Quantização do campo eletromagnético

Calibre de Coulomb

Vamos quantizar o campo no vácuo e, mais do que isso, em uma região infinita (para todos os efeitos) onde não há cargas (e nem correntes), isto é, onde não há matéria; só os campos. Nesta circunstância idealizada, podemos escolher

$$\phi = 0 \tag{1}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{2}$$

Como vemos isto?

Quando $\rho = 0$, a lei de Gauss fica

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \right) = 0, \tag{3}$$

já usando

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

De forma análoga, neste caso, a lei de Ampère & Maxwell dá

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Procedendo à luz do que foi feito anteriormente, para o calibre de Lorentz, vamos considerar que temos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dados por potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, mas que não satisfazem as Eqs. (1) e (2). Vamos então ver se é possível encontrar um calibre χ tal que novos potenciais ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ satisfaçam o chamado calibre de Coulomb, Eqs. (1) e (2).

Façamos, as transformações de gauge:

$$\phi_1 = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi.$$

Agora, sabendo que ϕ e $\mathbf{A}$ não satisfazem as Eqs. (1) e (2), vamos impor que os novos potenciais satisfaçam, isto é,

$$0 = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

e

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}^2 \chi.$$

Estas equações podem ser resolvidas e os novos potentiais agora satisfarão o calibre de Coulomb.

Com este calibre, isto é, já tomando a liberdade de impor as Eqs. (1) e (2) nas Eqs. (3) e (4) e abandonando o subescrito 1, obtemos:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

já que a Eq. (3) fica automaticamente satisfeita neste calibre. Isto mostra que basta resolvermos a equação de onda para o potencial vetorial e teremos os campos dados por

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ondas planas

Agora que já sabemos como proceder para encontrar os campos eletromagnéticos, vamos considerar a equação de onda no calibre de Coulomb para encontrar o potencial vetorial,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

considerando apenas uma de suas componentes para simplificar o tratamento:

$$\nabla^2 A_x(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

É óbvio que podemos escrever a identidade

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \int_{V_\infty} d^3r' \, \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_x(\mathbf{r}', t).$$

Uma representação para a função delta de Dirac é

$$\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')].$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_x(\mathbf{r},t) &= \int_{V_\infty} d^3r'\, \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]A_x(\mathbf{r}',t) \\ &= \int d^3k\, \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_\infty} d^3r'\, \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')A_x(\mathbf{r}',t)\right] \\ &= \int d^3k\, \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})f_x(\mathbf{k},t), \end{aligned}$$

onde $f_x(\mathbf{k},t)$ é a transformada de Fourier de $A_x(\mathbf{r},t)$, isto é,

$$f_x(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_\infty} d^3r'\, \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')A_x(\mathbf{r}',t).$$

Aplicando o operador

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

à expressão acima para A_x dá

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= \int d^3k\, f_x(\mathbf{k},t)\nabla^2\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\ &- \frac{1}{c^2}\int d^3k\, \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2} \\ &= \int d^3k\, \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\left[-k^2 f_x(\mathbf{k},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, por independência linear de $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ para diferentes vetores $\mathbf{k}$, obtemos

$$-k^2 f_x(\mathbf{k},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2} = 0.$$

A solução geral dessa equação pode ser escrita como

$$f_x(\mathbf{k},t) = c_x(\mathbf{k})\exp(-i\omega t) + d_x(\mathbf{k})\exp(i\omega t),$$

onde $c_x(\mathbf{k})$ e $d_x(\mathbf{k})$ são funções arbitrárias de $\mathbf{k}$ e definimos

$$\omega \equiv kc.$$

Assim, a solução geral para A_x é dada por

$$\begin{aligned} A_x(\mathbf{r},t) &= \int d^3k\, c_x(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ &+ \int d^3k\, d_x(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t). \end{aligned}$$

As funções escalares

$$\psi_{\pm}(\mathbf{k};\mathbf{r},t) \quad = \quad \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp i\omega t\right]$$

satisfazem a equação de onda. Essas funções representam ondas planas, pois, em uma frente de onda, o valor de $\psi_{\pm}(\mathbf{k};\mathbf{r},t)$ fica fixo e isso ocorre somente quando

$$\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp i\omega t\right]$$

é constante, resultando em uma equação do plano:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t \quad = \quad d_0,$$

onde d_0 é uma constante.

Como o potencial vetorial é um vetor, teremos os coeficientes $c_x(\mathbf{k})$ e $d_x(\mathbf{k})$ como as componentes x de dois vetores, isto é, $\mathbf{c}(\mathbf{k})$ e $\mathbf{d}(\mathbf{k})$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \quad &= \quad \int d^3k\,\mathbf{c}(\mathbf{k})\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right)\\ &+ \quad \int d^3k\,\mathbf{d}(\mathbf{k})\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t\right).\end{aligned}$$

Como o potencial vetorial satisfaz a Eq. (2), devemos ter

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}(\mathbf{k}) \quad = \quad 0$$

e

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad = \quad 0$$

para cada $\mathbf{k}$. Portanto, para cada $\mathbf{k}$ temos infinitos vetores ortogonais, todos paralelos a um plano com sua normal paralela a $\mathbf{k}$. É por isso que o calibre de Coulomb também é chamado de calibre transversal, já que $\mathbf{k}$ é a direção de propagação da onda plana e esta é polarizada ortogonalmente a esta direção.

Como o potencial vetorial é real, segue que

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{r},t) \quad = \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int d^3k\,\mathbf{c}^*(\mathbf{k})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t\right) \quad &+ \\ \int d^3k\,\mathbf{d}^*(\mathbf{k})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right) \quad &= \quad \int d^3k\,\mathbf{c}(\mathbf{k})\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right)\\ &+ \quad \int d^3k\,\mathbf{d}(\mathbf{k})\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t\right).\end{aligned}$$

Trocando $\mathbf{k}$ por $-\mathbf{k}$ no segundo membro desta equação, segue que

$$\begin{aligned}\int d^3k\, \mathbf{c}^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t) &\quad + \\ \int d^3k\, \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) &= \int d^3k\, \mathbf{c}(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ &+ \int d^3k\, \mathbf{d}(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t).\end{aligned}$$

Como esta equação tem que ser válida para todos os tempos, obtemos

$$\int d^3k\, \mathbf{c}^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = \int d^3k\, \mathbf{d}(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

e

$$\int d^3k\, \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = \int d^3k\, \mathbf{c}(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}).$$

Por independência linear dos diferentes vetores de onda $\mathbf{k}$, encontramos que

$$\mathbf{c}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(-\mathbf{k}).$$

Sendo assim, também podemos escrever o potencial vetorial como

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k\, \mathbf{c}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ &+ \int d^3k\, \mathbf{c}^*(-\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t).\end{aligned}$$

Trocando $\mathbf{k}$ por $-\mathbf{k}$ na segunda integral desta equação, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k\, \mathbf{c}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ &+ \int d^3k\, \mathbf{c}^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t).\end{aligned}$$

Para cada $\mathbf{k}$ precisamos de duas direções ortogonais a $\mathbf{k}$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1(\mathbf{k})$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2(\mathbf{k})$, que podemos escolher ortogonais entre si:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2(\mathbf{k}) = 0$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1(\mathbf{k}) \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}},$$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ é versor no sentido de $\mathbf{k}$. Com mais este detalhe, agora o potencial vetorial pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\, c_\lambda(\mathbf{k})\, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k\, c_\lambda^*(\mathbf{k})\, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t),\end{aligned} \tag{5}$$

onde $c_\lambda(\mathbf{k})$ é a componente de $\mathbf{c}(\mathbf{k})$ ao longo de $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k})$. A Eq. (5) é a maneira padrão de escrever o potencial vetorial neste contexto. Veja que estamos supondo que $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k})$ são versores reais, mas quando é conveniente utilizar polarização circular, versores complexos são muito úteis.

O potencial vetorial que acabamos de obter é um campo vetorial e, para cada ponto do espaço, há uma equação dinâmica para esse campo,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

A expressão que obtivemos acima satisfaz esta equação imediatamente. Os coeficientes $\mathbf{c}(\mathbf{k})$ devem ser determinados de acordo com a condição inicial do problema, isto é, se soubermos $\mathbf{A}(\mathbf{r},0)$ em cada ponto $\mathbf{r}$, então teremos todos os coeficientes $\mathbf{c}(\mathbf{k})$.

Um problema de cálculo que temos com a Eq. (5) é o fato de que temos uma variável contínua, $\mathbf{k}$, em termos da qual tudo é expresso. É mais intuitivo quando temos um índice $\mathbf{r}$, para o ponto do espaço, e aí, lá, temos um conjunto discreto de variáveis dinâmicas e não um contínuo delas. Um formalismo de discretização que podemos utilizar é o que segue. Definamos as variáveis discretas $\mathbf{k}_s$ tais que

$$c_\lambda(\mathbf{k})\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}) \equiv \sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_s). \tag{6}$$

Com isso, sempre que você tiver uma expressão discreta, como, por exemplo,

$$\sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}f(\mathbf{k}_s),$$

sempre podemos voltar para o caso contínuo assim:

$$\begin{aligned}\sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}f(\mathbf{k}_s) &= \sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}f(\mathbf{k}_s)\int d^3k\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_s)\\ &= \int d^3k\sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}f(\mathbf{k}_s)\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_s)\\ &= \int d^3k\,f(\mathbf{k})\sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_s)\\ &= \int d^3k\,f(\mathbf{k})\,c_\lambda(\mathbf{k})\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Se quisermos obter o valor de $c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}$ para um particular s, tudo o que temos a fazer é integrar sobre $\mathbf{k}$ a Eq. (6) em torno de $\mathbf{k}_s$, isto é,

$$\sum_s c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\int_{V_{\mathbf{k}_{s'}}} d^3k\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_s) = \int_{V_{\mathbf{k}_{s'}}} d^3k\,c_\lambda(\mathbf{k})\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}),$$

ou seja,

$$c_{\lambda,s'}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s'} = \int_{V_{\mathbf{k}_{s'}}} d^3k\,c_\lambda(\mathbf{k})\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\lambda(\mathbf{k}).$$

Há infinitas discretizações possíveis satisfazendo a Eq. (6). Cada um escolhe a sua.

Depois que escolhemos uma particular discretização, que aqui não vamos especificar, teremos a versão discreta do potencial vetorial, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s} c_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}-i\omega_s t\right)\\ &\quad+\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{s} c^*_{\lambda,s}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,s}\exp\left(-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}+i\omega_s t\right).\end{aligned}$$

Notemos que ω se torna ω_s, correspondendo a

$$\omega_s \equiv k_s c,$$

já que a frequência depende do módulo de $\mathbf{k}$. Agora, sim, temos variáveis dinâmicas discretas,

$$C_{\lambda,s}(t) \equiv c_{\lambda,s}\exp\left(-i\omega_s t\right).$$

As equações satisfeitas por estas variáveis dinâmicas discretas, como pode ser evidentemente observado, são as de osciladores harmônicos:

$$\frac{d^2}{dt^2}C_{\lambda,s}(t) = -\omega_s^2 C_{\lambda,s}(t).$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).

[2]Sakurai, Advanced Quantum Mechanics (https://www.fisica.net/ebooks/quantica/Advanced%20Qua