,846
163	110,050	112,846	120,250	123,957	129,543	134,481	140,331	147,643	153,070	157,813	162,334	166,940	171,964	177,969	186,525	193,791	200,243	207,919	213,254	224,534	[illegible]
164	110,868	113,675	121,107	124,829	130,434	135,390	141,260	148,596	154,041	158,799	163,334	167,954	172,993	179,016	187,596	194,883	201,351	209,047	214,396	225,705	[illegible]
165	111,687	114,505	121,965	125,700	131,326	136,299	142,190	149,549	155,012	159,785	164,334	168,968	174,022	180,062	188,667	195,973	202,459	210,176	215,538	226,875	231,392
166	112,506	115,335	122,824	126,572	132,218	137,209	143,119	150,503	155,984	160,771	165,334	169,982	175,051	181,109	189,737	197,064	203,567	211,304	216,680	228,045	232,573
167	113,326	116,166	123,683	127,445	133,111	138,118	144,049	151,457	156,955	161,757	166,334	170,996	176,079	182,155	190,808	198,154	204,675	212,431	217,821	229,214	233,753
168	114,147	116,998	124,542	128,318	134,003	139,028	144,979	152,411	157,926	162,743	167,331	172,010	177,108	183,201	191,878	199,244	205,782	213,558	218,962	230,383	234,932
169	114,968	117,829	125,401	129,191	134,897	139,939	145,909	153,365	158,897	163,729	168,334	173,024	178,137	184,247	192,948	200,334	206,889	214,685	220,102	231,551	236,111
170	115,790	118,662	126,262	130,065	135,790	140,849	146,839	154,319	159,869	164,716	169,334	174,037	179,165	185,293	194,017	201,423	207,995	215,812	221,242	232,719	237,290
171	116,612	119,495	127,122	130,939	136,684	141,760	147,769	155,273	160,840	165,702	170,334	175,051	180,194	186,338	195,087	202,513	209,102	216,938	222,382	233,886	238,468
172	117,434	120,328	127,983	131,813	137,578	142,671	148,700	156,228	161,812	166,688	171,334	176,065	181,222	187,384	196,156	203,601	210,208	218,063	223,521	235,053	239,646
173	118,257	121,162	128,844	132,688	138,472	143,582	149,631	157,182	162,784	167,675	172,334	177,079	182,250	188,429	197,225	204,690	211,313	219,189	224,660	236,219	240,823
174	119,081	121,996	129,706	133,563	139,367	144,494	150,562	158,137	163,755	168,661	173,334	178,092	183,279	189,475	198,294	205,779	212,419	220,314	225,798	237,385	241,999
175	119,905	122,831	130,568	134,438	140,262	145,406	151,493	159,092	164,727	169,647	174,334	179,106	184,307	190,520	199,363	206,867	213,524	221,438	226,936	238,550	243,175
176	120,730	123,666	131,431	135,314	141,157	146,318	152,425	160,047	165,699	170,634	175,334	180,119	185,335	191,565	200,432	207,955	214,628	222,562	228,073	239,715	244,351
177	121,555	124,502	132,294	136,190	142,053	147,230	153,356	161,002	166,671	171,620	176,334	181,133	186,363	192,610	201,500	209,042	215,733	223,686	229,210	240,880	245,526
178	122,381	125,338	133,157	137,067	142,949	148,143	154,288	161,957	167,643	172,607	177,334	182,146	187,391	193,654	202,568	210,130	216,837	224,810	230,347	242,043	246,700
179	123,207	126,175	134,021	137,943	143,845	149,056	155,220	162,913	168,616	173,593	178,334	183,160	188,418	194,699	203,636	211,217	217,941	225,933	231,484	243,207	247,874
180	124,033	127,012	134,885	138,821	144,741	149,969	156,153	163,868	169,588	174,580	179,334	184,173	189,446	195,743	204,704	212,304	219,044	227,056	232,620	244,370	249,048
181	124,860	127,849	135,749	139,698	145,638	150,882	157,085	164,824	170,560	175,567	180,334	185,187	190,474	196,788	205,771	213,391	220,148	228,178	233,755	245,533	250,221
182	125,688	128,687	136,614	140,576	146,535	151,796	158,018	165,780	171,533	176,553	181,334	186,200	191,501	197,832	206,839	214,477	221,250	229,301	234,890	246,695	251,393
183	126,516	129,526	137,479	141,454	147,432	152,709	158,950	166,735	172,505	177,540	182,334	187,213	192,529	198,876	207,906	215,563	222,353	230,423	236,025	247,856	252,565
184	127,344	130,364	138,345	142,333	148,330	153,624	159,883	167,691	173,478	178,527	183,334	188,226	193,556	199,920	208,973	216,649	223,456	231,544	237,160	249,018	253,737
185	128,173	131,204	139,211	143,211	149,228	154,538	160,817	168,647	174,450	179,513	184,334	189,240	194,584	200,964	210,049	217,735	224,558	232,665	238,294	250,178	254,908
186	129,003	132,043	140,077	144,091	150,126	155,452	161,750	169,604	175,423	180,500	185,334	190,253	195,611	202,008	211,106	218,820	225,660	233,786	239,428	251,339	256,079
187	129,833	132,884	140,944	144,970	151,025	156,367	162,684	170,560	176,396	181,487	186,334	191,266	196,638	203,052	212,173	219,906	226,761	234,907	240,561	252,499	257,249
188	130,663	133,724	141,811	145,850	151,923	157,282	163,617	171,517	177,369	182,474	187,334	192,279	197,665	204,095	213,239	220,991	227,862	236,027	241,694	253,658	258,419
189	131,494	134,565	142,678	146,730	152,822	158,197	164,551	172,473	178,342	183,461	188,334	193,292	198,692	205,139	214,305	222,076	228,964	237,147	242,827	254,817	259,588
190	132,325	135,407	143,546	147,611	153,721	159,113	165,485	173,430	179,315	184,448	189,334	194,305	199,719	206,182	215,371	223,160	230,064	238,266	243,959	255,976	260,757
191	133,157	136,248	144,414	148,491	154,621	160,028	166,419	174,387	180,288	185,435	190,334	195,318	200,746	207,225	216,437	224,245	231,165	239,385	245,091	257,134	261,925
192	133,989	137,091	145,282	149,372	155,521	160,944	167,354	175,343	181,261	186,422	191,334	196,331	201,773	208,268	217,502	225,329	232,265	240,504	246,223	258,292	263,093
193	134,821	137,933	146,151	150,254	156,421	161,860	168,288	176,301	182,234	187,409	192,334	197,344	202,800	209,311	218,568	226,413	233,365	241,623	247,354	259,449	264,261
194	135,654	138,776	147,020	151,136	157,321	162,776	169,223	177,258	183,207	188,396	193,334	198,357	203,827	210,354	219,633	227,496	234,465	242,741	248,485	260,606	265,428
195	136,488	139,620	147,889	152,018	158,222	163,693	170,158	178,215	184,181	189,383	194,334	199,370	204,853	211,397	220,698	228,580	235,564	243,859	249,616	261,763	266,595
196	137,322	140,464	148,759	152,900	159,122	164,610	171,093	179,172	185,154	190,370	195,334	200,383	205,880	212,439	221,763	229,663	236,663	244,977	250,746	262,919	267,761
197	138,156	141,308	149,629	153,783	160,023	165,527	172,029	180,130	186,128	191,358	196,334	201,395	206,906	213,482	222,828	230,746	237,762	246,095	251,876	264,075	268,927
198	138,990	142,153	150,499	154,665	160,925	166,444	172,964	181,087	187,101	192,345	197,334	202,408	207,933	214,524	223,892	231,829	238,861	247,212	253,006	265,230	270,092
199	139,826	142,998	151,370	155,549	161,826	167,361	173,900	182,045	188,075	193,332	198,334	203,421	208,959	215,567	224,957	232,912	239,960	248,328	254,135	266,385	271,257
200	140,661	143,843	152,241	156,432	162,728	168,279	174,835	183,003	189,049	194,319	199,334	204,434	209,985	216,609	226,021	233,994	241,058	249,445	255,264	267,540	272,422