Seja, portanto, o operador $\mathscr{A}(t)$ definido como

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(t) \equiv & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \\ & \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}\, A(t_1)\, A^{\dagger}(t_2) \ldots A(t_{2n-1})\, A^{\dagger}(t_{2n}) . \end{aligned} \tag{1}$$

Notemos, analogamente ao que dissemos acima a respeito da Eq. (2), dada por

$$U_I(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{n}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, H_I(t_1)\, H_I(t_2) \ldots H_I(t_n), \tag{2}$$

que na soma da Eq. (1) o termo com $n = 0$ nada mais é do que a identidade $\mathbb{I}_f$. Com esta definição, fica fácil vermos que também podemos escrever a expressão acima para $U_I(t)|\Psi(0)\rangle$ como

$$\begin{aligned} U_I(t)|\Psi(0)\rangle = & |1\rangle \otimes \mathscr{A}(t)|\mathrm{vac}\rangle \\ & + \frac{1}{i\hbar}|0\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_0 \int_0^{t_0} dt_1 \ldots \\ & \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}\, A^{\dagger}(t_0)\, A(t_1)\, A^{\dagger}(t_2) \ldots A(t_{2n-1})\, A^{\dagger}(t_{2n})|\mathrm{vac}\rangle , \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} U_I(t)|\Psi(0)\rangle = & |1\rangle \otimes \mathscr{A}(t)|\mathrm{vac}\rangle \\ & + \frac{1}{i\hbar}|0\rangle \otimes \int_0^t dt_0\, A^{\dagger}(t_0) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^{t_0} dt_1 \ldots \right. \\ & \left. \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}\, A(t_1)\, A^{\dagger}(t_2) \ldots A(t_{2n-1})\, A^{\dagger}(t_{2n})|\mathrm{vac}\rangle \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_I(t)|\Psi(0)\rangle = & |1\rangle \otimes \mathscr{A}(t)|\mathrm{vac}\rangle \\ & + \frac{1}{i\hbar}|0\rangle \otimes \int_0^t dt_0\, A^{\dagger}(t_0)\, \mathscr{A}(t_0)|\mathrm{vac}\rangle . \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos, portanto, desta expressão, que, depois de um intervalo de tempo t, decorrido desde o instante inicial quando o átomo estava excitado e o vácuo estava vazio, agora o estado do átomo é uma superposição, emaranhada com o estado do vácuo, envolvendo o estado excitado e o fundamental. Diga-se de passagem que este não é um auto-estado da energia do átomo, embora seja um auto-estado da energia total, que inclui a energia do átomo mais a do vácuo. Vejamos, também, incidentalmente, que o átomo, por não estar isolado de seu ambiente, já que é impossível desligar sua interação com o campo eletromagnético do vácuo, ele naturalmente se emaranha com os graus de liberdade do ambiente, que são os diversos estados de um fóton que vão resultar dessa interação. É isto o que acontece quando tentamos só olhar para parte do universo: o pedaço que estamos olhando, ou seja, o que definimos como o sistema "objetivo", é, na verdade, algo intrisecamente emaranhado com o resto do universo, mesmo que, inicialmente, estivesse fatorado, como é o caso deste nosso exemplo de emissão espontânea. Na visão quântica do mundo (ou paradigma quântico), isto é chamado de princípio da inseparabilidade.

Vamos, então, tentar calcular $\mathscr{A}(t)$ e, aí poderemos também tentar obter $\int_0^t dt_0\, A^\dagger(t_0)\, \mathscr{A}(t_0)$ que, a menos que eu me convença do contrário daqui uns minutos, acho que vai ser bem difícil de calcularmos. Mas calcular $\mathscr{A}(t)$ não é tão difícil. (Veja que estou escrevendo este texto no suspense do que vou obter para a integral envolvendo $\mathscr{A}(t)$ que é mais difícil, pois não tentei isto antes; isto é novo!)

Note que $A^\dagger(t_{2n})$ cria um fóton, mas, logo depois, $A(t_{2n-1})$ destrói esse fóton e o estado volta a ser o vácuo vazio. Sendo assim, vamos então calcular o efeito de cada par destes operadores no estado do vácuo:

$$\begin{aligned} A(t_{2n-1})\, A^\dagger(t_{2n})\, |\mathrm{vac}\rangle &= A(t_{2n-1}) \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\, |\mathrm{vac}\rangle \\ &= A(t_{2n-1}) \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] A(t_{2n-1})\, |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle\,, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} A(t_{2n-1})\, A^\dagger(t_{2n})\, |\mathrm{vac}\rangle &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] A(t_{2n-1})\, |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= -\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} i g_{\mathbf{k}',\lambda'} \exp\left[i(\omega_0-\omega_{k'})\, t_{2n-1}\right] a_{\mathbf{k}',\lambda'}\, |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle\,, \end{aligned}$$

onde, como anteriormente, tomamos o cuidado de não confundir os índices mudos das duas somas sobre os estados dos fótons. Mas veja que o único termo da soma que contém os operadores $a_{\mathbf{k}',\lambda'}$ que não aniquila o estado $|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ é aquele para o qual $(\mathbf{k}',\lambda') = (\mathbf{k},\lambda)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} A(t_{2n-1})\, A^\dagger(t_{2n})\, |\mathrm{vac}\rangle &= -\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n}\right] i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \\ &\quad \times \exp\left[i(\omega_0-\omega_k)\, t_{2n-1}\right] a_{\mathbf{k},\lambda}\, |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left|\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2 \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)(t_{2n}-t_{2n-1})\right] a_{\mathbf{k},\lambda}\, |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left|\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2 \exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)(t_{2n}-t_{2n-1})\right] |\mathrm{vac}\rangle\,. \end{aligned}$$

Como os índices da soma são mudos, podemos também escrever esta equação assim:

$$A(t_{2n-1})\, A^\dagger(t_{2n})\, |\mathrm{vac}\rangle = \sum_{\mathbf{k}_n,\lambda_n} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_n,\lambda_n}\right|^2 \exp\left[-i(\omega_0-\omega_{k_n})(t_{2n}-t_{2n-1})\right] |\mathrm{vac}\rangle\,.$$

Vemos, na Eq. (6), que define $\mathscr{A}(t)$, que temos n operadores $A(t_{2s-1})\, A^\dagger(t_{2s})$, com $s = 1, 2, 3, \ldots, n$. Sendo assim, portanto, podemos escrever:

$$\mathscr{A}(t)\, |\mathrm{vac}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \exp\left[-i(\omega_0-\omega_{k_1})(t_2-t_1)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \sum_{\mathbf{k}_2,\lambda_2} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_2,\lambda_2}\right|^2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_2}\right)\left(t_4-t_3\right)\right] \ldots \\
&\ldots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \sum_{\mathbf{k}_n,\lambda_n} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_n,\lambda_n}\right|^2 \\
&\times \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_n}\right)\left(t_{2n}-t_{2n-1}\right)\right] \left|\mathrm{vac}\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Esta é a expressão que mostra que o vácuo vazio, $\left|\mathrm{vac}\right\rangle$, é um auto-estado de $\mathscr{A}(t)$ com autovalor

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) \quad \equiv \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^{t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right] \\
&\times \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \sum_{\mathbf{k}_2,\lambda_2} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_2,\lambda_2}\right|^2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_2}\right)\left(t_4-t_3\right)\right] \ldots \\
&\ldots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \sum_{\mathbf{k}_n,\lambda_n} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_n,\lambda_n}\right|^2 \\
&\times \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_n}\right)\left(t_{2n}-t_{2n-1}\right)\right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\mathscr{A}(t) \left|\mathrm{vac}\right\rangle \quad = \quad \Lambda(t) \left|\mathrm{vac}\right\rangle . \tag{4}
$$

Também notamos que aqui, de forma análoga ao que dissemos a respeito das Eqs. (5),

$$
\begin{aligned}
U_I(t) \quad \equiv \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{n}} \int_0^{t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \, H_I(t_1) \\
& \times H_I(t_2) \ldots H_I(t_n),
\end{aligned} \tag{5}
$$

e (6),

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}(t) \quad \equiv \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^{t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \\
& \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \, A(t_1) A^{\dagger}(t_2) \ldots A(t_{2n-1}) A^{\dagger}(t_{2n}),
\end{aligned} \tag{6}
$$

o termo da soma acima com $n=0$ é simplesmente $1 \in \mathbb{R}$.

Agora, consideremos a integral dupla:

$$
\int_0^{t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right].
$$

Usando a função de Heaviside, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right] \quad = \quad & \int_0^{t} dt_1 \int_0^{t} dt_2 \theta\left(t_1-t_2\right) \\
& \times \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \theta\left(t_1-t_2\right) \\
&\quad \times \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right] \\
&= \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Mas podemos agora fazer a substituição na integral em t_1 :

$$
\tau = t_1 - t_2.
$$

Com isto, obtemos:

$$
\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right] = \int_0^t dt_2 \int_0^{t-t_2} d\tau \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\tau\right].
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \exp\left[-i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\left(t_2-t_1\right)\right] &= \\
\sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t-t_2} d\tau \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\tau\right] &= \\
\int_0^t dt_2 \int_0^{t-t_2} d\tau \sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\tau\right] &= \\
\int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right),&
\end{aligned}
$$

onde definimos

$$
\mathcal{K}(t) \equiv \int_0^t d\tau \sum_{\mathbf{k}_1,\lambda_1} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k}_1,\lambda_1}\right|^2 \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_{k_1}\right)\tau\right].
$$

Usando estes resultados, fica evidente agora que podemos escrever:

$$
\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right) \int_0^{t_2} dt_4 \mathcal{K}\left(t_2-t_4\right) \ldots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n} \mathcal{K}\left(t_{2n-2}-t_{2n}\right).
$$

Mais explicitamente,

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) &= 1 + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right) \int_0^{t_2} dt_4 \mathcal{K}\left(t_2-t_4\right) \ldots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n} \mathcal{K}\left(t_{2n-2}-t_{2n}\right).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Podemos tambem reescrever esta equação assim:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) &= 1 + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right) \\
&\quad + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_2 \mathcal{K}\left(t-t_2\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n-2}} \int_0^{t_2} dt_4 \mathcal{K}\left(t_2-t_4\right) \ldots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n} \mathcal{K}\left(t_{2n-2}-t_{2n}\right),
\end{aligned}
$$

ou ainda, trocando t_2 por t',

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t') \\ &+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{2n-2}}\int_0^{t'} dt_4\mathcal{K}(t'-t_4)\ldots\int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n}\mathcal{K}(t_{2n-2}-t_{2n}).\end{aligned}$$

Explicitando mais um termo da soma, vem:

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^{t'} dt_4\mathcal{K}(t'-t_4) \\ &+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{2n-2}}\int_0^{t'} dt_4\mathcal{K}(t'-t_4)\ldots\int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n}\mathcal{K}(t_{2n-2}-t_{2n}).\end{aligned}$$

Na soma da segunda linha desta equação, façamos $n\to n+1$, isto é,

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^{t'} dt_4\mathcal{K}(t'-t_4) \\ &+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{2n}}\int_0^{t'} dt_4\mathcal{K}(t'-t_4)\ldots\int_0^{t_{2n}} dt_{2n+2}\mathcal{K}(t_{2n}-t_{2n+2}).\end{aligned}$$

Nesta equação, agora fazemos $t_{2k}\to t_{2k-2}$ para $k=2,3,\ldots,2n+2$. O resultado fica:

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^{t'} dt_2\mathcal{K}(t'-t_2) \\ &+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{2n}}\int_0^{t'} dt_2\mathcal{K}(t'-t_2)\ldots\int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n}\mathcal{K}(t_{2n-2}-t_{2n}).\end{aligned}$$

Colocando o segundo termo em evidência, escrevemos agora:

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\left[1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^{t'} dt_2\mathcal{K}(t'-t_2)\right. \\ &\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{2n}}\int_0^{t'} dt_2\mathcal{K}(t'-t_2)\ldots\int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n}\mathcal{K}(t_{2n-2}-t_{2n})\right].\end{aligned}$$

Comparando este resultado com a Eq. (7), segue agora que

$$\Lambda(t) = 1+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt'\mathcal{K}(t-t')\Lambda(t'),$$

que é uma equação integral de Volterra do segundo tipo. A função no integrando, $\mathcal{K}(t-t')$, é chamada de "kernel" ou núcleo da equação integral. Esta equação pode ser manipulada de várias formas e pode ser resolvida, digamos, numericamente. Com algumas aproximações, pode até ser resolvida analiticamente. Mas para nossos propósitos aqui, vamos apenas supor que encontramos a função $\Lambda(t)$.

Neste ponto, de posse de $\Lambda(t)$, vamos retornar às Eqs. (3) e (4) e escrever:

$$\begin{aligned} U_I(t)|\Psi(0)\rangle &= |1\rangle\otimes\Lambda(t)|\text{vac}\rangle+\frac{1}{i\hbar}|0\rangle\otimes\int_0^t dt'\,A^\dagger(t')\Lambda(t')|\text{vac}\rangle \\ &= \Lambda(t)|1\rangle\otimes|\text{vac}\rangle+\frac{1}{i\hbar}|0\rangle\otimes\int_0^t dt'\,\Lambda(t')A^\dagger(t')|\text{vac}\rangle, \end{aligned}$$

Notemos que podemos trocar onde colocamos $\Lambda(t)$ no primeiro termo porque, sendo o autovalor do operador $\mathscr{A}(t)$, é, portanto, apenas um número e não um operador. Já sabemos que

$$\begin{aligned} A^\dagger(t')|\text{vac}\rangle &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)t'\right]a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}|\text{vac}\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)t'\right]|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos reescrever o estado acima desta maneira:

$$\begin{aligned} U_I(t)|\Psi(0)\rangle &= \Lambda(t)|1\rangle\otimes|\text{vac}\rangle+\frac{1}{i\hbar}|0\rangle\otimes\int_0^t dt'\,\Lambda(t')\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)t'\right]|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= \Lambda(t)|1\rangle\otimes|\text{vac}\rangle+\frac{1}{\hbar}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\left\{\int_0^t dt'\,\Lambda(t')\exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)t'\right]\right\}|0\rangle\otimes|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \end{aligned}$$

Definamos as amplitudes seguintes:

$$\Xi_{\mathbf{k},\lambda}(t) \equiv \frac{1}{\hbar}\hbar g_{\mathbf{k},\lambda}\int_0^t dt'\,\Lambda(t')\exp\left[-i(\omega_0-\omega_k)t'\right].$$

Estas amplitudes, uma vez que tenhamos calculado $\Lambda(t')$, também podem ser calculadas. Com esta definição, podemos escrever o estado do átomo no instante t, isto é,

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv U_I(t)|\Psi(0)\rangle,$$

assim:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \Lambda(t)|1\rangle\otimes|\text{vac}\rangle+|0\rangle\otimes\sum_{\mathbf{k},\lambda}\Xi_{\mathbf{k},\lambda}(t)|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \tag{8}$$

Da Eq. (8) vemos que a probabilidade de que o átomo ainda esteja no estado excitado depois de um tempo t é dada por:

$$P_e(t) = |\Lambda(t)|^2$$

e a de que tenha decaído é simplesmente:

$$\begin{aligned} P_g(t) &= 1-P_e(t) \\ &= 1-|\Lambda(t)|^2. \end{aligned}$$

Decaimento exponencial

Começamos com

$$\mathcal{K}(t) \equiv \int_0^t d\tau \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2 \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)\tau\right]$$

e

$$\Lambda(t) = 1 + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt' \mathcal{K}(t-t')\Lambda(t').$$

A derivada dá

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\mathcal{K}(0)\Lambda(t) + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt' \mathcal{K}'(t-t')\Lambda(t')$$

e vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(0) &= \int_0^t d\tau \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2 \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)\tau\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt' \mathcal{K}'(t-t')\Lambda(t').$$

Já tomando a drivada do kernel de memória, ficamos obtemos

$$\mathcal{K}'(t) \equiv \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar^2 \left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2 \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)t\right].$$

Então,

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = -\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\int_0^t dt' \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)(t-t')\right]\Lambda(t').$$

Podemos integrar essa equação desde t até t' e o resutado dá

$$\Lambda(t') = \Lambda(t) - \int_t^{t'} dt'' \sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\int_0^{t''} d\tau \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)(t''-\tau)\right]\Lambda(\tau).$$

Até ordem de $\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2$, podemos deixar, dentro da integral acima, só $\Lambda(t)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) \approx -\Lambda(t)\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\int_0^t dt' \exp\left[i\left(\omega_0-\omega_k\right)(t-t')\right].$$

A ser visto logo neste curso, temos a aproximação

$$\int_0^t dt' \exp\left[i\left(\omega-\omega_{at}\right)\left(t-t'\right)\right] \approx \mathscr{P}\frac{i}{\omega-\omega_{at}}+\pi\delta\left(\omega-\omega_{at}\right).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\Lambda\left(t\right) \approx -\Lambda\left(t\right)\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\left[\mathscr{P}\frac{i}{\omega_0-\omega_k}+\pi\delta\left(\omega_0-\omega_k\right)\right].$$

Assim,

$$\Lambda\left(t\right) \approx \Lambda\left(0\right)\exp\left[-i\mathscr{P}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2}{\omega_0-\omega_k}t-\pi\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\delta\left(\omega_0-\omega_k\right)t\right],$$

onde

$$\Lambda\left(0\right) = 1.$$

Assim,

$$\Lambda\left(t\right) \approx \exp\left[-i\mathscr{P}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2}{\omega_0-\omega_k}t-\pi\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\delta\left(\omega_0-\omega_k\right)t\right].$$

Agora, para a probabilidade, a fase $\exp\left[-i\mathscr{P}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2}{\omega_0-\omega_k}t\right]$ não contribui. Com isso, obtemos o decaimento exponencial esperado:

$$\left|\Lambda\left(t\right)\right|^2 \approx \exp\left[-2\pi\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left|g_{\mathbf{k},\lambda}\right|^2\delta\left(\omega_0-\omega_k\right)t\right].$$