

## Hamiltoniana de Jaynes & Cummings e a aproximação de onda girante

O próximo tópico é sobre emissão espontânea. No entanto, antes dessa discussão, é importante notarmos alguns aspectos que simplificam nossa hamiltoniana de interação. Nossa interação, Eq. (??), também pode ser reescrita com uma notação diferente, mas que explicita o vetor de onda, assim:

$$\begin{aligned} H_{int}(t) &= -\hbar\Omega_L\sigma_x \cos(\omega_L t) - \hbar\sigma_x \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left( ig_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} - ig_{\mathbf{k},\lambda}^* a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right) \\ &= -\hbar\Omega_L\sigma_x \cos(\omega_L t) - \hbar \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left( ig_{\mathbf{k},\lambda} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} - ig_{\mathbf{k},\lambda}^* \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right). \end{aligned}$$

Vamos agora olhar a conservação de energia no caso dos termos envolvendo os operadores de aniquilação e criação de fótons. Suponha que o estado do átomo seja o excitado. Então, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger (|1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle) &= \sigma_x |1\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |\text{vac}\rangle \\ &= |0\rangle \otimes |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \end{aligned}$$

Este está conservando a energia. Mas se o átomo estiver no seu estado fundamental, teremos:

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger (|0\rangle \otimes |\text{vac}\rangle) &= \sigma_x |0\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |\text{vac}\rangle \\ &= |1\rangle \otimes |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \end{aligned}$$

Agora, consideremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} (|1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle) &= \sigma_x |1\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda} |\text{vac}\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} (|0\rangle \otimes |\text{vac}\rangle) &= \sigma_x |0\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda} |\text{vac}\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

No entanto, quando já temos um fóton com momentum  $\hbar\mathbf{k}$  e polarização  $\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} (|1\rangle \otimes |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle) &= \sigma_x |1\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda} |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= |0\rangle \otimes |\text{vac}\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} (|0\rangle \otimes |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle) &= \sigma_x |0\rangle \otimes a_{\mathbf{k},\lambda} |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \\ &= |1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle. \end{aligned}$$

Este estado tem mais energia do que o inicial. Logo, não podemos manter um termo destes e esperar que contribua para o resultado medido no laboratório. Na teoria exata, esse termo não vai contribuir. Então, para já adiantar, nós vamos trocar este termo da seguinte forma:

$$\sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \rightarrow |0\rangle \langle 1| a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger,$$

que conserva energia. Analogamente, também trocamos o outro termo da interação, de forma correspondente, assim:

$$\sigma_x a_{\mathbf{k},\lambda} \rightarrow |1\rangle \langle 0| a_{\mathbf{k},\lambda},$$

que também vai sempre conservar energia no final.

Vamos considerar só as contribuições para  $H_{int}(t)$  que envolvem com os operadores de fótons. Vamos chamar estes termos da hamiltoniana de interação, que não dependem do tempo, de  $H_q$ . Temos, portanto, usando nossas aproximações acima, a chamada interação de Jaynes & Cummings:

$$H_q = -\hbar \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left( ig_{\mathbf{k},\lambda} |1\rangle \langle 0| a_{\mathbf{k},\lambda} - ig_{\mathbf{k},\lambda}^* |0\rangle \langle 1| a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right), \quad (1)$$

que agora vamos passar para a representação de interação. Tudo o que temos a fazer é usar a Eq. (2) da aula passada,

$$H_I(t) \equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H_{int}(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right), \quad (2)$$

com

$$H_0 \equiv H_{at} + H_{rad},$$

mas usando

$$H_{int}(t) \rightarrow H_q$$

para o caso presente. Assim, é fácil vermos que

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |1\rangle \langle 0| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_{at} t\right) |1\rangle \langle 0| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{at} t\right) \\ &= \exp(i\omega_{at} t) |1\rangle \langle 0| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) a_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) &= \exp\left(i\omega_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} t\right) a_{\mathbf{k},\lambda} \exp\left(-i\omega_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} t\right) \\ &= \exp(-i\omega_{\mathbf{k},\lambda} t) a_{\mathbf{k},\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto, a parte quântica da interação, na representação de interação, fica

$$\begin{aligned} H_I^q(t) &= -\hbar \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left\{ ig_{\mathbf{k},\lambda} |1\rangle \langle 0| a_{\mathbf{k},\lambda} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k},\lambda} - \omega_{at}) t] \right. \\ &\quad \left. - ig_{\mathbf{k},\lambda}^* |0\rangle \langle 1| a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \exp[i(\omega_{\mathbf{k},\lambda} - \omega_{at}) t] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Para lidarmos com o termo envolvendo o campo clássico dependente do tempo, podemos proceder de uma forma um pouco diferente. Vamos chamar este termo de  $H_{laser}(t)$  e pensar em um átomo que não esteja sujeito ao campo eletromagnético quântico. Assim, temos uma situação bem simples de evolução de Schrödinger, isto é,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = [E_0 |0\rangle \langle 0| + E_1 |1\rangle \langle 1| + H_{int}^{cl}(t)] |\psi(t)\rangle, \quad (4)$$

com

$$H_{int}^{cl}(t) \equiv -\hbar\Omega_L\sigma_x \cos(\omega_L t),$$

que é um problema de dois níveis (ou estados, na verdade), similar ao que aparece nos livros de graduação. Vamos colocar a energia  $E_0 = 0$  e batizar  $E_1 = \hbar\omega_{at}$ . Na representação de interação, podemos usar a transformação

$$|\psi_I(t)\rangle = \exp(i\omega_{at}|1\rangle\langle 1|)|\psi(t)\rangle.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \exp(i\omega_{at}|1\rangle\langle 1|) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_{at})^n}{n!} (|1\rangle\langle 1|)^n \\ &= \frac{(i\omega_{at})^0}{0!} (|1\rangle\langle 1|)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\omega_{at})^n}{n!} (|1\rangle\langle 1|)^n \\ &= \mathbb{I}_{at} + |1\rangle\langle 1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\omega_{at})^n}{n!} \\ &= \mathbb{I}_{at} - |1\rangle\langle 1| \left[ \mathbb{I}_{at} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_{at})^n}{n!} \right] \\ &= \mathbb{I}_{at} - |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \exp(i\omega_{at}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\exp(i\omega_{at}|1\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \exp(i\omega_{at}). \quad (5)$$

Então,

$$|\psi_I(t)\rangle = |0\rangle\langle 0|\psi(t)\rangle + |1\rangle\langle 1|\psi(t)\rangle \exp(i\omega_{at}).$$

Podemos usar agora a Eq. (5) na Eq. (2) e obtemos

$$\begin{aligned} H_I^{cl}(t) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right) H_{int}^{cl}(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right) \\ &= -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \\ &\quad \times [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \exp(i\omega_{at})] \sigma_x \\ &\quad \times [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \exp(-i\omega_{at})] \\ &= -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \\ &\quad \times [|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \exp(i\omega_{at})] \\ &\quad \times [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \exp(-i\omega_{at})], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} H_I^{cl}(t) &= -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(-i\omega_{at}) |0\rangle\langle 1| \\ &\quad -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(i\omega_{at}) |1\rangle\langle 0|. \end{aligned}$$

Na representação de interação, portanto, a Eq. (4) fica

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= H_I^{cl}(t) |\psi_I(t)\rangle \\ &= -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(-i\omega_{at}t) |0\rangle \langle 1|\psi_I(t)\rangle \\ &\quad -\hbar\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(i\omega_{at}t) |1\rangle \langle 0|\psi_I(t)\rangle. \end{aligned}$$

Logo, esta equação pode ser reescrita mas como um sistema de duas equações acopladas. Para isso, basta tomarmos as componentes de  $|\psi_I(t)\rangle$  ao longo dos estados atômicos, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 0|\psi_I(t)\rangle &= i\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(-i\omega_{at}t) \langle 1|\psi_I(t)\rangle \\ &= i\frac{\Omega_L}{2} \exp[i(\omega_L - \omega_{at})t] \langle 1|\psi_I(t)\rangle \\ &\quad + i\frac{\Omega_L}{2} \exp[-i(\omega_L + \omega_{at})t] \langle 1|\psi_I(t)\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 1|\psi_I(t)\rangle &= i\Omega_L \cos(\omega_L t) \exp(i\omega_{at}t) \langle 0|\psi_I(t)\rangle \\ &= i\frac{\Omega_L}{2} \exp[i(\omega_L + \omega_{at})t] \langle 0|\psi_I(t)\rangle \\ &\quad + i\frac{\Omega_L}{2} \exp[-i(\omega_L - \omega_{at})t] \langle 0|\psi_I(t)\rangle. \end{aligned}$$

Vamos supor que o estado inicial seja o átomo no estado excitado e o campo no vácuo. O estado do campo não vai ser mudado aqui porque a hamiltoniana não tem operadores do campo. Assim, em primeira aproximação, podemos dizer que, para tempos bem próximos de  $t = 0$ , estas duas equações ficam

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 0|\psi_I(t)\rangle &= i\frac{\Omega_L}{2} \exp[i(\omega_L - \omega_{at})t] |\text{vac}\rangle \\ &\quad + i\frac{\Omega_L}{2} \exp[-i(\omega_L + \omega_{at})t] |\text{vac}\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 1|\psi_I(t)\rangle &= i\frac{\Omega_L}{2} \exp[i(\omega_L + \omega_{at})t] \times 0 \\ &\quad + i\frac{\Omega_L}{2} \exp[-i(\omega_L - \omega_{at})t] \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Integrando a primeira destas duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_I(t)\rangle &= \frac{\Omega_L}{2(\omega_L - \omega_{at})} \exp[i(\omega_L - \omega_{at})t] |\text{vac}\rangle \\ &\quad - \frac{\Omega_L}{2(\omega_L + \omega_{at})} \exp[-i(\omega_L + \omega_{at})t] |\text{vac}\rangle. \end{aligned}$$

Se o laser é sintonizado com uma frequência da ordem da frequência atômica, para promover transições do átomo, pelo menos dentro de uma largura natural de linha de cerca de 10 MHz para o sódio, por exemplo, e cerca de 6 MHz para o rubídio, por exemplo, então vemos que o primeiro termo é muito maior do que o segundo, em magnitude, já que

$$|\omega_L + \omega_{at}| \gg |\omega_L - \omega_{at}|.$$

Visualmente, poderíamos pensar no número complexo  $\exp[i(\omega_L - \omega_{at})t]$  girando no plano complexo com uma frequência muito mais baixa do que o número complexo  $\exp[i(\omega_L + \omega_{at})t]$ , conforme o tempo passa. Aí, se fizermos uma média desse movimento de rotação em vizinhanças do tempo dentro de uma janela de tamanho  $\delta t$ , veremos que o vetor posição do número complexo mais veloz terá média muito menor em magnitude do que a média do vetor posição do número complexo mais lento. Esta é a razão do termo “onda gigante” para a aproximação que faremos aqui.

Então, se continuarmos o processo iterativo acima com ordens superiores da frequência de Rabi  $\Omega_L$ , teremos, em cada nova iteração, um novo termo com um novo fator  $\Omega_L/(\omega_L - \omega_{at})$  e também um novo termo com um novo fator  $\Omega_L/(\omega_L + \omega_{at})$ . A maior contribuição será dos termos que envolvem apenas o maior destes fatores, sendo então uma excelente aproximação simplesmente desprezar, de início, os termos proporcionais a  $\exp[\pm i(\omega_L + \omega_{at})t]$ . Ou melhor, já podemos eliminar estes termos na própria hamiltoniana  $H_I^{cl}(t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} H_I^{cl}(t) &= -\hbar \frac{\Omega_L}{2} \exp[i(\omega_L - \omega_{at})t] |0\rangle \langle 1| \\ &\quad -\hbar \frac{\Omega_L}{2} \exp[-i(\omega_L - \omega_{at})t] |1\rangle \langle 0|. \end{aligned} \quad (6)$$

Em resumo, utilizando a aproximação que obtivemos para a parte quântica da interação, na representação de interação, Eq. (3), e a aproximação que acabamos de obter, Eq. (6), obtemos a nova hamiltoniana de interação, na representação de interação, isto é,

$$\begin{aligned} H_I(t) &= -\hbar \frac{\Omega_L}{2} \{ \exp[i(\omega_L - \omega_{at})t] |0\rangle \langle 1| + \exp[-i(\omega_L - \omega_{at})t] |1\rangle \langle 0| \} \\ &\quad -\hbar \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \{ i g_{\mathbf{k}, \lambda} |1\rangle \langle 0| a_{\mathbf{k}, \lambda} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}, \lambda} - \omega_{at})t] \\ &\quad - i g_{\mathbf{k}, \lambda}^* |0\rangle \langle 1| a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \exp[i(\omega_{\mathbf{k}, \lambda} - \omega_{at})t] \}. \end{aligned}$$

## Emissão espontânea

Vamos colocar  $\alpha = 0$  agora, isto é, vamos desligar o laser, mas vamos colocar o átomo no estado inicial excitado,  $|1\rangle$ , em  $t = 0$ , e vamos calcular a probabilidade de ainda encontrá-lo no estado excitado no instante  $t > 0$ . Usando nossa notação desenvolvida acima, estamos procurando pela população  $\mathcal{P}_1(t)$ . Para isso precisamos da amplitude  $\langle \text{fótons} | \Phi_1(t) \rangle$  e, antes, do estado não normalizado  $|\Phi_1(t)\rangle$ . A forma mais prática de encontrar o que estamos procurando é usar o propagador  $U_I(t)$  aplicado ao estado inicial global,

$$|\Psi_I(0)\rangle = |1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle. \quad (7)$$

Aí basta que façamos o produto escalar por  $\langle 1|$  e teremos  $|\Phi_1(t)\rangle$ . Como estou agora usando o material que eu já havia escrito em outra ocasião, vamos modificar um pouco a notação e escrever a hamiltoniana de interação assim:

$$\begin{aligned} H_I(t) &= -\sum_{\mathbf{k}, \lambda} i \hbar g_{\mathbf{k}, \lambda} \exp\left[i \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar} t\right] |1\rangle \langle 0| \otimes \exp(-i\omega_k t) a_{\mathbf{k}, \lambda} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \lambda} i \hbar g_{\mathbf{k}, \lambda} \exp\left[-i \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar} t\right] |0\rangle \langle 1| \otimes \exp(i\omega_k t) a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger, \end{aligned}$$

já usando o fato que

$$g_{\mathbf{k},\lambda}^* = g_{\mathbf{k},\lambda},$$

que pode ser visto na aula 9, e onde, para simplificar a notação, agora usamos

$$\begin{aligned}\omega_0 &\equiv \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar} \\ &= \omega_{at}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}H_I(t) &= -\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t] |1\rangle \langle 0| \otimes a_{\mathbf{k},\lambda} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t] |0\rangle \langle 1| \otimes a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger.\end{aligned}$$

Compactando ainda mais a notação, definamos também:

$$A(t) \equiv -\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t] a_{\mathbf{k},\lambda}$$

e

$$A^\dagger(t) \equiv \sum_{\mathbf{k},\lambda} i\hbar g_{\mathbf{k},\lambda} \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t] a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger.$$

Portanto, agora escrevemos:

$$H_I(t) = |1\rangle \langle 0| \otimes A(t) + |0\rangle \langle 1| \otimes A^\dagger(t). \quad (8)$$

O significado desta hamiltoniana é que, primeiramente, o átomo está na origem, digamos. Então,  $A(t)$  destrói um fóton em cima do átomo, caso o átomo esteja no estado fundamental e o operador  $|1\rangle \langle 0|$  tira o átomo do estado fundamental e, com a energia do fóton que  $A(t)$  destruiu, coloca o átomo no estado excitado. Isso tudo acontece no tempo  $t$  e, como dissemos, o átomo começa no estado fundamental. Se o vácuo estiver vazio, então nada acontece, pois o operador  $A(t)$  simplesmente aniquila o vácuo (vazio). Já quando o átomo está no estado excitado, o operador  $|0\rangle \langle 1|$  coloca o átomo no estado fundamental e aí, com a energia que é liberada desse decaimento, o operador  $A^\dagger(t)$  cria um fóton em cima do átomo e o vácuo fica com um fóton a mais do que antes, tudo isso ocorrendo no instante  $t$ . O fato de que temos somas sobre  $\mathbf{k}$  e  $\lambda$ , ou seja, sobre os modos possíveis de fótons, significa que os operadores  $A(t)$  e  $A^\dagger(t)$  estão ou destruindo ou criando um fóton na origem e, portanto, criando um fóton localizado no espaço, deixa completamente indeterminado seu momentum linear (dado, como vimos, por  $\hbar\mathbf{k}$ ) e seu momentum angular (que está associado com a polarização, cuja contra-parte no formalismo é o índice  $\lambda$ ).

Agora tudo o que temos a fazer é considerar a Eq. (9) novamente,

$$U_I(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n), \quad (9)$$

mas agora usando a Eq. (8) para  $H_I(t)$ . Na verdade, fica tudo mais fácil se aplicarmos  $U_I(t)$  ao estado inicial em que o átomo está excitado e o vácuo está vazio (com o perdão da distinção implícita entre o que eu chamo de vácuo e o que

eu chamo de vazio; vácuo aqui quer dizer o estado do resto do universo exceto o átomo, que pode já ter fótons e, portanto, não estar vazio). Assim, vamos aplicar, por exemplo,  $H_I(t_n)$  ao estado inicial do sistema todo descrito pela Eq. (7):

$$\begin{aligned} H_I(t_n) |\Psi(0)\rangle &= H_I(t_n) |1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle \\ &= [|1\rangle \langle 0| \otimes A(t_n) + |0\rangle \langle 1| \otimes A^\dagger(t_n)] |1\rangle \otimes |\text{vac}\rangle \\ &= |0\rangle \otimes A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle. \end{aligned}$$

Agora nós podemos aplicar a este estado o próximo fator da direita para a esquerda na expressão do integrando da Eq. (9), isto é,  $H_I(t_{n-1})$ , já que vamos, depois, fazer todas as integrações temporais:

$$\begin{aligned} H_I(t_{n-1}) H_I(t_n) |\Psi(0)\rangle &= H_I(t_{n-1}) |0\rangle \otimes A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle \\ &= [|1\rangle \langle 0| \otimes A(t_{n-1}) + |0\rangle \langle 1| \otimes A^\dagger(t_{n-1})] |0\rangle \otimes A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle \\ &= |1\rangle \otimes A(t_{n-1}) A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle. \end{aligned}$$

Já dá para adivinhar que, após todos os  $n$  fatores de  $H_I(t_k)$  aplicados no estado inicial, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} &H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{n-1}) H_I(t_n) |\Psi(0)\rangle \\ &= \begin{cases} |1\rangle \otimes A(t_1) A^\dagger(t_2) \dots A(t_{n-1}) A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle, & \text{se } n \text{ é par, e} \\ |0\rangle \otimes A^\dagger(t_1) A(t_2) A^\dagger(t_3) \dots A(t_{n-1}) A^\dagger(t_n) |\text{vac}\rangle, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Vejamos que quando substituirmos a Eq. (10) na Eq. (9) aplicada ao estado inicial da Eq. (7) teremos duas integrais:

$$\begin{aligned} U_I(t) |\Psi(0)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\quad \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) |\Psi(0)\rangle \\ &= |1\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\quad \dots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} A(t_1) A^\dagger(t_2) \dots A(t_{2n-1}) A^\dagger(t_{2n}) |\text{vac}\rangle \\ &\quad + |0\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2n+1}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\quad \dots \int_0^{t_{2n}} dt_{2n+1} A^\dagger(t_1) A(t_2) A^\dagger(t_3) \dots A(t_{2n}) A^\dagger(t_{2n+1}) |\text{vac}\rangle. \end{aligned}$$