Primeira Questão

Demonstre que o estado coerente,

$$|\alpha\rangle \;=\; \exp\left(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,,$$

é auto-estado do operador aniquilação com autovalor complexo α.

Segunda Questão

Calcule o estado do vácuo para um oscilador harmônico na representação de posição, isto é, calcule $\psi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle$, onde $a\,|0\rangle = 0$. Dica: passe o operador de aniquilação para a representação da posição também.

Terceira Questão

Verifique que a distribuição do número de fótons em um estado coerente é poissoniana, isto é, a probabilidade de encontrar um número n de fótons se o número for medido é dada por

$$\mathscr{P}(n) \;=\; \frac{\langle N\rangle^{n}}{n!}\exp\left(-\langle N\rangle\right),$$

onde, para o estado coerente $|\alpha\rangle$ o valor esperado do operador número é dado por $\langle N\rangle = |\alpha|^2$.

Quarta Questão

Mostre que

$$\langle\beta|\alpha\rangle \;=\; \exp\left(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}-\frac{|\beta|^{2}}{2}+\beta^{*}\alpha\right)$$

para $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Quinta Questão

Mostre que, apesar de dois estados coerentes não serem ortogonais, esses estados são super completos e a relação de completeza é dada por

$$\frac{1}{\pi}\int d^{2}\alpha\;|\alpha\rangle\langle\alpha| \;=\; \mathbb{I},$$

onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade do oscilador harmônico cujos estados coerentes estamos considerando e

$$\int d^{2}\alpha \;\;\rightarrow\;\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathrm{Re}\,(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathrm{Im}\,(\alpha)\,.$$

Sexta Questão

Mostre que

$$|\langle x|\alpha\rangle|^2 \quad = \quad \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{x_0^2}\right],$$

onde

$$\langle x\rangle \quad \equiv \quad \langle\alpha|\, x \,|\alpha\rangle$$

(Nas nossas equações, sempre utilizamos a mesma notação tanto para o operador posição, x, como para seu auto-valor, x em um ket $|x\rangle$, mas cada um que use a notação que achar melhor.) e

$$x_0 \quad \equiv \quad \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$