Quantização do campo eletromagnético

As equações clássicas básicas

Começamos com as quatro equações de Maxwell, que, no vácuo, são escritas assim:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (Lei de Gauss)}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \text{ (ausência de monopolos magnéticos)}, \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ (Lei da Indução de Faraday)}, \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{ (Lei de Ampère \& Maxwell)}.
\end{aligned}$$

Note que, para a dinâmica de uma carga q pontual, de massa m, na presença dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, precisamos também da força de Lorentz, que, já usando a segunda lei de Newton, é dada por

$$\frac{d}{dt}\left[m\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right] = q\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t),$$

onde $\mathbf{r}(t)$ é a posição da carga q no instante t e

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

é a velocidade da carga q no instante t. A forma como a equação de movimento de Lorentz foi escrita acima vale também para o caso relativístico em um referencia inercial.

Invariância de calibre ou gauge

Em eletrostática você provavelmente sabe que há o chamado potencial eletrostático, que pode ser calculado pela integral volumétrica da densidade de carga dividida pela distância entre o elemento de carga e o ponto de observação. O campo eletrostático é dado pelo negativo do gradiente do potencial eletrostático. O que se mede é apenas a diferença de potencial entre dois pontos, de forma que o valor do potencial é definido a menos de uma constante arbitrária. Em outras palavras, o que é fisicamente mensurável é o campo eletrostático. Logo, há infinitos potenciais diferentes dando o mesmo campo eletrostático. Nesta aula vamos ver que a invariância dos campos eletromagnéticos se manifesta também no caso geral, dependente do tempo, e envolve uma infinidade de escolhas possíveis para os potenciais escalar e vetorial.

O fato de que não há monopolos magnéticos implica na existência de um potencial vetorial, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \text{ tal que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Substituindo esse resultado na lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}.$$

Então,

$$\exists \phi = \phi(\mathbf{r}, t) \text{ tal que } \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Com isso, a lei de Gauss fica

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ou seja,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

onde, para simplificar, estamos considerando os campos no vácuo. A lei de Ampère & Maxwell dá

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

com

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}},$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Notemos que se

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

teremos

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \qquad (3)$$

Mas podemos impor a Eq. (1) e ainda assim obter os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ que satisfazem as equações de Maxwell? A resposta é afirmativa e a razão é que há infinitos potenciais que resultam nos mesmos campos eletromagnéticos! Desses infinitos potenciais, um par ϕ e $\mathbf{A}$ satisfazendo a Eq. (1) é sempre possível para todos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazendo as equações de Maxwell, quaisquer que sejam as fontes ρ e $\mathbf{J}$. A escolha de calibre dada pela Eq. (1) é conhecida como o calibre (ou gauge) de Lorentz. Há infinitos outros calibres, como, por exemplo, o calibre de Coulomb, para o qual $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Para vermos isso, suponha que os campos eletromagnéticos sejam dados por um par de potenciais, ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ que não satisfaçam a Eq. (1):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}.$$

Então, vamos escolher novos potenciais, ϕ e $\mathbf{A}$, tais que:

$$\phi = \phi_1 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (4)$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi, \qquad (5)$$

onde

$$\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$$

é uma função arbitrária do espaço e do tempo. Com isso, calculemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} &= \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi) \\ &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1 \\ &= \mathbf{B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi_1 - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\chi) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \\ &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Logo, fica evidente que, para qualquer função $\chi(\mathbf{r}, t)$, podemos trocar os potenciais usando as chamadas transformações de calibre, Eqs. (4) e (5), e os mesmos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são obtidos com os novos potenciais. Em outras palavras, as equações de Maxwell são invariantes por transformações de calibre, Eqs. (4) e (5). Uma vez que temos os mesmos campos para qualquer escolha da função de calibre, $\chi(\mathbf{r}, t)$, podemos escolher χ de forma a fazer com que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1), fixando o calibre de Lorentz! Para isso, basta impor que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1) e econtrarmos a equação resultante que χ deve satisfazer:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

isto é, usando as Eqs. (4) e (5),

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_1 - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_1}{\partial t}. \qquad (6)$$

Assim, uma vez que supusemos que ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ não satisfazem a Eq. (1), segue que basta encontrarmos uma função χ satisfazendo a Eq. (6) e encontraremos um novo par de potenciais, através do uso das Eqs. (4) e (5), que satisfarão a Eq. (1) e, ao mesmo tempo, darão os mesmos campos eletromagnéticos satisfazendo as equações de Maxwell com as mesmas fontes de carga e corrente. E, além disso, no caso do calibre de Lorentz, a Eq. (6) tem o mesmo tipo que as Eqs. (4) e (5). Portanto, resolvendo a equação de onda com fonte encontramos ϕ, $\mathbf{A}$ e χ.

Calibre de Coulomb

Vamos quantizar o campo no vácuo e, mais do que isso, em uma região infinita (para todos os efeitos) onde não há cargas (e nem correntes), isto é, onde não há matéria; só os campos. Nesta circunstância idealizada, podemos escolher

$$\phi = 0 \tag{1}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{2}$$

Como vemos isto?

Quando $\rho = 0$, a lei de Gauss fica

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0, \tag{3}$$

já usando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

De forma análoga, neste caso, a lei de Ampère & Maxwell dá

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Procedendo à luz do que foi feito anteriormente, para o calibre de Lorentz, vamos considerar que temos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dados por potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, mas que não satisfazem as Eqs. (1) e (2). Vamos então ver se é possível encontrar um calibre χ tal que novos potenciais ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ satisfaçam o chamado calibre de Coulomb, Eqs. (1) e (2).

Façamos, as transformações de gauge:

$$\phi_1 = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \nabla \chi.$$

Agora, sabendo que ϕ e $\mathbf{A}$ não satisfazem as Eqs. (1) e (2), vamos impor que os novos potenciais satisfaçam, isto é,

$$0 = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

e

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}^2 \chi.$$

Estas equações podem ser resolvidas e os novos potentiais agora satisfarão o calibre de Coulomb.

Com este calibre, isto é, já tomando a liberdade de impor as Eqs. (1) e (2) nas Eqs. (3) e (4) e abandonando o subescrito 1, obtemos:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

já que a Eq. (3) fica automaticamente satisfeita neste calibre. Isto mostra que basta resolvermos a equação de onda para o potencial vetorial e teremos os campos dados por

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$