Finalmente, vamos usar uma discretização conveniente

Na versão discreta não especificada que temos usado, os operadores de criação e destruição satisfazem a regra de comutação:

$$\left[a_{\lambda,s}, a^{\dagger}_{\lambda',s'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{s,s'}.$$

A delta de Kronecker sobre os índices discretos, $\delta_{\lambda,\lambda'}$, não é nosso problema, pois não se altera na passagem para o contínuo de vetores de onda. Porém, há uma representação da delta de Kronecker assim:

$$\delta_{s,s'} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} dx \, \exp\left[i\left(s-s'\right)\frac{2\pi}{L}x\right].$$

De fato, se $s'=s$, segue que esta integral dá igual à unidade e se $s' \neq s$, sendo inteiros, então

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{+L/2} dx \, \exp\left[i\left(s-s'\right)\frac{2\pi}{L}x\right] &= \left.\frac{\exp\left[i\left(s-s'\right)\frac{2\pi}{L}x\right]}{i\left(s-s'\right)\frac{2\pi}{L}}\right|_{-L/2}^{+L/2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para especificarmos uma discretização conveniente (e convencional), vamos agora considerar números de onda indexados por inteiros:

$$k_s = \frac{2\pi}{L}s.$$

Vejamos que um comprimento de onda é L. E aí podemos ir varrendo s, digamos, de $-N$ até N, para $N \in \mathbb{N}$. Quanto maior L, mais continuamente os números de onda vão variando ao varrermos s. Peguemos um L bem grande, só para aguçar nossa intuição e fazer bom uso dela após este aperitivo, quando estiver faminta. Neste caso, nossa representação integral da delta de Kronecker acima fica

$$\frac{L}{2\pi}\delta_{s,s'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{+L/2} dx \, \exp\left[i\left(k_s - k_{s'}\right)x\right].$$

Agora, usando toda nossa inerente capacidade heurística, podemos claramente concluir que

$$\lim_{L\to\infty}\frac{L}{2\pi}\delta_{s,s'} = \delta\left(k-k'\right),$$

onde, para um L-ão, bem grandão, podemos sempre encontrar aproximadamente um inteiro tal que

$$s \approx \frac{L}{2\pi}k,$$

qualquer que seja k real finito. Sendo ainda mais abusivos com nossa notação, levantando toda a ira que possa possuir toda a gente matemática, também podemos escrever

$$\delta_{s,s'} = \lim_{L\to\infty}\frac{2\pi}{L}\delta\left(k-k'\right).$$

E, se quisermos, de fato, extrapolar todos os limites de crueldade abusiva, também podemos escrever

$$\delta_{s,s'} = \lim_{V\to\infty}\frac{\left(2\pi\right)^3}{V}\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right),$$

onde podemos pensar que

$$V = L^3.$$

Tudo isso pode ser feito rigoroso se considerarmos os integrandos todos e usarmos o procedimento usual de integração de Riemann. Mas aqui estamos querendo ser menos lentos do que já temos sido... (Usando o "nós" real.)

Temos que calcular agora os campos quânticos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ a partir do potencial vetorial quântico acima e comparar a Eq. (1),

$$H = \sum_{\lambda,s} \hbar\omega_s \left(a^\dagger_{\lambda,s} a_{\lambda,s} + \frac{1}{2} \right), \tag{1}$$

com a energia eletromagnética, isto é,

$$H_{em} \equiv \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \, (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}), \tag{2}$$

que deverão ser iguais. Com isso, encontraremos ζ e η.

No sistema CGS de unidades, como já vimos,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vamos continuar usando

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_s \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a_{\lambda,s} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s} \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}) \\ & + \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_s \frac{1}{\eta^*} \sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a^\dagger_{\lambda,s} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s} \exp(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}), \end{aligned}$$

que segue da equação de onda para o potencial vetorial,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Então, o campo elétrico é mais fácil, pois temos que pensar que, primeiro, teríamos o potencial vetorial clássico, tomaríamos a derivada parcial com relação ao tempo, e dividiríamos por $-c$. Aí substituiríamos os coeficientes de Fourier dependentes do tempo, $C_{\lambda,s}(t)$ de acordo com

$$C_{\lambda,s}(t) \rightarrow \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a_{\lambda,s}.$$

Claro que, também,

$$C^*_{\lambda,s}(t) \rightarrow \frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a^\dagger_{\lambda,s}.$$

É evidente da expressão do potencial vetorial, tanto clássica como quântica, então, que o campo elétrico fica

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right),\end{aligned}$$

já quantizado e na representação de Schrödinger. Já o campo magnético (indução magnética, para puristas) é um pouco mais complicada:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a_{\lambda,s}\mathbf{k}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a^{\dagger}_{\lambda,s}\mathbf{k}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right).\end{aligned}$$

Aqui lembramos que

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_s &= k_s\hat{\mathbf{k}}_s\\ &= \frac{\omega_s}{c}\hat{\mathbf{k}}_s,\end{aligned}$$

dando

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a_{\lambda,s}\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\end{aligned}$$

e assim confirmamos que, no sistema CGS, as dimensões dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são as mesmas.

Vamos agora aos cálculos. Temos que fazer a integração sobre $\mathbf{r}$ de $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$. Só há ocorrência da variável $\mathbf{r}$ nas exponenciais. Teremos dois casos: $\exp\left[i\left(\mathbf{k}_s\pm\mathbf{k}_{s'}\right)\cdot\mathbf{r}\right]$. Obviamente, aqui teremos problemas se tentarmos integrar em todo o espaço a variável $\mathbf{r}$, pois tínhamos optado por fazer a discretização dos vetores de onda sem especificar como fizemos isso. No caso contínuo, certamente as exponenciais que aparecem são, então, $\exp\left[i\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right)\cdot\mathbf{r}\right]$, onde os vetores de onda são integrados e não somados. Com isso, integrando $\mathbf{r}$ em todo o espaço, obtemos funções delta de Dirac:

$$\int_V d^3r\,\exp\left[i\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right)\cdot\mathbf{r}\right] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right). \tag{3}$$

Mas para discretizar os vetores de onda não podemos pensar no espaço todo (infinito) e tentar misturar os dois casos, discreto e contínuo. Aqui vamos evitar isso refazendo o cálculo da hamiltoniana eletromagnética da Eq. (2) sem sair do caso discreto, supondo um volume V finito e que, depois, quando fizermos o limite para a descrição contínua, tomaremos como tendendo a infinto. Para isso, pensamos em um volume V finito e aqui nós particularizamos nossa discretização. Então, escolhemos

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x,$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L} n_y$$

e

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n_z,$$

com $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ e $V = L^3$. A expressão que é análoga à Eq. (3), portanto, fica

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r \, \exp\left[i\left(\mathbf{k}_s \pm \mathbf{k}_{s'}\right)\cdot\mathbf{r}\right] &= \int_{-L/2}^{+L/2}\int_{-L/2}^{+L/2}\int_{-L/2}^{+L/2} dxdydz \, \exp\left[i\left(\mathbf{k}_s \pm \mathbf{k}_{s'}\right)\cdot\mathbf{r}\right] \\
&= V\delta_{s,\mp s'},
\end{aligned}$$

onde agora s indexa as ternas ordenadas, (n_x, n_y, n_z). Ao somarmos sobre s e sobre s', após a integração sobre $\mathbf{r}$, no integrando aparecerá a delta de Kronecker $\delta_{s,\mp s'}$. Isso, então, efetivamente, elimina a soma sobre s' e, assim, ficamos só com uma soma sobre s. O resultado envolverá, no fim, uma soma sobre s e duas somas sobre as polarizações, uma sobre o índice λ e outra sobre o índice λ'. Logo, podemos facilmente transcrever o resultado de nosso raciocínio, já tendo efetuado a integração sobre $\mathbf{r}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r \, \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} &= -\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_s \frac{V}{\eta^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2} a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s} \\
&+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_s \frac{V}{|\eta|^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2} a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s} \\
&+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_s \frac{V}{|\eta|^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2} a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s} \\
&-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_s \frac{V}{\eta^{*2}}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2} a^\dagger_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s},
\end{aligned}$$

onde estamos supondo que o índice $-s$ corresponde a $-\mathbf{k}_s$, ou seja, $\mathbf{k}_{-s} \equiv -\mathbf{k}_s$, agora especificando como numerar nossa discretização, ou seja, como s indexa as ternas (n_x, n_y, n_z). Também estamos utilizando a convenção de que $\omega_{-s} = \omega_s$, pois os módulos de $\mathbf{k}_s$, e $-\mathbf{k}_s$ são idênticos.

De forma análoga, temos para a energia magnética a integral

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r \, \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} &= -\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s \frac{V\hbar\omega_s}{2\eta^2\zeta c^2} a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_{-s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s \frac{V\hbar\omega_s}{2\left|\eta\right|^2\zeta c^2} a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s \frac{V\hbar\omega_s}{2\left|\eta\right|^2\zeta c^2} a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\right) \\
&-\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s \frac{V\hbar\omega_s}{2\eta^{*2}\zeta c^2} a^\dagger_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',-s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_{-s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\right),
\end{aligned}$$

já simplificando a notação, onde subentendemos que as somas sobre cada índice de polarização vai de 1 até 2. Agora notamos que, para dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ quaisquer, sempre podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{a}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right) &= \left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{a}\right)\\ &= \hat{\mathbf{k}}_s\cdot\left[\mathbf{a}\times\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right)\right]\\ &= \hat{\mathbf{k}}_s\cdot\left[\hat{\mathbf{k}}_s\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)-\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right)\right]\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\left(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right)\left(\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right).\end{aligned}$$

É agora imediato vermos que

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} &= \sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{2\eta^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\\ &+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{2\left|\eta\right|^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\\ &+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{2\left|\eta\right|^2\zeta c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\\ &+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{2\eta^{*2}\zeta c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s},\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\mathbf{k}_{-s}=-\mathbf{k}_s$.

Portanto, a Eq. (2) dá

$$H_{em} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{\left|\eta\right|^2\zeta c^2}\left(a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}+a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}.$$

Sendo assim, vemos que

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s} = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

e, com isso,

$$H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{8\pi\left|\eta\right|^2\zeta c^2}\left(a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda,s}+a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}\right).$$

Usando

$$\left[a_{\lambda,s},a^\dagger_{\lambda',s'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{s,s'},$$

obtemos

$$a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda,s}+a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s} = 2a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+1$$

e, assim,

$$H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_s\frac{V\hbar\omega_s}{8\pi\left|\eta\right|^2\zeta c^2}\left(2a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+1\right),$$

ou seja,

$$H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_{s}\frac{V}{4\pi\left|\eta\right|^{2}\zeta c^{2}}\hbar\omega_{s}\left(a_{\lambda,s}^{\dagger}a_{\lambda,s}+\frac{1}{2}\right).$$

Tudo ficará consistente, isto é, as Eqs. (1) e (2) serão idênticas, se escolhermos, por exemplo,

$$\eta \equiv 1$$

e

$$\zeta \equiv \frac{V}{4\pi c^{2}}.$$

Portanto, fixando esses valores, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^{2}}{V\omega_{s}}}a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right)\\ &+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^{2}}{V\omega_{s}}}a_{\lambda,s}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{s}}{V}}a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right)\\ &-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{s}}{V}}a_{\lambda,s}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{s}}{V}}a_{\lambda,s}\hat{\mathbf{k}}_{s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right)\\ &-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{s}}{V}}a_{\lambda,s}^{\dagger}\hat{\mathbf{k}}_{s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_{s}\cdot\mathbf{r}\right),\end{aligned}$$

que é convencional em vários livros-texto.

Limite para a descrição contínua

Como explicado anteriormente, para ficar independente da forma como fazemos o processo limite, vamos aqui escolher a regra de comutação entre os operadores de aniquilação e criação contínuos como

$$\left[b_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right),b_{\lambda'}^{\dagger}\left(\mathbf{k}'\right)\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right), \tag{4}$$

onde, temporariamente, estamos utilizando $b_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right)$ e $b_{\lambda}^{\dagger}\left(\mathbf{k}\right)$ ao invés de $a_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right)$ e $a_{\lambda}^{\dagger}\left(\mathbf{k}\right)$ para evitar confusão com a descrição anteiror. Para vermos que a Eq. (4) faz sentido em um caso particular simples, suponhamos que temos um estado de número com um só fóton de momentum $\mathbf{k}_0$ e polarização λ_0. O ket correspondente é dado por $b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c$, onde $\left|0\right\rangle_c$ é o vácuo eletromagnético contínuo. O número total de fótons é dado pela aplicação do operador número total contínuo,

$$N_c \equiv \sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\, b_{\lambda}(\mathbf{k}),$$

sobre o dado ket. Assim,

$$\begin{aligned}
N_c b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c &= \left\{\sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\, b_{\lambda}(\mathbf{k})\right\} b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c \\
&= \sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\left\{b_{\lambda}(\mathbf{k})\, b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\right\}\left|0\right\rangle_c \\
&= \sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\left\{b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\, b_{\lambda}(\mathbf{k}) + \delta_{\lambda,\lambda_0}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\right\}\left|0\right\rangle_c \\
&= \sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\left\{b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\, b_{\lambda}(\mathbf{k})\left|0\right\rangle_c + \delta_{\lambda,\lambda_0}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c\right\} \\
&= \sum_{\lambda}\int d^3k\, b^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{k})\,\delta_{\lambda,\lambda_0}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c \\
&= b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c,
\end{aligned}$$

como deveria ser. Aqui usamos a aniquilação do vácuo, ou seja,

$$b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\, b_{\lambda}(\mathbf{k})\left|0\right\rangle_c = 0,$$

já que

$$b_{\lambda}(\mathbf{k})\left|0\right\rangle_c = 0.$$

No caso discreto, se tivermos um fóton com vetor de onda próximo a $\mathbf{k}_0$ e polarização λ_0 e usando o ket para o vácuo $\left|0\right\rangle_d$ do campo eletromagéntico discreto, temos o operador número total, na forma discreta, dado por

$$N_d \equiv \sum_{\lambda}\sum_{s} a^{\dagger}_{\lambda,s} a_{\lambda,s},$$

que vai funcionar da mesma forma que no caso contínuo, isto é, usando

$$\left[a_{\lambda,s}, a^{\dagger}_{\lambda',s'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{s,s'},$$

facilmente demonstramos que

$$N_d a^{\dagger}_{\lambda_0,s_0}\left|0\right\rangle_d = a^{\dagger}_{\lambda_0,s_0}\left|0\right\rangle_d.$$

Sendo assim, os operadores número devem concordar. Então,

$$b^{\dagger}_{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)\left|0\right\rangle_c \leftrightarrow a^{\dagger}_{\lambda_0,s_0}\left|0\right\rangle_d$$

se

$$s_0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{k}_0.$$

Notemos que os espaços de Hilbert dos casos discreto e contínuo não são o mesmo espaço; o caso contínuo tem muito mais estados do que o caso discreto. Na representação de posição, o estado de um fóton discreto é dado por

$$\langle \mathbf{r}| \, a^{\dagger}_{\lambda_0, s_0} \left|0\right\rangle_d \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i\mathbf{k}_{s_0} \cdot \mathbf{r}\right),$$

pois é uma onda plana em uma caixa de volume V, normalizada à unidade, isto é,

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \, \left|\langle \mathbf{r}| \, a^{\dagger}_{\lambda_0, s_0} \left|0\right\rangle_d\right|^2 &= \int_V d^3r \, \frac{1}{V} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aqui só estamos considerando a parte espacial, sem incluir a especificação da polarização do fóton. Já para o estado de um fóton contínuo dado, na representação de posição, temos

$$\langle \mathbf{r}| \, b^{\dagger}_{\lambda_0} \left(\mathbf{k}_0\right) \left|0\right\rangle_c \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3}} \exp\left(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right),$$

normalizado à delta de Dirac, isto é, escrevendo

$$\psi_c\left(\mathbf{k}_0; \mathbf{r}\right) \quad \equiv \quad \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3}} \exp\left(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right),$$

temos

$$\begin{aligned} \int d^3r \, \psi^*_c\left(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}\right) \psi_c\left(\mathbf{k}_0; \mathbf{r}\right) &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^3} \int d^3r \, \exp\left[i\left(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1\right) \cdot \mathbf{r}\right] \\ &= \delta^{(3)}\left(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1\right), \end{aligned}$$

como deveria ser, pois as ondas planas não são integráveis, como sabemos dos cursos de graduação. Por causa dessas diferenças na representação dos estados de um fóton, a correspondência

$$b^{\dagger}_{\lambda_0}\left(\mathbf{k}_0\right) \left|0\right\rangle_c \quad \leftrightarrow \quad a^{\dagger}_{\lambda_0, s_0} \left|0\right\rangle_d$$

implica que, para compensar os diferentes fatores de normalização acima, no limite para o contínuo, temos que fazer a transformação nos estados como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}| \, a^{\dagger}_{\lambda_0, s_0} \left|0\right\rangle_d &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i\mathbf{k}_{s_0} \cdot \mathbf{r}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\left(2\pi\right)^3}{V}} \, \langle \mathbf{r}| \, b^{\dagger}_{\lambda_0}\left(\mathbf{k}_0\right) \left|0\right\rangle_c, \end{aligned}$$

já que no limite do contínuo

$$\mathbf{k}_{s_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k}_0,$$

pois nesse limite esses vetores de onda têm que coincidir. Subentendendo que quando temos apenas os operadores, antes de aplicá-los aos respectivos estados de fótons, quando formos aplicá-los, também teremos feito a transição dos estados de fótons do espaço de Hilbert discreto para o espaço de Hilbert contínuo, segue que a transição dos operadores deve seguir a mesma lei que os estados de um fóton seguem acima, ou seja,

$$a_{\lambda,s} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_\lambda (\mathbf{k}) . \tag{5}$$

Como estamos supondo

$$n_x \quad \approx \quad \frac{L}{2\pi} k_x,$$

no caso unidimensional, vemos que a variação de k_x quando n_x varia de uma unidade é

$$dk_x \quad \approx \quad \frac{2\pi}{L}.$$

Supondo intuitivamente que L seja muito grande, a variação dk_x será muito pequena, infinitesimal, no limite da descrição contínua. Também vemos que n_x é um número inteiro de magnitude muito grande.

Entendemos a soma sobre s como sendo uma abreviação das somas sobre as ternas (n_x, n_y, n_z) , ou seja,

$$\sum_s \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} .$$

Podemos, para L imenso, aproximar essas somas por integrais, sendo que cada variação unitária dos índices n_x, n_y e n_z dá uma correspondente diferencial nas componentes do vetor de onda como acima, isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \quad &\rightarrow \quad \int \frac{L}{2\pi} dk_x \int \frac{L}{2\pi} dk_y \int \frac{L}{2\pi} dk_z \\ &= \quad \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} . \end{aligned}$$

No limite do contínuo, portanto, vamos utilizar

$$\sum_s \quad \rightarrow \quad \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} . \tag{6}$$

Usando as regras de transição, específica de nossa discretização em caixa de volume V que tende ao infinito, isto é, usando as Eqs. (5) e (6), o potencial vetoria, por exemplo, fica

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad & \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_s}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_\lambda (\mathbf{k})\, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda (\mathbf{k}) \exp (i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\ & + \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_s}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_\lambda^\dagger (\mathbf{k})\, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda (\mathbf{k}) \exp (-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) , \end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) \quad \rightarrow \quad & \sum_{\lambda=1}^{2}\int d^{3}k\sqrt{\frac{\hbar c^{2}}{4\pi^{2}\omega_{s}}}b_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right)\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) \\
& +\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^{3}k\sqrt{\frac{\hbar c^{2}}{4\pi^{2}\omega_{s}}}b_{\lambda}^{\dagger}\left(\mathbf{k}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda}\left(\mathbf{k}\right)\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right),
\end{aligned}
$$

onde agora a regra de comutação que vale é a Eq. (4). Como aqui nós temos todas as regras e 'caveats' para o procedimento de limite à descrição contínua, vamos sempre utilizar a descrição discreta. Mas estaremos sempre cientes de que, para obter resultados exatos, de acordo com a teoria de campos no espaço livre, temos que passar para a representação contínua. Logo, o material apresentado aqui deve ser sempre tido em mente e às mãos.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).

[2]Sakurai, Advanced Quantum Mechanics.