Quantização do campo eletromagnético

Quantização canônica

A equação que temos para as variáveis dinâmicas discretas que estamos usando é a do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) = -\omega^2 Q(t).$$

Na quantização que foi proposta por Dirac o que precisamos é de variáveis canônicas. Então vamos recordar o mínimo para poder definir essas variáveis. Na equação acima nós deixamos a variável sem os índices para facilitar a notação, já que cada particular variável discreta só se acopla com ela mesma em cada uma das equações dinâmicas para os coeficientes do potencial vetorial.

A ideia é encontrarmos uma lagrangeana que dê nossa equação de movimento acima. Seja, então, $\mathscr{L}$ a lagrangeana. Esta é uma função

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \dot{q}),$$

onde

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}.$$

Aí, para cada q teremos o momentum conjugado:

$$p \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}.$$

O próximo passo é obter a hamiltoniana, que é definida como

$$\mathscr{H} \equiv \dot{q}p - \mathscr{L},$$

onde ζ é um fator constante real que vamos fixar no final quando vamos querer ter consistência dimensional. Notemos que agora tanto $\dot{q}$ como $\mathscr{L}$ devem ser escritas em termos de q e p, de forma que teremos que inverter a função obtida acima de p que vai ser uma função, em geral, de q e $\dot{q}$, já que é uma derivada da lagrangeana e esta, por sua vez, é uma função de q e $\dot{q}$. Temos que resolver $\dot{q}$ como uma função de q e p.

A quantização canônica que o Dirac desenvolveu é agora pegar essas variáveis conjugadas, q e p, e, ao invés de usar os parênteses de Poisson, usamos o comutador

$$[q, p] = i\hbar, \tag{1}$$

considerando agora q e p como operadores e não mais como funções reais do tempo. Esse postulado, no entanto, supõe que as dimensões de q e p sejam tais que qp tenha dimensão de energia vezes tempo. Esses operadores, na versão de Schrödinger (Schrödinger's picture), não dependem do tempo.

Como fazemos isso em nosso caso particular acima? É simples. A equação de movimento acima tem que ser obtida da lagrangeana pela equação de Euler & Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

A equação de movimento é também escrita como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}Q\left(t\right)\right]+\omega^{2}Q\left(t\right) = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{Q}\left(t\right)\right]+\omega^{2}Q\left(t\right) = 0,$$

usando

$$\dot{Q}\left(t\right) \equiv \frac{dQ\left(t\right)}{dt}.$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{Q}}\left(\frac{1}{2}\dot{Q}^{2}\right) = \dot{Q} \tag{3}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left(-\frac{1}{2}\omega^{2}Q^{2}\right) = -\omega^{2}Q. \tag{4}$$

Claramente, como

$$\frac{\partial}{\partial \dot{Q}}\left(-\frac{1}{2}\omega^{2}Q^{2}\right) = 0 \tag{5}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}\dot{Q}^{2}\right) = 0, \tag{6}$$

segue que, somando as Eqs. (3) com (5) e (4) com (6), obtemos, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{Q}}\left(\frac{1}{2}\dot{Q}^{2}-\frac{1}{2}\omega^{2}Q^{2}\right) = \dot{Q}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}\dot{Q}^{2}-\frac{1}{2}\omega^{2}Q^{2}\right) = -\omega^{2}Q.$$

Logo, agora fica evidente que podemos escolher

$$q(t) \equiv Q(t)$$

e

$$\mathscr{L} \equiv \zeta\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right)$$

e a equação de movimento é imediatamente obtida usando a Eq. (2). Note que nossa equação é a de um oscilador harmônico de massa igual à unidade. O momentum canônico é, então,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \\ &= \zeta \dot{q}. \end{aligned}$$

A inversão agora aqui é trivial:

$$\dot{q} = \frac{p}{\zeta}.$$

A lagrangeana fica então, em termos de q e p,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2\zeta}p^2 - \frac{1}{2}\zeta\omega^2 q^2$$

e a hamiltoniana dá

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \dot{q}p - \mathscr{L} \\ &= \frac{p^2}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta}p^2 + \frac{1}{2}\zeta\omega^2 q^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2\zeta}p^2 + \frac{1}{2}\zeta\omega^2 q^2.$$

Por que fazer tudo isso se já poderíamos ter escrito esta última equação de cara? Só para recordar todos os passos que um problema mais complicado teria que seguir.

Agora, neste ponto, passamos a considerar p e q como operadores independentes do tempo satisfazendo a Eq. (1) e a hamiltoniana, que vamos agora denotar como H, passa a ser o gerador das translações temporais no espaço de Hilbert dos estados do sistema.

Há, porém, um detalhe técnico para aplicar isto que acabamos de fazer para o que tínhamos feito antes: o que escolheremos como $Q(t)$ em termos dos coeficientes $C_{\lambda,s}(t)$ da expansão discreta do potencial vetorial?

Em mecânica quântica, temos que ter como posição e momentum operadores hermitianos. No entanto, os coefientes $C_{\lambda,s}(t)$ não são, necessariamente, reais e, portanto, não podemos tomar $Q\left(t\right)$ como sendo algum desses coeficientes. Mas, podemos, sim, tomar, por exemplo,

$$q_{\lambda,s}\left(t\right)=Q_{\lambda,s}\left(t\right) \equiv \eta C_{\lambda,s}\left(t\right)+\eta^{*}C_{\lambda,s}^{*}\left(t\right),$$

garantindo sua realidade e onde η é qualquer número complexo que podemos escolher depois, de acordo com nossa conveniência. Poderíamos ter escolhido um fator $\eta_{\lambda,s}$ para cada modo $\left(\lambda,s\right)$, mas, como veremos, todos serão escolhidos iguais no final e, assim, para facilitar a notação, vamos escolher todos os η's idênticos. Notemos também que essa combinação linear não altera a equação diferencial inicial acima, para $Q_{\lambda,s}\left(t\right)$, isto é,

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}}Q_{\lambda,s}\left(t\right) = -\omega_{s}^{2}Q_{\lambda,s}\left(t\right),$$

é válida e nossa quantização acima continua inalterada.

Lembrando que, antes da quantização,

$$C_{\lambda,s}\left(t\right) \equiv c_{\lambda,s}\exp\left(-i\omega_{s}t\right),$$

segue que

$$\begin{aligned}\dot{C}_{\lambda,s}\left(t\right) &= -i\omega_{s}c_{\lambda,s}\exp\left(-i\omega_{s}t\right)\\ &= -i\omega_{s}C_{\lambda,s}\left(t\right),\end{aligned}$$

de forma que

$$p_{\lambda,s}\left(t\right) = -\zeta i\omega_{s}\eta C_{\lambda,s}\left(t\right)+\zeta i\omega_{s}\eta^{*}C_{\lambda,s}^{*}\left(t\right).$$

Com isso, podemos resolver para os coeficientes em termos das variáveis canônicas

$$q_{\lambda,s}\left(t\right) = \eta C_{\lambda,s}\left(t\right)+\eta^{*}C_{\lambda,s}^{*}\left(t\right)$$

e

$$i\frac{p_{\lambda,s}\left(t\right)}{\zeta\omega_{s}} = \eta C_{\lambda,s}\left(t\right)-\eta^{*}C_{\lambda,s}^{*}\left(t\right),$$

isto é,

$$C_{\lambda,s}\left(t\right) = \frac{q_{\lambda,s}\left(t\right)}{2\eta}+i\frac{p_{\lambda,s}\left(t\right)}{2\zeta\eta\omega_{s}}$$

e

$$C_{\lambda,s}^{*}\left(t\right) = \frac{q_{\lambda,s}\left(t\right)}{2\eta^{*}}-i\frac{p_{\lambda,s}\left(t\right)}{2\zeta\eta^{*}\omega_{s}}.$$

Logo, após a quantização, teremos o potencial vetorial na versão de Schrödinger dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\left(\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta}+i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta\omega_s}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right) \\
&\quad+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\left(\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta^*}-i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta^*\omega_s}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right).
\end{aligned}$$

Do que vamos chamar esses operadores envolvendo combinações de posição e momentum generalizados? Vejamos o que o comutador entre eles dá, isto é,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta}+i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta\omega_s},\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta^*}-i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta^*\omega_s}\right] &= \left[\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta},-i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta^*\omega_s}\right] \\
&\quad+\left[i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta\omega_s},\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta^*}\right] \\
&= -\frac{i}{4\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2}\left[q_{\lambda,s},p_{\lambda,s}\right] \\
&\quad+\frac{i}{4\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2}\left[p_{\lambda,s},q_{\lambda,s}\right] \\
&= -\frac{i}{2\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2}i\hbar \\
&= \frac{\hbar}{2\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta}+i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta\omega_s},\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta^*}-i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta^*\omega_s}\right] = \frac{\hbar}{2\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2},$$

isto é,

$$\frac{2\zeta\omega_s\left|\eta\right|^2}{\hbar}\left[\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta}+i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta\omega_s},\frac{q_{\lambda,s}}{2\eta^*}-i\frac{p_{\lambda,s}}{2\zeta\eta^*\omega_s}\right] = 1,$$

ou ainda,

$$\left[\sqrt{\frac{\zeta\omega_s}{2\hbar}}q_{\lambda,s}+i\frac{1}{\sqrt{2\zeta\hbar\omega_s}}p_{\lambda,s},\sqrt{\frac{\zeta\omega_s}{2\hbar}}q_{\lambda,s}-i\frac{1}{\sqrt{2\zeta\hbar\omega_s}}p_{\lambda,s}\right] = 1,$$

Com isso, em analogia ao que já sabemos desde a graduação a respeito dos operadores de aniquilação e criação, vamos agora chamar de $a_{\lambda,s}$ e $a^{\dagger}_{\lambda,s}$ esses dois operators, ou seja,

$$a_{\lambda,s} \equiv \sqrt{\frac{\zeta\omega_s}{2\hbar}}q_{\lambda,s}+i\frac{1}{\sqrt{2\zeta\hbar\omega_s}}p_{\lambda,s}$$

e

$$a^{\dagger}_{\lambda,s} \equiv \sqrt{\frac{\zeta\omega_s}{2\hbar}} q_{\lambda,s} - i\frac{1}{\sqrt{2\zeta\hbar\omega_s}} p_{\lambda,s}.$$

Também,

$$q_{\lambda,s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} \left(a_{\lambda,s} + a^{\dagger}_{\lambda,s} \right)$$

e

$$p_{\lambda,s} = i\sqrt{\frac{\zeta\hbar\omega_s}{2}} \left(a^{\dagger}_{\lambda,s} - a_{\lambda,s} \right).$$

Então, como destas definições também temos

$$\begin{aligned} C_{\lambda,s}(t) &= \frac{q_{\lambda,s}(t)}{2\eta} + i\frac{p_{\lambda,s}(t)}{2\zeta\eta\omega_s} \\ &\to \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{8\zeta\omega_s}} \left(a_{\lambda,s} + a^{\dagger}_{\lambda,s} - a^{\dagger}_{\lambda,s} + a_{\lambda,s} \right) \\ &= \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a_{\lambda,s} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C^{*}_{\lambda,s}(t) &= \frac{q_{\lambda,s}(t)}{2\eta^*} - i\frac{p_{\lambda,s}(t)}{2\zeta\eta^*\omega_s} \\ &\to \frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{8\zeta\omega_s}} \left(a_{\lambda,s} + a^{\dagger}_{\lambda,s} + a^{\dagger}_{\lambda,s} - a_{\lambda,s} \right) \\ &= \frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a^{\dagger}_{\lambda,s}, \end{aligned}$$

vemos que o potencial vetorial agora fica

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s} \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s} \exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s} \frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}} a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s} \exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right). \end{aligned}$$

Nossa tentação agora é usar a hamiltoniana quântica H e obter o usual resultado para um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados. E funciona, pois

$$H = \frac{1}{2\zeta}\sum_{\lambda,s} p^2_{\lambda,s} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda,s}\zeta\omega_s^2 q^2_{\lambda,s}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\zeta}\sum_{\lambda,s}\frac{\zeta\hbar\omega_s}{2}\left(a^\dagger_{\lambda,s}-a_{\lambda,s}\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2\zeta}\sum_{\lambda,s}\zeta\omega_s^2\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\left(a_{\lambda,s}+a^\dagger_{\lambda,s}\right)^2 \\
&= \sum_{\lambda,s}\frac{\hbar\omega_s}{4}\left(-a^{\dagger 2}_{\lambda,s}+a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda,s}-a^2_{\lambda,s}\right) \\
&\quad +\sum_{\lambda,s}\frac{\hbar\omega_s}{4}\left(a^{\dagger 2}_{\lambda,s}+a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda,s}+a^2_{\lambda,s}\right) \\
&= \sum_{\lambda,s}\frac{\hbar\omega_s}{2}\left(a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda,s}\right) \\
&= \sum_{\lambda,s}\frac{\hbar\omega_s}{2}\left(2a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+1\right),
\end{aligned}
$$

onde usamos o usual comutador

$$
\left[a_{\lambda,s}, a^\dagger_{\lambda',s'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{s,s'}.
$$

Portanto,

$$
H = \sum_{\lambda,s}\hbar\omega_s\left(a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+\frac{1}{2}\right), \tag{7}
$$

na forma que é usual em livros-texto.

Resta agora fixarmos as unidades encontrando os fatores ζ e η. Então, antes de fazermos isso, vamos recordar o teorema de Poynting em uma breve digressão sobre conservação de energia em eletromagnetismo.

Resta agora fixarmos as unidades encontrando os fatores ζ e η. Então, antes de fazermos isso, vamos recordar o teorema de Poynting em uma breve digressão sobre conservação de energia em eletromagnetismo.

Digressão: conservação de energia em eletromagnetismo

Daqui em diante vamos usar o sistema CGS de unidades. Tínhamos, anteriormente, usado o MKS de unidades, no qual as equações de Maxwell são escritas como

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ \text{(Lei de Gauss)}, \\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0\ \text{(ausência de monopolos magnéticos)}, \\
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ \text{(Lei da Indução de Faraday)}, \\
\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\ \text{(Lei de Ampère \& Maxwell)}.
\end{aligned}
$$

O truque básico para mudar é fazer as seguintes mudanças:

$$\varepsilon_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi},$$

$$\mu_0 \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi}{c^2}$$

e

$$\mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{B}}{c}.$$

E, claro, aqui neste curso, vamos estar no vácuo, não dentro da matéria, e nossos campos são os microscópicos, não os macroscópicos. Para ver como fica quando temos matéria, teremos pelo menos um exercício envolvendo um meio material linear, homogêneo e isotrópico.

Em mecânica clássica aprendemos a utilizar o conceito de leis de conservação para obter primeiras integrais das equações de movimento. Para cada lei de conservação, podemos eliminar uma equação de movimento. Assim, em mecânica, as leis de conservação são muito importantes para diminuir o número de equações que precisamos resolver. Nem sempre podemos encontrar um número de leis de conservação igual ao de equações de movimento; nesse caso, o sistema dinâmico é dito não integrável. E em eletromagnetismo? As equações de Maxwell juntamente com a força de Lorentz também formam um sistema dinâmico, embora muito complicado, mas que pode se tornar mais tratável se tivermos leis de conservação. Poderíamos ter também a energia conservada? A seguir teremos a elucidação dessa questão através da demonstração do teorema de Poynting.

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss, no sistema CGS de unidades,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \quad = \quad 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \quad = \quad 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \quad = \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère-Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

A força de Lorentz para uma carga puntiforme q é dada por

$$\mathbf{F} \quad = \quad q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde **v** é o vetor velocidade da partícula carregada. Essa força vale também para o caso não estático e, portanto, podemos considerá-la para determinar o balanço energético entre uma distribuição de matéria carregada e os campos **E** e **B**. Se a matéria é caracterizada pelas densidades ρ e **J**, então a força sobre um elemento de volume d^3r de matéria é dada por

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

e, como

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v},$$

segue que

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos que **v**, no caso contínuo, é o campo de velocidades da matéria, isto é, no ponto **r** e instante t, temos $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

O trabalho que a força elétrica faz sobre a carga $dq = \rho d^3r$ por unidade de tempo é a potência mecânica transferida dos campos para a matéria e é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} &= \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}d^3r \\ &= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3r. \end{aligned}$$

Notemos que a força magnética não executa trabalho sobre a matéria. Da Lei de Ampère-Maxwell segue que a densidade de corrente pode ser expressa em termos dos campos:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} &= \left(\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{E} \\ &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})}{\partial t}.$$

Também, usando a convenção de Einstein, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) &= E_i(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})_i \\ &= E_i\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(E_iB_k) - B_k\varepsilon_{ijk}\partial_j E_i \\ &= -\varepsilon_{jik}\partial_j(E_iB_k) + B_k\varepsilon_{kji}\partial_j E_i \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{c}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

onde usamos a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \;=\; -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Podemos também escrever

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\partial \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)}{\partial t}.$$

Com esses resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&= -\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&= -\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)}{\partial t} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\right)}{\partial t}
\end{aligned}$$

A taxa de variação da energia cinética da matéria carregada é dada pelo trabalho, por unidade de tempo, da força de Lorentz que é exercida sobre as cargas e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{c}}}{dt} &= \int_V d^3r\, \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \\
&= \int_V d^3r \left[-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)}{\partial t}\right] \\
&= -\frac{c}{4\pi}\int_V d^3r\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\, \frac{\partial \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)}{\partial t} \\
&= -\oint_{S(V)} da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\, \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)\right] \\
&= -\oint_{S(V)} da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} - \frac{d}{dt}\left(U_{\mathrm{e}} + U_{\mathrm{m}}\right),
\end{aligned}$$

onde $S\left(V\right)$ é a superfície fechada que constitui a fronteira da região V e definimos o vetor de Poynting como

$$\mathbf{S} \;=\; \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Aqui também reconhecemos a energia armazenada no campo elétrico,

$$U_{\mathrm{e}} \;\equiv\; \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E},$$

e a energia armazenada no campo indução magnética,

$$U_{\mathrm{m}} \;\equiv\; \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\, \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

Logo, o balanço de energia dentro do volume V é dado por

$$\frac{d\left(\mathcal{E}_{\rm c}+U_{\rm e}+U_{\rm m}\right)}{dt} = -\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S}.$$

Em outras palavras, essa equação mostra que, em uma região V do espaço, a energia cinética da matéria somada com a energia total armazenada nos campos será conservada se e somente se o fluxo do vetor de Poynting sobre a fronteira da região for nulo. Essa equação é também conhecida como o Teorema de Poynting.

Fixando ζ e η

Temos que calcular agora os campos quânticos **E** e **B** a partir do potencial vetorial quântico acima e comparar a Eq. (8),

$$H = \sum_{\lambda,s}\hbar\omega_s\left(a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+\frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

com a energia eletromagnética, isto é,

$$H_{em} \equiv \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\,\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right), \tag{9}$$

que deverão ser iguais. Com isso, encontraremos ζ e η.

Há pequenas mudanças em nossas equações de Maxwell no sistema CGS de unidades com relação às nossas equações anteriores no sistema MKS. Então, vamos rever como ficam os campos **E** e **B** em termos dos potenciais agora. Começando por

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0,$$

vemos que, como anteriormente,

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}.$$

Aí, como agora

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

segue que, já usando

$$\phi = 0,$$

por estarmos no calibre de Coulomb,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

e vemos que aparece um fator $1/c$ que não tínhamos no caso do sistema MKS de unidades.

Vamos agora usar

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right),\end{aligned}$$

que segue da equação de onda para o potencial vetorial,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

que é exatamente a mesma em ambos os sistemas CGS e MKS de unidades, pois já tomamos o cuidado de, quando tratamos o sistema MKS, efetivamente, usar a substituição

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \rightarrow c.$$

Então, o campo elétrico é mais fácil, pois temos que pensar que, primeiro, teríamos o potencial vetorial clássico, tomaríamos a derivada parcial com relação ao tempo, e dividiríamos por $-c$. Aí substituiríamos os coeficientes de Fourier dependentes do tempo, $C_{\lambda,s}(t)$ de acordo com

$$C_{\lambda,s}(t) \rightarrow \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a_{\lambda,s}.$$

Claro que, também,

$$C^*_{\lambda,s}(t) \rightarrow \frac{1}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a^{\dagger}_{\lambda,s}.$$

É evidente da expressão do potencial vetorial, tanto clássica como quântica, então, que o campo elétrico fica

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right),\end{aligned}$$

já quantizado e na representação de Schrödinger. Já o campo magnético (indução magnética, para puristas) é um pouco mais complicada:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a_{\lambda,s}\mathbf{k}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\\ &\quad-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}a^{\dagger}_{\lambda,s}\mathbf{k}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right).\end{aligned}$$

Aqui lembramos que

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_s &= k_s\hat{\mathbf{k}}_s \\ &= \frac{\omega_s}{c}\hat{\mathbf{k}}_s,\end{aligned}$$

dando

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a_{\lambda,s}\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right) \\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s}\frac{i}{\eta^*}\sqrt{\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}}\frac{\omega_s}{c}a^{\dagger}_{\lambda,s}\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}\right)\end{aligned}$$

e assim confirmamos que, no sistema CGS, as dimensões dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são as mesmas.

Vamos agora aos cálculos. Temos que fazer a integração sobre $\mathbf{r}$ de $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$. Só há ocorrência da variável $\mathbf{r}$ nas exponenciais. Teremos dois casos: $\exp\left[i\left(\mathbf{k}_s\pm\mathbf{k}_{s'}\right)\cdot\mathbf{r}\right]$. Obviamente, aqui teremos problemas se tentarmos integrar em todo o espaço a variável $\mathbf{r}$, pois optamos por fazer a discretização dos vetores de onda e não especificamos como fizemos isso. O jeito que é possível fazer é voltarmos momentaneamente ao caso contínuo só para fazer as integrais de posição, ver o que sobra e, então, voltarmos ao caso discreto e voilà: não precisaremos nem sequer especificar a discretização e manteremos somas em índices discretos. No caso contínuo, certamente as exponenciais que aparecerão serão, então, $\exp\left[i\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right)\cdot\mathbf{r}\right]$, onde agora os vetores de onda são integrados e não somados. Com isso, integrando $\mathbf{r}$ em todo o espaço, obtemos funções delta de Dirac:

$$\int_V d^3r\,\exp\left[i\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right)\cdot\mathbf{r}\right] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right).$$

Como no caso contínuo, ao invés de somarmos sobre s e s', estaremos integrando sobre $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, segue que, após integração sobre $\mathbf{r}$, teremos duas integras sobre vetores de onda e, no integrando, aparecerá a delta $\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'\right)$. Digamos que isso, então, efetivamente, elimina a integral sobre $\mathbf{k}'$ e, assim, ficamos só com uma integral sobre $\mathbf{k}$. Agora, então, tudo o que temos a fazer, é simplesmente discretizar de novo, como prescrito no PDF da segunda aula. O resultado envolverá, ainda, uma soma sobre s e duas somas sobre as polarizações, uma sobre o índice λ e outra sobre o índice λ'. Então, apenas em prosa, embora não lírica, podemos facilmente transcrever o resultado de nosso raciocínio, já tendo efetuado a integração sobre $\mathbf{r}$ e obtemos

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} &= -\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{s}\frac{(2\pi)^3}{\eta^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2}a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s} \\ &\quad +\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{s}\frac{1\,(2\pi)^3}{|\eta|^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2}a_{\lambda,s}a^{\dagger}_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{s}\frac{(2\pi)^3}{|\eta|^2}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\\
&-\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{s}\frac{(2\pi)^3}{\eta^{*2}}\frac{\hbar}{2\zeta\omega_s}\frac{\omega_s^2}{c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s},
\end{aligned}
$$

onde estamos supondo que o índice $-s$ corresponde a $-\mathbf{k}_s$, ou seja, $\mathbf{k}_{-s}\equiv-\mathbf{k}_s$, já que não especificamos anteriormente como estávamos numerando nossa discretização. Estamos, assim, exercendo uma das opções que tínhamos antes do tempo de exercício (que seria no final do cálculo). (Em linguagem de mercado de opções, diríamos que utilizamos aqui opções do tipo americano, já que podemos exercê-las a qualquer momento, ao contrário das do tipo europeu, que só são exercidas na data em que expiram, que no Brasil é sempre a terceira segunda-feira de cada mês.) Também estamos utilizando a convenção de que $\omega_{-s}=\omega_s$, pois os módulos de $\mathbf{k}_s$, e $-\mathbf{k}_s$ são idênticos.

De forma análoga, temos para a energia magnética a integral

$$
\begin{aligned}
\int_V d^3r\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \;=\; &-\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{\eta^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_{-s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\right)\\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\right)\\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\right)\\
&-\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{\eta^{*2}\zeta c^2}a^\dagger_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',-s}\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_{-s}\times\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\right),
\end{aligned}
$$

já simplificando a notação, onde subentendemos que as somas sobre cada índice de polarização vai de 1 até 2. Agora notamos que, para dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ quaisquer, sempre podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{a}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right) &= \left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{a}\right)\\
&= \hat{\mathbf{k}}_s\cdot\left[\mathbf{a}\times\left(\hat{\mathbf{k}}_s\times\mathbf{b}\right)\right]\\
&= \hat{\mathbf{k}}_s\cdot\left[\hat{\mathbf{k}}_s\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)-\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right)\right]\\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\left(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right)\left(\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\right).
\end{aligned}
$$

É agora imediato vermos que

$$
\begin{aligned}
\int_V d^3r\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \;=\; &\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{\eta^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s}\\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}a_{\lambda,s}a^\dagger_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}\\
&+\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{4\pi^3\hbar\omega_s}{\eta^{*2}\zeta c^2}a^{\dagger}_{\lambda,s}a^{\dagger}_{\lambda',-s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',-s},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos o fato que $\mathbf{k}_{-s}=-\mathbf{k}_s$.

Portanto, a Eq. (9) dá

$$
H_{em} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\lambda,\lambda'}\sum_{s}\frac{8\pi^3\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}\left(a_{\lambda,s}a^{\dagger}_{\lambda',s}+a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda',s}\right)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s}.
$$

Sendo assim, vemos que

$$
\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda',s} = \delta_{\lambda,\lambda'}
$$

e, com isso,

$$
H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_{s}\frac{\pi^2\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}\left(a_{\lambda,s}a^{\dagger}_{\lambda,s}+a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda,s}\right).
$$

Usando

$$
\left[a_{\lambda,s},a^{\dagger}_{\lambda',s'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{s,s'},
$$

obtemos

$$
a_{\lambda,s}a^{\dagger}_{\lambda,s}+a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda,s} = 2a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+1
$$

e, assim,

$$
H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_{s}\frac{\pi^2\hbar\omega_s}{|\eta|^2\zeta c^2}\left(2a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+1\right),
$$

ou seja,

$$
H_{em} = \sum_{\lambda}\sum_{s}\frac{2\pi^2}{|\eta|^2\zeta c^2}\hbar\omega_s\left(a^{\dagger}_{\lambda,s}a_{\lambda,s}+\frac{1}{2}\right).
$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).

[2]Sakurai, Advanced Quantum Mechanics.