Teoria quântica do laser: o micromaser

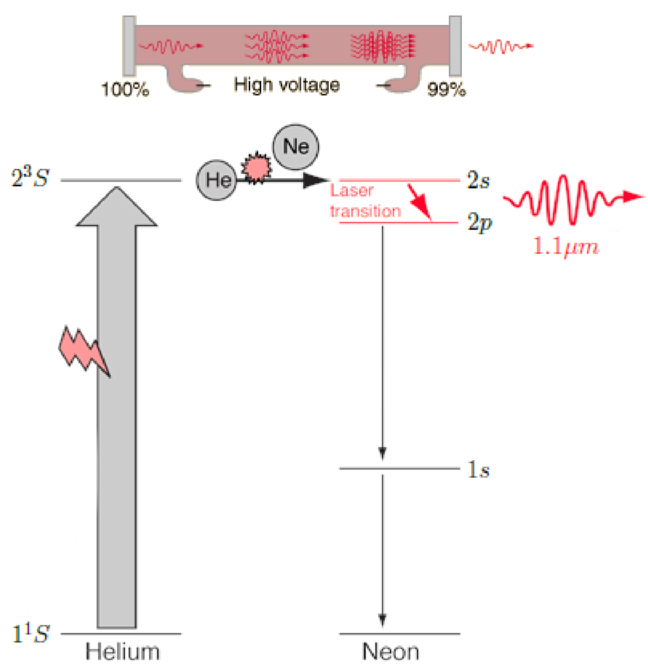
Luís Felipe Alves da Silva*

1 Laser e o micromaser

O laser é um dispositivo de amplificação ondas eletromagnéticas que, por meio do processo de emissão estimulada, produz luz altamente coerente de (aproximadamente) uma única cor. Este dispositivo envolve um campo eletromagnético em ressonância com 2 níveis $|a\rangle$ e $|b\rangle$ (*lasing levels*) de um conjunto átomos com inversão de população, isto é, número de átomo no estado mais excitado $|a\rangle$ é maior do que no nível menos excitado $|b\rangle$. A inversão de população do conjunto de átomos (denominado meio ativo) não ocorre no equilibrio e deve ser alcançada por meios artificiais (processo de bombeio ou *pumping*).

O funcionamento básico do laser pode ser entendido olhando para um laser típico de He-Ne (Figura 1). A principal fonte no laser He-Ne são os elétrons acelerados por uma descarga elétrica, que colidem com átomos de He e os excitam para vários estados. O estado fundamental é o estado singleto 1^1S (para-hélio). Muitos átomos de He acabam no estado excitado 2^3S (ortohélio), que é um estado metaestável (longo tempo de vida) porque a transição direta para o estado fundamental é proibida. Os *lasing levels* $|a\rangle$ e $|b\rangle$ do Ne, entre os quais ocorre a ação do laser, são $2s$ e $2p$. O nível $2s$ fica apenas ligeiramente abaixo do nível 2^3S do He, de modo que o processo de bombeamento para inversão de população ($N_a > N_b$) ocorre por colisões entre átomos de He excitados e átomos de Ne no estado

Figura 1: Laser He-Ne



*email: silvaluis@usp.br

fundamental, havendo uma transferência ressonante da excitação de He para Ne — o pequeno excesso é absorvido pela energia cinética. Os átomos de He são responsáveis pelo processo de bombeio e os átomos de Ne constituem o meio ativo.

A transição laser $2s \to 2p$ de um átomo Ne gera um fóton no regime infravermelha ($1.1\mu m$) que, por sua vez, provoca nos outros átomos Ne excitados uma reação em cadeia (amplificação) de emissão de fótons em fase (coerente) e de mesmo comprimento de onda (única cor). A cavidade consiste de um espelho altamente refletor em uma extremidade contendo os átomos de He e Ne e um espelho de saída com transmissão de aproximadamente 1%, permitindo a saída da luz laser. Enquanto o estado $|a\rangle$ tem um tempo de vida longo ($10^{-7}s$), permitindo que a emissão estimulada supere a emissão espontânea, o estado $|b\rangle$ tem um tempo de vida muito curto ($\sim 10^{-8}$), impedindo que o átomo de Ne reabsorva algum fóton da luz laser, o que afetaria a eficiência do dispositivo. Um mecanismo semelhante é responsável pela linha vermelha amplamente utilizada $632.8nm$.

O modelo Jaynes-Cummings foi inicialmente proposto como uma idealização do laser [1], sendo responsável pela emissão estimulada dos *lasing levels*. O hamiltoniano de Jaynes-Cummings descreve um único átomo (ou um átomo de cada vez) interagindo com um modo do campo eletromagnético, enquanto que no laser os átomos interagem coletivamente com o campo. No entanto, esse modelo pode descrever precisamente o funcionamento de um sistema laser quando consideramos interações sucessivas introduzindo os átomos um a um na cavidade. Esse dispositivo é conhecido como micromaser, pois é efetivamente implementado no domínio das micro-ondas. Neste texto, abordaremos a teoria quântica do laser como uma teoria de micromaser.

Aqui vamos assumir uma generalização não-hermitiana do modelo de Jaynes-Cummings,

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g\left(\alpha a\sigma_+ + \beta a^\dagger \sigma_-\right), \tag{1}$$

onde ω_0 é a frequência atômica, ω é a frequência do modo. A perda de excitação do átomo aparece como uma ganho assimétrico da excitação do campo e vice-versa, caracterizados pelos parâmetros reais α e β. Não nos preocuparemos com a implementação experimental desse hamiltoniano. O modelo hermitiano pode ser recuperado fazendo $\alpha = \beta = 1$.

2 Evolução temporal unitária

2.1 $\mathcal{PT}$-simetria e pseudo-hermiticidade

Os hamiltonianos não-hermitianos foram introduzidos na mecânica quântica de forma heurística e fenomenológica por muito tempo. Por exemplo, um estado $e^{-iH_0t}|\psi\rangle$ com um tempo de vida finito pode ser descrito adicionando um termo anti-hermitiano $-i\Gamma$ (com autovalor puramente imaginário) para gerar um decaimento do tipo $e^{-\Gamma t}$: $e^{-i(H_0 - i\Gamma)t}|\psi\rangle =$

$e^{-\Gamma t}\left(e^{-iH_0 t}|\psi\rangle\right)$. No entanto, desde o trabalho seminal de C. Bender e S. Boettcher [3], sabemos que hamiltonianos exibindo simetria $\mathcal{PT}$ (paridade+reversão temporal), como na Eq.(1), possuem espectros reais de autovalores e uma evolução temporal unitária (conservação da norma). Os hamiltonianos $\mathcal{PT}$-simétricos, na verdade, são compreendidos num cenário mais amplo denominado pseudo-hermiticidade [4]: um hamiltoniano H é dito pseudo-hermitiano se existir um operador hermitiano (positivo-definido) Θ tal que $\Theta H = H^\dagger\Theta$. A pseudo-hermiticidade deve vir acompanhada por uma modificação do produto interno do espaço de Hilbert: o produto entre dois estados $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ é $\langle\phi_1|\phi_2\rangle_\Theta := \langle\phi_1|\Theta|\phi_2\rangle$ ao invés de $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$. Por isso, Θ é denominado operador métrico.

O hamiltoniano de Jaynes-Cummings generalizado que propomos aqui Eq.(1) é pseudo-hermitiano com relação ao operador métrico

$$\Theta = \mathbb{1}_{\text{campo}} \otimes e^{\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sigma_z}, \tag{2}$$

pois satisfaz a relação de pseudo-hermiticidade $\Theta H = H^\dagger\Theta$. Dessa forma, os *lasing leves* $|a\rangle$ e $|b\rangle$ normalizados em relação a essa métrica são

$$|a\rangle = e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |b\rangle = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

No limite hermitiano ($\alpha = \beta = 1$), a métrica reduz-se ao operador identidade $\mathbb{1}_{\text{campo}} \otimes \mathbb{1}_{\text{atom}}$ e a normalização igual a 1.

2.2 Operador de evolução temporal

É conveniente separar este hamiltoniano em duas partes $H = H_0 + V$ com

$$H_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a \tag{4}$$

$$V = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \hbar g\left(\alpha a\sigma_+ + \beta a^\dagger\sigma_-\right) \tag{5}$$

onde $\Delta = \omega - \Omega$ é a dessintonia átomo-campo. Dessa forma, como $[H_0, V] = 0$, a representação de interação do hamiltoniano de JC é dada por V. A partir da representação matricial dos operadores de Pauli, podemos escrever o operador de evolução temporal

$$U(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}V\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau)^n}{n!}V^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau)^n}{n!}\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & \alpha g a\\ \beta g a^\dagger & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}^n \tag{6}$$

onde τ é o tempo de passagem de cada átomo pela cavidade. Podemos calcular V^2 facilmente para obter

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & \alpha g a\\ \beta g a^\dagger & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}^{2m} = \begin{bmatrix}\left(\varphi + \alpha\beta g^2\right)^m & 0\\ 0 & \varphi^m\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\Delta}{2} & \alpha g a \\ \beta g a^{\dagger} & -\frac{\Delta}{2} \end{array}\right]^{2m+1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\Delta}{2}\left(\varphi+\alpha\beta g^2\right)^m & \alpha g\left(\varphi+\alpha\beta g^2\right)^m a \\ \beta g \varphi^m a^{\dagger} & -\frac{\Delta}{2}\varphi^m \end{array}\right] \tag{8}$$

onde $\varphi = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \alpha\beta g^2 a^{\dagger} a$. Dessa forma, a Eq.(6) resulta em

$$U(\tau) = \left[\begin{array}{cc} \cos\left(\tau\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}\right) - \frac{i\Delta\sin\left(\tau\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}\right)}{2\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}} & -i\alpha g\frac{\sin\left(\tau\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}\right)}{\sqrt{\varphi+g^2}}a \\ i\beta g a^{\dagger}\frac{\sin\left(\tau\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}\right)}{\sqrt{\varphi+\alpha\beta g^2}} & \cos\left(\tau\sqrt{\varphi}\right) + \frac{i\Delta\sin\left(\tau\sqrt{\varphi}\right)}{2\sqrt{\varphi}} \end{array}\right]. \tag{9}$$

O operador densidade átomo-campo após a passagem do 1º átomo pela cavidade é $\rho_{\mathrm{ac}}(\tau) = U(\tau)\rho_{\mathrm{ac}}U^{-1}(\tau)$, que é a solução formal da equação de Liouville para hamiltonianos pseudo-hermitianos[1]

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = \left[H(t), \rho(t)\right]. \tag{10}$$

Vamos supor que o átomo adentrou a cavidade no estado excitado independente do campo de modo que

$$\rho_{ac}(0) = \rho(0)\otimes|a\rangle\langle a|\,\Theta = \rho(0)\otimes\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \tag{11}$$

onde $\rho(0)$ (sem índice) é o operador densidade do campo. Os lasing levels $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são normalizados em relação a nova métrica: $\langle a|a\rangle_{\Theta} = \langle b|b\rangle_{\Theta} = 1$. Após a passagem do átomo, o operador densidade do sistema átomo-campo é $\rho_{ac}(\tau) = U(\tau)\rho(0)\otimes\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)U^{-1}(\tau)$.

3 Equação mestra: o banho de átomos

Como estamos interessados apenas campo da cavidade (que produz o laser), então podemos traçar os graus de liberdade do átomo para obter o operador densidade do campo após a passagem do primeiro átomo

$$\rho(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{at}}\left(\rho_{ac}(\tau)\right) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{at}}\left[U(\tau)\rho(0)\otimes\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)U^{-1}(\tau)\right]. \tag{12}$$

[1]Para mostrar que a equação de Liouville vale tanto para hamiltoniano hermitianos quanto para pseudo-hermitianos, devemos definir o operador densidade como $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\chi(t)|$ onde $|\chi(t)\rangle = \Theta|\psi(t)\rangle$ é a solução da Eq. de Schrödinger para $H^{\dagger}(t)$. Dessa forma, usando a relação de pseudo-Hermiticidade $H^{\dagger}\Theta = \Theta H$, obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} &= \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)|\,\Theta + |\psi(t)\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\right)\Theta \\ &= H(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\,\Theta + |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\,H^{\dagger}(t)\Theta \\ &= \left[H(t), \rho(t)\right]. \end{aligned}$$

O traço parcial deve levar em conta a nova métrica $\mathrm{Tr}_{\mathrm{at}}\rho_{ac}(\tau) = \langle a\,|\Theta\,\rho_{ac}(\tau)|\,a\rangle + \langle b\,|\Theta\,\rho_{ac}(\tau)|\,b\rangle$. Usando a Eq.(9) para calcular $\rho(\tau)$ a partir da equação acima, obtemos

$$\rho(\tau) = \left[\cos(\lambda\tau) + i\Delta\frac{\sin(\lambda\tau)}{2\lambda}\right]\rho(0)\left[\cos(\lambda\tau) - i\Delta\frac{\sin(\lambda\tau)}{2\lambda}\right] + \alpha\beta g^2 a^\dagger \frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}\rho(0)\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}a \tag{13}$$

onde definimos o operador $\lambda = \sqrt{\varphi + \alpha\beta g^2}$ para facilitar a notação. A equação acima pode ser reescrita definindo um superoperador $M(\tau)$ tal que $\rho(\tau) = M(\tau)\rho(0)$.

3.1 Inserindo os efeitos da emissão espontânea

Uma situação mais realística pode ser alcançada levando em conta a probabilidade do átomo adentrar na cavidade no estado $|a\rangle$ e decair por emissão espontânea, descrito por uma distribuição de probabilidade (normalizada) $P(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau}$, onde γ é a constante de decaimento. Dessa forma, a mudança média no operador densidade do campo é dada por

$$\rho(\tau) = \int_0^\tau d\tau'\, P(\tau')M(\tau')\rho(0) \equiv \mathcal{M}(\tau)\rho(0). \tag{14}$$

Após o segundo átomo excitado passar, o campo ficará no estado $\rho(2\tau) = \mathcal{M}^2(\tau)\rho(0)$. Quando o k-ésimo átomo passar pela cavidade, num tempo $t = k\tau$, o operador densidade do campo será

$$\rho(t) = \mathcal{M}^k(\tau)\rho(0) \tag{15}$$

onde $\mathcal{M}(\tau)$´é um superoperador definido na Eq.(14).

3.2 Estatística de bombeio (*Pumping*)

É claro que nem todos os átomos estarão excitados. Para levar em conta a estatística de injeção dos átomos excitados, vamos supor que, antes de passar pela cavidade, o feixe de átomos atravessa uma região de excitação de modo que cada átomo tem a probabilidade p de ser excitado. Se durante um intervalo de tempo t, $K = Rt$ átomos passam pela região de excitação (R sendo a taxa de injeção atômica), então a probabilidade de k átomos serem excitados é dado pela distribuição de Bernoulli (passeio aleatório)

$$P(k,K) = \binom{K}{k} p^k\,(1-p)^{K-k}.$$

Neste caso, o número médio de átomos excitados e sua variância são $\bar{k} = pK$ e $\Delta\bar{k}^2 = (1-p)\,\bar{k}$. Agora, o operador densidade do campo é reescrito na forma

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k} p^k \left(1-p\right)^{K-k} \mathcal{M}^k(\tau)\rho(0). \tag{16}$$

Podemos ainda utilizar o teorema binomial para escrever

$$\rho(t) = \left[1 + p\left(\mathcal{M}(\tau) - 1\right)\right]^K \rho(0). \tag{17}$$

A derivada temporal da equação acima $[\frac{d}{dt}\Lambda^K = \frac{dK}{dt}\Lambda^k \ln\Lambda]$ resulta em um equação mestra generalizada para a cavidade

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{r}{p} \ln\left[1 + p\left(\mathcal{M}(\tau) - 1\right)\right]\rho(t), \tag{18}$$

onde $r \equiv Rp$ é a taxa de injeção média de átomo excitados.

3.3 Inserindo os efeitos dissipativos da cavidade

Para melhorar ainda mais a nossa abordagem, desde o início deveríamos ter considerado uma interação da cavidade com um reservatório à temperatura nula. Dessa forma, um termo adicional surge na equação acima para descrever os efeitos dissipativos da cavidade

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{r}{p} \ln\left[1 + p\left(\mathcal{M}(\tau) - 1\right)\right]\rho(t) + \frac{C}{2}\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) \tag{19}$$

onde C é o fator de perda. Esta é a equação mestra generalizada da teoria do micromaser.

4 Laser de Scully-Lamb

A equação mestra do laser Eq.(19) é complicada e, para tratá-la, é usual assumir algum regime aproximativo. Aqui vamos considerar o caso de bombeio randômico em que a probabilidade do átomo ser excitado é muito pequena ($p \to 0$), mas compensada por uma taxa de bombeio muito grande $R \to \infty$ de modo que $r = Rp$ seja constante. Neste regime, que define o chamado laser de Scully-Lamb [5], a distribuição de Bernoulli coincide com a distribuição Poissoniana e a equação mestra (19) reduz-se a

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = r\left[\mathcal{M}(\tau) - 1\right]\rho(t) + \frac{C}{2}\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right). \tag{20}$$

A partir da definição do superoperador $\mathcal{M}(\tau)$, Eq. (14), a equação mestra pode ser reescrita como

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -r\rho(t) + r\int_0^{t\to\infty} d\tau'\, \gamma e^{-\gamma\tau'} M(\tau')\rho(t) + \frac{C}{2}\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right), \tag{21}$$

onde trocamos o limite superior da integral por ∞, pois a escala de tempo t (depois que muitos átomos passaram pela cavidade) é muito maior do que a escala de tempo τ (do integrando) em que um único átomo passa. Por fim, da Eq. (13), obtemos a forma explicita da equação mestra reescrevendo a equação acima

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(t)}{dt} &= -r\rho(t) + r\int_0^{\infty} d\tau\, \gamma e^{-\gamma\tau} \left[\cos(\lambda\tau) + i\Delta\frac{\sin(\lambda\tau)}{2\lambda}\right]\rho(t)\left[\cos(\lambda\tau) - i\Delta\frac{\sin(\lambda\tau)}{2\lambda}\right] \\ &+ \alpha\beta g^2 r\int_0^{\infty} d\tau\, \gamma e^{-\gamma\tau} a^\dagger\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}\rho(t)\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}a + \frac{C}{2}\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right). \end{aligned} \tag{22}$$

4.1 Estatística de fótons (solução ressonante $\Delta = 0$)

No caso em que o campo é exatamente ressonante com os *lasing levels* ($\Delta = 0$), temos $\lambda = \sqrt{\alpha\beta}g\sqrt{1+a^\dagger a}$. A equação mestra do laser de Scully-Lamb Eq.(22) pode ser reescrita em termos dos elementos de matriz $p_{m,n}(t) = \langle m\,|\rho(t)|\,n\rangle$ do operador densidade $\rho(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{p}_{m,n} &= -rp_{m,n} + r\left[\int_0^{\infty} d\tau\, \gamma e^{-\gamma\tau}\cos\left(\sqrt{\alpha\beta}g\tau\sqrt{1+m}\right)\cos\left(\sqrt{\alpha\beta}g\tau\sqrt{1+n}\right)\right]p_{m,n} \\ &+ r\left[\int_0^{\infty} d\tau\, \gamma e^{-\gamma\tau}\sin\left(\sqrt{\alpha\beta}g\tau\sqrt{m}\right)\sin\left(\sqrt{\alpha\beta}g\tau\sqrt{n}\right)\right]p_{m-1,n-1} \\ &+ C\sqrt{(m+1)(n+1)}p_{m+1,n+1} - \frac{m+n}{2}p_{m,n}. \end{aligned} \tag{23}$$

As integrais podem ser calculadas usando

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x}\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(a-b)^2} + \frac{1}{1+(a+b)^2}\right] \tag{24}$$

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x}\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(a-b)^2} - \frac{1}{1+(a+b)^2}\right], \tag{25}$$

de modo que

$$\dot{p}_{mn} = \frac{\mathcal{N}'_{mn}\mathcal{A}}{1+\mathcal{N}_{mn}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}p_{mn} + \frac{\sqrt{mn}\mathcal{A}}{1+\mathcal{N}_{m-1,n-1}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}p_{m-1,n-1} + C\sqrt{(m+1)(n+1)}p_{m+1,n+1} - C\frac{m+n}{2}p_{m,n}, \tag{26}$$

onde introduzimos o coeficiente de ganho

$$\mathcal{A} = \frac{2r\alpha\beta g^2}{\gamma}, \tag{27}$$

o coeficiente de saturação

$$\mathcal{B} = \frac{4\alpha\beta g^2}{\gamma^2}\mathcal{A} \tag{28}$$

e os fatores adimensionais

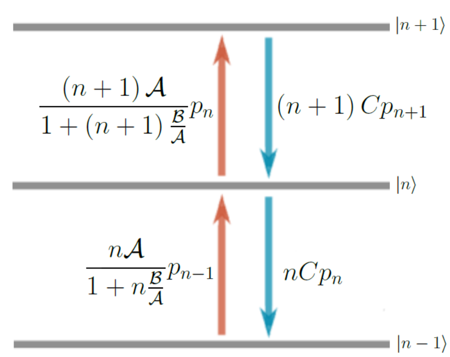
$$\mathcal{N}_{m,n} = \frac{m+n+2}{2} + \frac{1}{8}\frac{(m-n)^2\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \tag{29}$$

$$\mathcal{N}'_{m,n} = \frac{m+n+2}{2} + \frac{1}{16}\frac{(m-n)^2\mathcal{B}}{\mathcal{A}}. \tag{30}$$

Em particular, os elementos diagonais $p_{n,n} := p_n$, que representam a probabilidade de encontrar n fótons no campo, satisfazem a seguinte equação

$$\dot{p}_n = -\frac{(n+1)\mathcal{A}}{1+(n+1)\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}p_n + \frac{n\mathcal{A}}{1+n\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}p_{n-1} + (n+1)Cp_{n+1} - nCp_n. \tag{31}$$

A equação acima para a função de distribuição de fótons p_n pode ser entendida em termos de um diagrama de fluxo de probabilidade (Figura 2). O fluxo "para dentro" do estado $|n\rangle$ é identificado na equação (31) com sinal positivo e o fluxo "para fora" do estado $|n\rangle$ é identificado com sinal negativo. Por exemplo, o termo $\frac{(n+1)\mathcal{A}}{1+(n+1)\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}p_n$ representa a probabilidade da transição $|n\rangle \to |n+1\rangle$ devido a emissão estimulada do banho de átomos.



4.2 Solução estacionária (balanceamento detalhado)

A condição de balanceamento detalhado significa que a a reversibilidade microscópica em que a probabilidade de transição $|n\rangle \to |n+1\rangle$ é igual a probabilidade de transição $|n+1\rangle \to |n\rangle$,

$$p_{n+1} = \frac{\frac{\mathcal{A}}{C}}{1 + (n+1)\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}} p_n. \tag{32}$$

De mesma forma, podemos igual a probabilidade da transição $|n-1\rangle \to |n\rangle$ com a probabilidade da transição $|n\rangle \to |n-1\rangle$ e obter a equação acima. Esta relação de recorrência define uma solução estacionária p_n uma vez que ela foi obtida impondo que o fluxo positivo seja igual ao fluxo negativo na Eq.(31), isto é, $\dot{p}_n = 0$. Da equação acima, obtemos a função de distribuição de fótons

$$p_n = p_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n}{1 + \frac{k\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}. \tag{33}$$

onde p_0 é determinado pela condição de normalização.

(a) Abaixo do limiar $\mathcal{A} < C$: p_n é uma função monotonicamente decrescente de n e a condição de normalização, para $k\mathcal{B} \ll \mathcal{A}$ (contribuição pequena dos termos não-lineares), resulta em

$$\sum_n p_n \approx p_0 \sum_n \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n = \frac{p_0}{1 - \frac{\mathcal{A}}{C}} = 1 \to p_0 = 1 - \frac{\mathcal{A}}{C}. \tag{34}$$

Logo, a função de distribuição de fótons torna-se

$$p_n \approx \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{C}\right)\left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n. \tag{35}$$

Definindo uma temperatura efetiva T tal que $\frac{\mathcal{A}}{C} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$, p_n reduz-se a distribuição de Bose-Einstein para a radiação de um corpo negro

$$p_n \approx \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} \tag{36}$$

onde o valor médio de fótons é dado por

$$\langle n\rangle = \sum_n n p_n = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_n n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \tag{37}$$

Portanto, neste regime abaixo do limiar, o laser se comporta como uma lâmpada incandescente com uma temperatura T.

(b) Acima do limiar $\mathcal{A} > C$: a equação (33) pode ser reescrita como

$$p_n = p_0 \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n \left(\frac{1}{1+\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}} \frac{1}{1+\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}}} \frac{1}{1+\frac{3\mathcal{B}}{\mathcal{A}}} \cdots \frac{1}{1+\frac{n\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}\right) = p_0 \left(\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}. \tag{38}$$

Vamos reescrever p_n em termos do número médio de fótons $\langle n \rangle$, que é dado por

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle = \sum_n n p_n &= p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right) \left(\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} \\
&= p_0 \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \\
&= \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left[\frac{\mathcal{A}}{C} - (1 - p_0)\right].
\end{aligned}$$

Quando consideramos o regime bem acima do limiar ($\mathcal{A} \gg C$) e com pouco influencia de efeitos não-lineares ($\mathcal{B} \ll \mathcal{A}$), obtemos

$$\langle n \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C} \tag{39}$$

e, portanto, a função de distribuição de fótons reduz-se a distribuição de Poisson

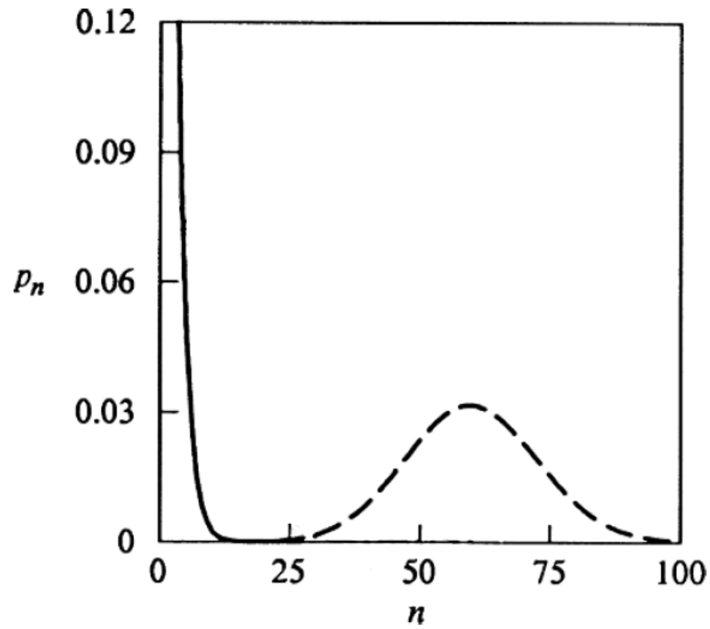
$$p_n \approx \frac{p_0 \langle n \rangle^n}{n!} = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}. \tag{40}$$

onde

$$\sum_n p_n = 1 \to p_0 = \left[\sum_n \left(\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}\right]^{-1} \approx \left[\sum_n \frac{\left(\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}\right)^n}{n!}\right]^{-1} = e^{-\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}C}}.$$

A figura 3 mostra a estatística de fótons do laser em ambos regimes (a) abaixo do limiar Eq.(36) e (b) acima do limiar Eq.(40). A luz laser deve ser considerada no regime acima do limiar, pois é neste regime que o sistema tem o mesmo comportamento de um estado coerente. Além disso, como estamos considerando um hamiltoniano não-hermitiano Eq.(1), os coeficientes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, definidos nas Eqs.(27) e (28), podem ser calibrados por graus de liberdade (α e β) que não existem no caso hermitiano ($\alpha = \beta = 1$).

Figura 2: Distribuição de fótons do campo abaixo do limiar (linha contínua) e acima do limiar (linha tracejada)



Referências

[1] E. Jaynes and F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).

[2] M. Orszag, Quantum Optics (Springer, Berlin, 1999).

[3] C. M. Bender and S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, Physical Review Letter **80**, 5243 (1998).

[4] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT-symmetry, Journal of Mathematical Physics **43**, 205 (2002).

[5] M. O. Scully and W. E. Lamb Jr., Quantum Theory of an Optical Maser. I. General Theory, Physical Review **159**, 208 (1967).