Lista de exercícios 9

Primeira questão

Mostre que

$$|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_1| = \int d^3p\, f\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2},\mathbf{p}\right)\exp\left[i\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})}{\hbar}\right].$$

Segunda questão

Mostre que

$$\left[f(\mathbf{r},\mathbf{p}),\frac{\mathbf{P}_{CM}^2}{2M}\right] = -i\hbar\frac{\mathbf{p}}{M}\cdot\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p})$$

e também que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}_{cl}(t) &\approx \frac{\hbar}{2}\left[\nabla\Omega_L(\mathbf{r}_{cl}(t))\right]\rho_{10}(t)\exp(i\omega_L t)\\ &+\frac{\hbar}{2}\left[\nabla\Omega_L^*(\mathbf{r}_{cl}(t))\right]\rho_{01}(t)\exp(-i\omega_L t).\end{aligned}$$

Terceira questão

(a) Usando

$$\Omega_L(\mathbf{r}_{cl}(t)) = \Omega_0\exp\left[-i\mathbf{k}_L\cdot\mathbf{r}_{cl}(t)\right],$$

onde

$$\mathbf{k}_L = -k_L\hat{\mathbf{z}},$$

com $k_L > 0$, e as equações obtidas na aula 23 para $\partial\rho_{mn}(t)/\partial t$, onde $m,n\in\{0,1\}$, substitua estas equações por um novo conjunto que envolva, ao invés de $\rho_{01}(t)$ e $\rho_{10}(t)$, as novas coerências definidas como:

$$\tilde{\rho}_{01}(t) \equiv \rho_{01}(t)\exp\left[-i\mathbf{k}_L\cdot\mathbf{r}_{cl}(t)\right]$$

e

$$\tilde{\rho}_{10}(t) \equiv \rho_{10}(t)\exp\left[i\mathbf{k}_L\cdot\mathbf{r}_{cl}(t)\right].$$

(b) Usando as equações obtidas no item (a) acima, mude para a representação da interação, isto é, usando $H_0\equiv\hbar\omega_{at}\sigma_{11}(0)$, e reescreva essas equações, já incluindo o coeficiente γ do decaimento, que também aparecerá.

Quarta questão

Usando os resultados da terceira questão, encontre uma equação mestra equivalente, isto é, algo que dê a derivada temporal do operador densidade reduzido do átomo, para seus graus de liberdade internos, na representação de interação.

Quinta questão

No contexto da terceira e quarta questões acima, encontre o regime estacionário, isto é, encontre as populações e coerências resultantes da imposição de que $\partial\rho_{00}(t)/\partial t = \partial\rho_{11}(t)/\partial t = \partial\tilde{\rho}_{01}(t)/\partial t = \partial\tilde{\rho}_{10}(t)/\partial t = 0$, para $m, n \in \{0, 1\}$, já considerando tudo na representação de interação. Substitua o resultado na fórmula da força "média" que o átomo "sente" e note como a força muda conforme o átomo é desacelerado ou acelerado. Qual sinal do "detuning" para desacelerar os átomos? O "detuning" é definido como

$$\Delta \equiv \omega_L - \omega_{at}.$$

Como você compensaria o efeito Doppler para manter uma desaceleração constante?

Sexta questão

Se a intensidade da frequência de Rabi variar espacialmente na região onde o átomo está, calcule a contribuição da força originada do gradiente dessa intensidade.