

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Bruno Leão Rennó Salomon

Estimando o grau de não-Markovianidade utilizando aprendizado de máquina

**São Carlos
2023**

1 Resumo

O avanço da computação na física tem sido um campo de pesquisa em constante expansão, que tem contribuído significativamente para o desenvolvimento de teorias e métodos computacionais para abordar problemas complexos. Uma das áreas em que a computação tem sido particularmente influente é a mecânica quântica, ainda mais quando tratamos de sistemas quânticos abertos. Sendo assim, um assunto que se destaca nessa área, é a busca da determinação de efeitos de memória não markovianos que surgem em sistemas que interagem com o ambiente conforme a dinâmica evolue no tempo. Nesse projeto nós trabalharemos com uma medida de grau de não-Markovianidade utilizando como quantificador de efeitos de memória a medida de emaranhamento. Nós montamos a simulação do problema para realizar as dinâmicas e em seguida utilizamos do aprendizado de máquina, em específico o Support Vector Machine (SVM), para realizar as previsões do grau de não-Markovianidade com boa precisão. O método é experimentalmente eficiente, visto que são necessários somente uma ou duas rodadas de tomografias de estado.

Keywords: não-Markovianidade, aprendizado de máquina, emaranhamento.

2 Introdução

Inteligência Artificial (IA) é uma área de estudo e desenvolvimento que visa criar sistemas capazes de imitar ou simular a capacidade humana de raciocínio, aprendizado e tomada de decisões. Ela envolve a criação de algoritmos e modelos computacionais que permitem que as máquinas realizem tarefas de forma autônoma, aprendam com os dados disponíveis e se adaptem a novas situações. A IA abrange uma ampla gama de técnicas e abordagens, incluindo aprendizado de máquina, redes neurais artificiais, processamento de linguagem natural e algoritmos evolutivos, entre outros. Cada uma dessas técnicas tem suas próprias aplicações e limitações

O aprendizado de máquina, também conhecido como machine learning (ML), se concentra no desenvolvimento de algoritmos e modelos capazes de permitir que as máquinas aprendam e tomem decisões com base em dados, ele busca criar sistemas que possam aprender e se adaptar automaticamente. Existem diferentes tipos de aprendizado de máquina [1], o aprendizado supervisionado, não supervisionado, por reforço entre outros. Nós trataremos neste trabalho do caso supervisionado [2].

O aprendizado de máquina supervisionado é um ramo em que os algoritmos são treinados a partir de exemplos rotulados. Nessa abordagem, os dados de treinamento contêm pares de entrada e saída esperada, permitindo que o algoritmo aprenda a fazer previsões com base nesses exemplos. O objetivo principal do aprendizado de máquina supervisionado é construir um modelo capaz de generalizar o conhecimento adquirido durante o treinamento para fazer previsões precisas em dados não vistos anteriormente. Os algoritmos de aprendizado de máquina supervisionado podem ser divididos em dois tipos principais: classificação e regressão. Na classificação, o objetivo é atribuir uma determinada

classe ou categoria a uma entrada, com base nos exemplos de treinamento, por exemplo, dinâmicas quânticas Markovianas ou não-Markovianas [3, 4]. Já na regressão, o objetivo é prever um valor contínuo ou uma função contínua, como fazer previsões confiáveis sobre o resultado da medida desejada. O uso do aprendizado de máquina vem crescendo e tendo grande impacto na física, e no ramo de nosso interesse, da informação quântica [5].

Diferente de sistemas quânticos ideais, que são isolados e evoluem unitariamente no tempo, a maioria dos sistemas quânticos reais está sujeita a interações com o ambiente, o que resulta em dinâmicas não unitárias e perda de coerência. A interação com o ambiente faz com que os sistemas quânticos realistas percam a capacidade de manter a coerência, que é a propriedade quântica de existir em múltiplos estados simultaneamente. Isso é problemático, uma vez que a coerência é um recurso quântico valioso, principalmente pensando na parte prática das tecnologias quânticas, onde manter a coerência é uma das grandes dificuldades [6, 7].

Quando tratamos de sistemas quânticos abertos e estamos estudando a dinâmica e evolução temporal do sistema, é importante ter-se em mente os efeitos de memória dinâmicos que podem surgir. Com isso, a dinâmica pode ser dividida em duas categorias: Markoviana ou não-Markoviana. Cada caso depende da natureza das interações e evolução do sistema com o ambiente. Porém, só sobre circunstâncias específicas a evolução de sistemas abertos pode ser tratada como uma aproximação Markoviana ignorando os efeitos de memória, no geral trata-se o comportamento como não-Markoviano. Com isso, o estudo da dinâmica não-Markoviana em sistemas abertos passou a se desenvolver mais e novas abordagens e métodos para quantificá-la foram desenvolvidos [8], inclusive utilizando-se de métodos computacionais envolvendo aprendizado de máquina [9, 10].

Nesse projeto nós trabalhamos num método computacional utilizando aprendizado de máquina para abordar o problema de calcular o grau de não-Markovianidade na dinâmica de um sistema quântico aberto. Na abordagem tomada, nós assumimos ter conhecimento do processo de decoerência que nosso sistema sofre. Nós tomamos como quantificador de efeitos de memória para a análise a medida de emaranhamento [11]. Ainda na atualidade, determinar com precisão o grau de não-Markovianidade é um desafio para algumas configurações experimentais, visto que na maioria dos casos seriam necessárias várias rodadas de tomografia de estado quântico [12]. Com isso, nosso objetivo é simplificar a abordagem experimental desse problema utilizando-se de métodos computacionais, mais especificamente, do aprendizado de máquina. O método utilizado foi um algoritmo de aprendizado de máquina supervisionado, chamado máquina de vetores de suporte, ou support vector machine (SVM) [2], e mostramos que o algoritmo estima com precisão, utilizando somente uma ou duas tomografias de estado quântico, os graus de não-Markovianidade do sistema sobre influência do processo de erro de amplitude.

3 Qubit, vetor de Bloch e esfera Bloch

O qubit [13, 14] é a versão quântica do bit convencional, que é a menor unidade para codificar, armazenar e transmitir informações em dispositivos eletrônicos e sistemas de comunicação. Embora ambos compartilhem essa função, existem diferenças notáveis entre eles. Enquanto um bit só pode assumir um dos dois estados possíveis (0 ou 1), sendo nos computadores de hoje em dia o 0 representado pela ausência de corrente num circuito e o 1 pela presença dela, um qubit pode representar simultaneamente valores equivalentes a 0 e 1, graças à sua propriedade de superposição quântica. Utilizando a notação de Dirac, podemos representar os qubit então como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

onde α e β são números complexos e satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, sendo cada norma ao quadrado a probabilidade do resultado ser seu estado referente. Essa característica permite que os qubits realizem cálculos em paralelo, potencialmente acelerando o processamento de informações em computadores quânticos.

Dois conceitos importantes na computação quântica que não podem ser deixados de lado são o de vetor de Bloch e esfera de Bloch [14]. A esfera de Bloch é uma representação geométrica utilizada para descrever o estado de um qubit, permitindo visualizar de forma intuitiva a superposição de um qubit. Nesta representação os polos norte e sul são geralmente escolhidos para corresponderem aos vetores da base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Além disso, cada ponto na esfera de Bloch representa um estado quântico único, sendo na sua superfície estados puros e em seu interior estados mistos, e sua posição na esfera determina as propriedades físicas do qubit, como a probabilidade de medir um determinado valor. Portanto, um estado na superfície da esfera, $|\psi\rangle$, pode ser descrito por:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad \theta : [0, \pi] \text{ e } \phi : [0, 2\pi], \quad (2)$$

onde, reinterpretando os elementos θ e ϕ em coordenadas esféricas, podemos especificar um ponto na esfera unitária como:

$$\vec{a} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) = (u, v, w). \quad (3)$$

O vetor de Bloch, por sua vez, também nos permite escrever o estado quântico de um qubit. Escrevendo o estado em termos do operador densidade $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (que será discutido, o mesmo pode ser escrito como:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \quad (4)$$

onde I é a matriz identidade e $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli. Neste sentido, $\vec{a} \in \mathbb{R}$ é o denominado vetor de Bloch. Esse é o vetor que indica um ponto na esfera correspondente a um estado puro ou misto. Sendo assim, no caso geral temos:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{a}|^2) \leq 1, \text{ sendo } =1 \text{ para estados puros.} \quad (5)$$

Com isso podemos escrever o vetor de Bloch $\vec{a} = (u, v, w)$ com base na matriz densidade ρ como:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + w & u - iv \\ u + iv & 1 - w \end{pmatrix}, \quad (6)$$

onde então: $u = (\rho_{10} + \rho_{01})$, $v = i(\rho_{10} - \rho_{01})$ e $w = \rho_{00} - \rho_{11}$.

4 Estados puros e mistos

Na mecânica quântica, os estados puros e mistos referem-se aos estados de um sistema quântico [15]. Definimos um estado puro como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \alpha_n(t) |\phi_n\rangle, \quad (7)$$

onde $\{\phi_n\}$ forma uma base ortonormal para um espaço de estados quânticos. Um estado puro é um estado quântico completamente descrito por um vetor de estado único no espaço do sistema. Ele representa um sistema em um estado definido e específico, onde todas as informações possíveis sobre o sistema podem ser extraídas de forma precisa. Esses estados são representados por vetores normalizados, unitários e determinístico, o que significa que, se medido, fornecerá um resultado preciso com probabilidade igual a 1,

$$\sum_n |\alpha_n|^2 = 1, \quad (8)$$

onde a probabilidade do estado colapsar em $|\phi_j\rangle$ é igual a $|\alpha_j|^2$.

Já um estado misto é uma descrição estatística de um sistema quântico que não pode ser completamente descrito por um único vetor de estado. Em vez disso, é representado por uma matriz densidade, também conhecida como operador densidade, apresentado a seguir.

4.1 Operador densidade

O formalismo do operador densidade [14] é uma ferramenta poderosa na teoria da mecânica quântica para descrever e analisar sistemas abertos onde o sistema é perturbado por fatores externos. O operador densidade permite incorporar a natureza probabilística da mecânica quântica e calcular observáveis, probabilidades e evolução temporal de maneira consistente. Geralmente denotado por ρ , o operador densidade é uma matriz hermitiana que descreve completamente o estado de um sistema. Seja $|\psi\rangle$ um vetor de estado representando um estado puro, o operador densidade é dado por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (9)$$

Nessa expressão o operador é dado multiplicando o vetor de estado, $|\psi\rangle$, pelo seu adjunto, $\langle\psi|$, resultando uma matriz. O adjunto de um estado é definido como o vetor de estado transposto conjugado. A

matriz do operador densidade possui algumas propriedades importantes, como a já dita hermiticidade,

$$\rho = \rho^\dagger, \quad (10)$$

onde esse símbolo de adaga representa a matriz transposta e complexa conjugada. A matriz ρ também possui todos seus autovalores não negativos e o traço unitário, ou seja, a soma de seus elementos da diagonal principal resulta em 1

$$\text{Tr}(\rho) = 1. \quad (11)$$

Essas propriedades garantem que o operador densidade seja uma matriz válida para descrever um estado quântico.

Uma vez que temos ρ , podemos calcular também o valor esperado de observáveis. Para um observável representado pelo operador A , o valor esperado $\langle A \rangle$ é dado pelo traço do resultado do produto de ρ por A ,

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (12)$$

4.2 Operador densidade para estados mistos

A natureza probabilística dos estados mistos impede que se adquira a informação total sobre o sistema. A descrição completa de um sistema quântico com estados mistos requer o uso do operador de densidade, mas alguns detalhes sobre os estados puros individuais podem se perder. Enquanto os estados puros são representados por vetores de estado, os estados mistos são representados pelo operador de densidade

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (13)$$

onde p_i é a probabilidade associada ao estado puro $|\psi_i\rangle$, sendo $\sum_i p_i = 1$, visto que a chance de encontrar o sistema em algum estado puro é certa, e o termo $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ é o operador densidade relacionado ao mesmo estado. A soma é realizada sobre todos os estados puros possíveis.

É possível saber quão puro ou misto um estado é através da medida $\text{Tr}(\rho^2)$. Ela é conhecida como pureza do estado, de modo que é menor que 1 para estados mistos, sendo $\frac{1}{d}$ para estados maximamente mistos, onde d é a dimensão do sistema, e é igual a 1 para estados puros.

5 Dinâmica quântica

Na mecânica clássica, a evolução do nosso sistema, ou seja, o que ocorrerá após o estado inicial, pode ser descrita pela segunda lei de Newton, a equação de movimento $\vec{F} = m\vec{a}$. O análogo a ela na mecânica quântica é dado pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (14)$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida e H o hamiltoniano, um operador auto-adjunto que representa a energia total do sistema.

Além da equação de Schrödinger, outras equações equivalentes a fim de calcular a dinâmica das observáveis do sistema foram desenvolvidas, dando origem a outros formalismos da mecânica quântica. Como por exemplo, podemos citar o formalismo de Heisenberg, que impõe a dinâmica do sistema aos operadores quânticos, mantendo, de forma oposta à equação de Schrödinger, os estados quânticos estáticos

Na equação de Heisenberg, a dinâmica de um observável A é dada por:

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, A(t)], \quad (15)$$

onde $[H, A(t)]$ é o comutador entre os operadores A e H .

5.1 Sistemas fechados

A evolução temporal do operador densidade pode ser deduzida sem dificuldades através da dinâmica quântica de um estado qualquer, dada pelo equação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H(t)|\psi\rangle. \quad (16)$$

Substituindo o estado qualquer pelo operador densidade ρ ,

$$\frac{d}{dt}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{d|\psi\rangle}{dt}\langle\psi| + |\psi\rangle\frac{d\langle\psi|}{dt} \quad (17)$$

de forma que

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{i}{\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H(t), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)], \quad (19)$$

Essa equação é conhecida como equação de Liouville-von Neumann.

5.2 Sistemas abertos

Um Hamiltoniano geral a fim de reproduzir um sistema acoplado a um reservatório externo pode sempre ser escrito como:

$$H(t) = H_S(t) + H_R(t) + H_I(t) \quad (20)$$

Sendo $H_S(t)$ o Hamiltoniano do sistema reduzido, $H_R(t)$ o do reservatório e $H_I(t)$ o Hamiltoniano de interação, que introduz as perturbações do reservatório sobre o sistema quântico reduzido, acoplandos.

O sistema quântico é geral, podendo ser caracterizado por spins, fótons, polarização da luz e outras variáveis que descrevam o experimento. De maneira similar, o reservatório pode ser representado

por um conjunto de bósons, spins ou qualquer outra entidade que esteja acoplada ao sistema quântico reduzido. Já a interação afeta o sistema reduzido, determinando, no contexto da computação quântica, as categorias de erros às quais os estados quânticos estão suscetíveis.

Para calcular a dinâmica quântica em sistemas abertos, foram desenvolvidas diversos métodos, cada um com sua abordagem, limitações e características. Entre eles temos as equações mestras, como a de Redfield [16] e a de Lindblad [17], ou a representação em termos de soma de operadores, conhecido como operadores de Kraus [18], que trataremos aqui.

5.2.1 Operadores de Kraus

A representação de Kraus para um sistema aberto geralmente é construída considerando um sistema fechado composto pelo sistema de interesse e seu reservatório associado. Nesse contexto, podemos denotar $\rho(t)$ o operador densidade do sistema total, $\rho_S(t)$ e $\rho_R(t)$ os operadores do sistema reduzido e do reservatório respectivamente, onde:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R[\rho(t)] \quad (21)$$

Visto que o sistema total é fechado, sua evolução é unitária e a dinâmica pode ser escrita como

$$\rho(t) = \mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}^\dagger(t) \quad (22)$$

sendo $\mathcal{U} = \exp(-iHt/\hbar)$ o operador evolução temporal (para um Hamiltoniano H independente do tempo). Assim, como estamos interessados nas variáveis pertinentes ao sistema quântico reduzido, podemos escrever a dinâmica reduzida do sistema da forma

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R[\mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}^\dagger(t)]. \quad (23)$$

Se pudermos reescrever a equação na forma:

$$\rho_S(t) = \sum_a K_a(t)\rho_S(0)K_a^\dagger(t) \quad (24)$$

onde

$$\sum_a K_a^\dagger(t)K_a(t) = I, \quad (25)$$

então podemos dizer que a evolução temporal de $\rho_S(t)$ é dada em termos de operadores de Kraus. De fato, $\rho_S(t)$ sempre possui uma representação para operadores evolução temporal arbitrário se $\rho(0)$ for favorável, o que implica que inicialmente não exista correlações entre ρ_S e ρ_R , ou seja,

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0). \quad (26)$$

Sendo assim, escrevendo as condições iniciais do reservatório como combinação linear dos elementos da base,

$$\rho_R(0) = \sum_i p_i |r_i\rangle\langle r_i|, \quad (27)$$

onde $\{|r_i\rangle\}$ é uma base ortonormal dos auto-estados do reservatório, juntando 23, 26 e 27,

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R[\mathcal{U}(t)\rho_S(0) \otimes (\sum_i p_i |r_i\rangle\langle r_i|)\mathcal{U}^\dagger(t)] \quad (28)$$

reescrevendo o traço parcial, teremos

$$\rho_S(t) = \sum_j \langle r_j | \mathcal{U}(t) \rho_S(0) \otimes \sum_i p_i |r_i\rangle\langle r_i| \mathcal{U}^\dagger(t) |r_j\rangle \quad (29)$$

de forma que obtemos a representação de Kraus para o operador densidade reduzido do sistema,

$$\rho_S(t) = \sum_{ij} K_{i,j}(t) \rho_S(0) K_{i,j}^\dagger(t), \quad (30)$$

sendo

$$K_{i,j}(t) = \sqrt{p_i} \langle r_j | \mathcal{U}(t) |r_i\rangle. \quad (31)$$

Portanto uma representação de Kraus sempre existe para o operador densidade reduzido quando temos o caso em que o sistema e o reservatório são separáveis no momento inicial. Vale ressaltar que esta restrição é amplamente utilizada na literatura e de forma alguma enfraquece o modelo em termos da representação de Kraus. De fato, no contexto de computação quântica, podemos sempre medir os qubits antes de uma computação, o que fatidicamente os separa do reservatório no instante inicial.

6 Dinâmicas Markovianas e não-Markovianas

Na física, a dinâmica refere-se à evolução temporal de um sistema ao longo do tempo. Quando tratamos de sistemas quânticos abertos, a dinâmica pode ser dividida em duas categorias principais: dinâmica Markoviana e dinâmica não Markoviana [3]. Esses termos estão relacionados à natureza das interações e evolução de um sistema quântico em relação ao seu ambiente.

Na dinâmica Markoviana, também conhecida como evolução Markoviana, um sistema quântico evolui de acordo com o princípio de Markov. Um processo de Markov é um processo estocástico onde a única coisa que interfere na probabilidade de um sistema estar em um estado em determinado período é o estado desse sistema imediatamente antes desse período. Em outras palavras, a evolução do sistema é determinada somente pelo estado atual, sem memória de eventos passados.

A dinâmica Markoviana é frequentemente descrita por meio de equações mestras, que são equações diferenciais parciais que descrevem a evolução temporal dos operadores densidade do sistema. Essas equações descrevem a evolução do sistema em um ambiente que pode ser considerado estacionário ou que muda lentamente em relação ao tempo característico do sistema. A equação mestra assume uma forma geral conhecida como a equação de Lindblad. Um exemplo comum de dinâmica Markoviana é o decaimento exponencial de um estado excitado para um estado fundamental em um sistema quântico. Nesse caso, a taxa de decaimento é constante e não depende de eventos ou condições anteriores.

No entanto, muitos sistemas reais não se encaixam nesse modelo e são chamados de não-Markovianos. A dinâmica não Markoviana ocorre quando a evolução de um sistema quântico é afetada por eventos ou estados passados. Isso significa que a evolução do sistema não pode ser completamente descrita apenas pelo estado atual, mas também depende das interações anteriores com o ambiente ou de eventos específicos. A dinâmica não Markoviana é mais complexa de se descrever matematicamente, pois requer uma abordagem mais geral que leva em consideração a memória do sistema. As equações que descrevem a dinâmica não Markoviana são geralmente equações diferenciais parciais não lineares que levam em conta a história completa do sistema e suas interações com o ambiente. Essa categoria de dinâmica pode ocorrer em situações em que as interações com o ambiente são fortes, rápidas ou quando há um alto grau de correlação entre diferentes partes do sistema e do ambiente.

6.1 Medidas de não-Markovianidade

É importante destacar que existem diferentes definições para o conceito de Markovianidade, bem como diversas abordagens que visam quantificar o grau não-Markovianidade [19, 20]. Neste estudo, focaremos em uma abordagem pioneira desenvolvida por Rivas, Huelga, e Plenio [21] (RHP), que emprega a dinâmica de emaranhamento como ferramenta para a detecção de processos que não aderem à lei da composição.

Para esclarecer, consideremos uma função $\mathcal{E}(t_2, t_0)$ que descreve a evolução de um estado quântico de um tempo inicial t_0 até um tempo posterior t_2 . Um processo é considerado Markoviano se, e somente se, essa função pode ser decomposta como o produto de duas funções que representam evoluções temporais consecutivas, ou seja, $\mathcal{E}(t_2, t_0) = \mathcal{E}(t_2, t_1)\mathcal{E}(t_1, t_0)$. Esta decomposição é uma indicação de que o processo não tem memória das correlações anteriores e pode ser considerado como reiniciando sua dinâmica em cada passo temporal.

Esta propriedade possui implicações significativas no contexto de sistemas quânticos compostos. Quando um reservatório atua localmente em um dos subsistemas, o emaranhamento entre os subsistemas não pode aumentar se o processo for Markoviano. Isso ocorre porque, sob a lei de decomposição, a dinâmica pode ser considerada como reiniciando a cada instante, fazendo com que o emaranhamento siga uma tendência monotonicamente decrescente.

Contrastando, uma dinâmica de emaranhamento que não seja monotonicamente decrescente pode ser interpretada como um indicativo de que o processo em questão é não-Markoviano. É com base nessa constatação que RHP desenvolveu sua medida de não-Markovianidade, que descreveremos em detalhes nas seções subsequentes.

7 Emaranhamento

O emaranhamento é um fenômeno fundamental da mecânica quântica [14] que ocorre quando duas ou mais partículas se correlacionam de modo que o estado quântico de um sistema não pode ser

descrito independentemente dos estados dos outros sistemas emaranhados com ele. Essas partículas emaranhadas tornam-se interligadas de tal maneira que suas propriedades individuais não podem mais ser consideradas separadamente. De forma simples, dois subsistemas são considerados emaranhados caso não seja possível escrever eles de forma separável, ou seja, através de um produto tensorial, como

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (32)$$

Em um sistema emaranhado, as propriedades quânticas estão correlacionadas de maneira não clássica. Ao medir uma propriedade em uma das partículas emaranhadas, a medição instantaneamente nos dá informações sobre a propriedade correspondente nas outras partículas, independentemente da distância entre elas. Essa correlação instantânea, independentemente da distância, é uma das características mais intrigantes do emaranhamento quântico e desafia nossa intuição baseada na física clássica.

Como exemplo de estados emaranhados podemos citar os estados de Bell:

$$|\psi_+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (33)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (34)$$

$$|\phi_+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (35)$$

$$|\phi_-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (36)$$

Os estados de Bell são um conjunto de quatro estados quânticos maximamente emaranhados que desempenham um papel fundamental na teoria da informação quântica e nas aplicações práticas da computação e comunicação quântica. Eles recebem esse nome em homenagem a John Bell.

Vale ressaltar que, para estados emaranhados, não temos conhecimento completo de cada um dos estados que compõem a função de onda total, mesmo tendo conhecimento da função de onda que descreve o estado quântico total. Pegando um estado de Bell como exemplo:

$$|\psi_+\rangle = \frac{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

A representação desses estados através da matriz densidade é dada por:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Vale frisar que quando realizamos a operação de traço parcial em um operador densidade que representa um estado maximamente emaranhado, obtemos estados reduzidos que não fornecem informação sobre as propriedades individuais de cada subsistema. De fato, mesmo que sejamos capazes de calcular as populações e coerências do operador densidade global, a natureza do emaranhamento má-

ximo faz com que a informação acerca dos subsistemas seja intrinsecamente inacessível. De fato, lembrando que

$$\rho_{AB} = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 0|_A \otimes |1\rangle\langle 0|_B + |0\rangle\langle 1|_A \otimes |0\rangle\langle 1|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B), \quad (40)$$

então

$$\text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Como se pode observar, o estado reduzido neste cenário é um estado maximamente misto, que representa o máximo grau de incerteza ou falta de informação sobre o sistema. Isso decorre do fato de que o estado reduzido pode ser obtido a partir de qualquer combinação com proporções iguais de dois estados ortogonais, tornando impossível discernir ou especificar quais estados particulares compõem o sistema. É importante observar que, no caso de estados separáveis, teríamos informações claramente definidas para cada um dos qubits individualmente. A ambiguidade ou falta de conhecimento específico nas descrições dos estados reduzidos surge exclusivamente em cenários em que há emaranhamento entre os subsistemas.

7.1 Medida de emaranhamento *concurrence*

Uma discussão que aparece agora é como mensurar o emaranhamento entre os estados. Existem várias medidas de emaranhamento que são utilizadas para quantificar diferentes aspectos do emaranhamento. Essas medidas variam em sua aplicabilidade e eficácia dependendo do tipo de sistema emaranhado e do objetivo da análise. Algumas medidas comumente utilizadas incluem a entropia de emaranhamento, a negatividade e a concorrência, ou *concurrence* [11, 22], que será a medida usada em nossos métodos.

A *concurrence* é uma medida que se aplica especificamente a sistemas de dois qubits, tanto estados puros quanto mistos e foi introduzida por Wootters em 1998 como uma forma de mensurar o emaranhamento. A medida está relacionada com a ideia de que o emaranhamento pode ser convertido em um parâmetro chamado *concurrence*, que varia de 0 (sem emaranhamento) a 1 (emaranhamento máximo). Esta detém uma importância significativa, pois representa um marco histórico ao ser a primeira medida de emaranhamento desenvolvida para avaliar estados mistos de dois qubits.

Explicando brevemente, a medida de baseia na entropia de emaranhamento que é definida como a entropia de von Neumann calculada para um dos subsistemas, ρ_A ou ρ_B , que são os operadores densidade reduzidos do sistema. A entropia de von Neumann em um operador densidade ρ é dada por

$$E(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2(\rho)], \quad (42)$$

de forma que para um estado global puro, a medida para um operador densidade reduzido é

$$E(\rho) = -\text{Tr}[\rho_A \log_2(\rho_A)] = -\text{Tr}[\rho_B \log_2(\rho_B)]. \quad (43)$$

Wooters então reescreve a entropia do sistema de dois qubits como função da agora nomeada *concurrency*. A nova definição é dada por

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \quad (44)$$

sendo,

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (45)$$

onde $|\psi^*\rangle$ sendo o complexo conjugado de $|\psi\rangle$ e σ_y a matriz de Pauli

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Assim, a entropia do sistema é dada por

$$E(|\psi\rangle) = \mathcal{E}(C(\psi)), \quad (47)$$

sendo \mathcal{E} dado como a função

$$\mathcal{E}(C) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x); \quad (48)$$

$$x \equiv \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right). \quad (49)$$

Tendo em vista que a função *concurrency* está limitada a valores entre 0 e 1, nossa variável x está no intervalo 0,5 e 1 e com isso podemos tirar que a entropia também está na região de 0 a 1. Sendo assim, é possível utilizar-se de C para medir o emaranhamento do nosso sistema. Para estados mistos, é criado uma medida de *concurrency* como função do operador densidade.

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (50)$$

onde λ_n é a raiz quadrada dos autovalores da matriz $\rho\tilde{\rho}$ (sendo λ_1 o maior) onde:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (51)$$

Em resumo, a *concurrency* é uma medida que quantifica o emaranhamento entre dois qubits. Ela fornece uma medida direta da quantidade de emaranhamento entre estas, variando de 0 (sem emaranhamento) a 1 (emaranhamento máximo). Como vimos, a *concurrency* é calculada a partir da matriz densidade do sistema e desempenha um papel importante na caracterização e análise do emaranhamento quântico.

8 Aprendizado de máquina

Aprendizado de máquina é um campo da inteligência artificial que se concentra no desenvolvimento de algoritmos e modelos que permitem que os computadores “aprendam” com os dados e tomem decisões ou façam previsões sem serem explicitamente programados. O objetivo é capacitar as máquinas a aprender padrões e relações nos dados e utilizar esse conhecimento em cima de novos

dados.

Dentro do aprendizado de máquina existem várias abordagens e algoritmos diferentes. Um desses algoritmos é a máquina de vetores de suporte (SVM), que foi o método utilizado em nossos cálculos. Segue uma breve introdução sobre os principais aspectos desse método computacional.

8.1 Máquina de vetores de suporte

As SVMs são um tipo de algoritmo de aprendizado de máquina supervisionado, o que significa que elas são treinadas usando um conjunto de dados rotulados, onde cada exemplo de treinamento possui uma classe ou categoria atribuída. O modelo pode ser usado para classificação (SVC) [23] ou regressão (SVR) [24] e recentemente foi estendida para o regime quântico.

De modo geral, o objetivo do modelo SVC é encontrar um hiperplano que possa separar as classes do conjunto de dados. O hiperplano é uma superfície de decisão que divide o espaço em regiões associadas a cada classe. O método busca encontrar o hiperplano que maximiza a margem entre as classes, ou seja, a distância entre o plano e os pontos de dados mais próximos de cada classe, conhecidos como vetores de suporte.

Uma das vantagens do modelo é a capacidade de lidar com situações onde o número de dados de treino é pequena em comparação com a dimensão dos vetores. Além disso, uma vez que o modelo está treinado, ele pode ser usado como uma função de decisão que prevê novos resultados sem manter na memória o conjunto de dados utilizado no treinamento feito anteriormente. Ademais, é possível lidar com dados não lineares usando funções de kernel, que mapeiam os dados para um espaço de características de maior dimensão onde é mais provável que sejam linearmente separáveis.

Entretanto, a ferramenta que usamos em nosso estudo foi o modelo de regressão. Em problemas de regressão, o SVR é utilizado para encontrar uma função que mapeia os dados de entrada para um valor de saída contínuo. No SVR, o objetivo é encontrar uma função de regressão que minimize a soma dos erros de regressão e , ao mesmo tempo, mantenha a margem entre os pontos de dados e a função de regressão abaixo de um limite especificado. A ideia é encontrar uma função de regressão que esteja o mais próxima possível dos exemplos de treinamento, mantendo um bom ajuste aos dados e evitando overfitting, que é quando no treino temos bom desempenho mas ao aplicar o aprendizado nos dados de teste o resultado é ruim. Para isso, em vez de buscar um hiperplano que separe as classes, o SVR busca uma função de regressão que fique dentro de uma faixa de margem em torno dos pontos de dados.

Uma descrição um pouco mais matemática é dizer que nosso modelo encontra uma função $f(\vec{x})$ que ajusta o conjunto de dados de treinamento $\{\vec{x}_i, y_i\}$, onde $y_i \in \mathbb{R}$ e $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entrada de dimensão d . Então, procuramos uma função $f(\vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$, onde também $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$ são parâmetros de ajuste. Nosso objetivo é que nossa função que tenha um desvio menor que ϵ , ou seja, $|f(\vec{x}_i) - y_i| \leq \epsilon$. O ideal é que a função seja o mais reto possível, mas é necessário incluir alguns

erros. Sendo assim, o problema pode ser descrito como

$$\text{minimize } \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 + C \sum_i (\xi_i + \xi_i^*) \quad (52)$$

$$\text{subject to } \begin{cases} y_i - \vec{w} \cdot \vec{x}_i - b \leq \epsilon + \xi_i \\ \vec{w} \cdot \vec{x}_i + b - y_i \leq \epsilon + \xi_i \\ \xi_i \xi_i^* \geq 0 \end{cases} \quad (53)$$

9 Resultados

Para nossa simulação, foi essencial começar com um estado maximamente emaranhado, visto que esse tipo de estado é o utilizado na medida de não-Markovianidade baseada em emaranhamento. Escolhemos o estado de Bell $\psi = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ como nosso estado inicial, cujo operador densidade é

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Ao longo da simulação, este estado é sujeito a ruídos devido à sua interação com o ambiente, especificamente o erro de amplitude, e passa por um processo de dissipação.

9.1 Erro de amplitude

Uma das consequências de termos um sistema que interage com o ambiente é o surgimento de alguns ruídos, como o erro de amplitude [14], ou *amplitude damping* (AD). A interação com o ambiente faz que a energia seja transferida do sistema para o ambiente, resultando no amortecimento (damping) ou redução da energia ou coerência do sistema. No caso de um qubit, esse erro indica o decaimento do estado excitado para o estado fundamental, de forma que o operador densidade do qubit terá tanto sua coerência quanto suas populações perturbadas.

Dentro do contexto de trabalhar com reservatórios não-Markovianos, que é o foco de nossos estudos, em um sistema de um qubit, com probabilidade de decaimento $p(t)$, o conjunto de operadores de Kraus que pode ser usado para descrever a dinâmica dissipativa é dado por:

$$E_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{p(t)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-p(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo:

$$p(t) = e^{-\lambda t} \left[\frac{\lambda}{d} \sin \frac{dt}{2} + \cos \frac{dt}{2} \right]^2 \quad (55)$$

onde

$$d = \sqrt{2\gamma_0\lambda - \lambda^2} \quad (56)$$

com $\lambda < 2\gamma_0$ para o caso de reservatórios não-Markovianos. A evolução do operador densidade que descreve o sistema é dado, então, pela operação

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho(t) = E_1(t)\rho E_1(t)^\dagger + E_2(t)\rho E_2(t)^\dagger. \quad (57)$$

A figura 1, retirada da referência [14], demonstra como o erro de amplitude (no caso Markoviano) age na esfera de Bloch, onde é visto que a esfera se comprime no estado $|0\rangle$. No caso do reservatório não Markoviano a esfera comprime e dilata com o passar do tempo, resultando no fim da dinâmica também no estado $|0\rangle$.

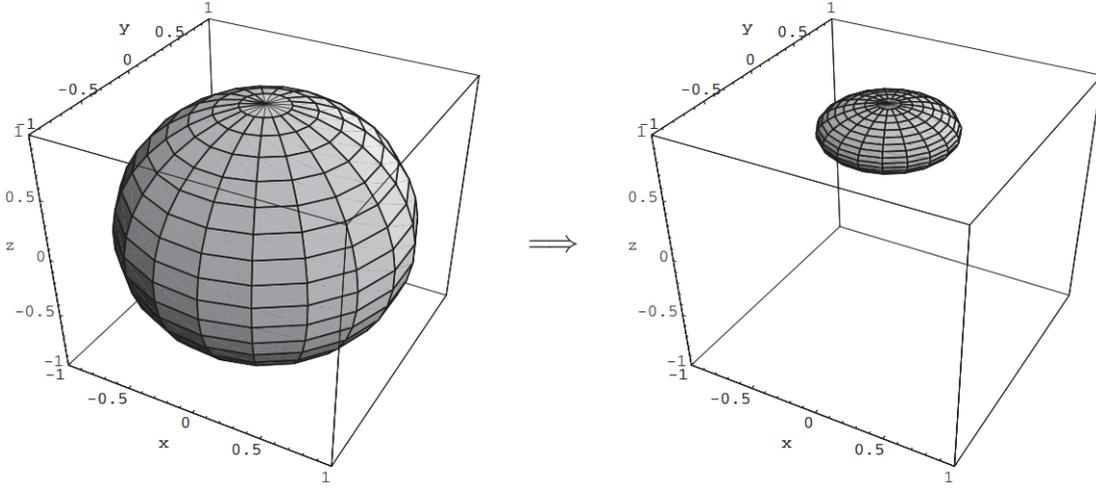


Figura 1: Efeito do erro de amplitude na esfera de Bloch.
A esfera se comprime na região que retrata o estado $|0\rangle$

Como que estamos trabalhando com um canal de erro de amplitude puro, a evolução temporal do nosso operador densidade ocorre seguindo a equação (57). Conforme a ideia introduzida na medida de não Markovianidade, o canal dissipativo é imposto somente ao primeiro qubit. Para isso adaptamos os operadores para $M_i = E_i \otimes I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de dimensão 2. Finalmente, para montar nosso banco de dados que treinou nosso algoritmo, calculamos a dinâmica do nosso sistema aberto utilizando as medidas anteriormente citadas para mensurar o grau de não-Markovianidade. Ao final da evolução temporal, nosso operador densidade se encontrou no estado

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

onde, ao tomarmos o operador densidade do primeiro qubit, tirando o traço parcial, encontramos ele no estado $\rho_1 = |0\rangle\langle 0|$, ou seja, ele se comprimiu em $|0\rangle$ conforme explicado na imagem 9.1. Porém, o que nos interessa é a forma da evolução. Para entender como o sistema evoluiu, nós calculamos o grau de emaranhamento, *concurrence*, para cada instante t e repetimos a dinâmica variando o parâmetro

$\frac{\lambda}{\gamma_0}$ de 0.1 a 3.0. A seguir são mostrados alguns casos de evolução da *concurrence* pelo tempo, e o grau de não-Markovianidade (N) de cada um.

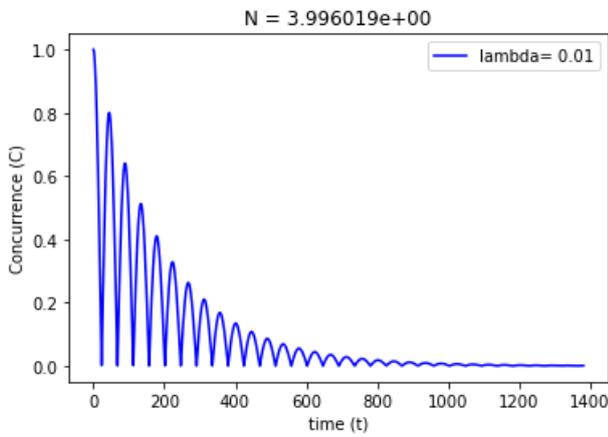


Figura 2

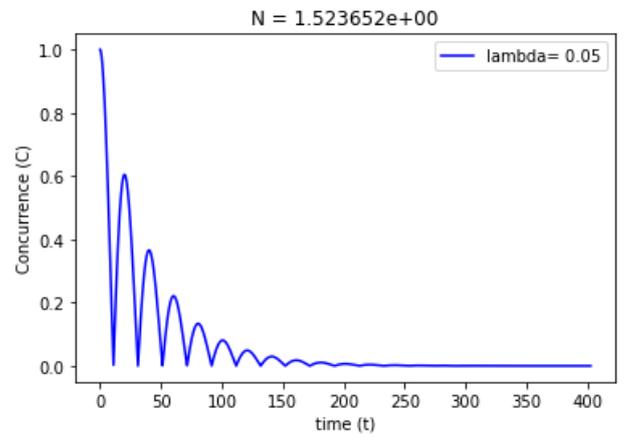


Figura 3

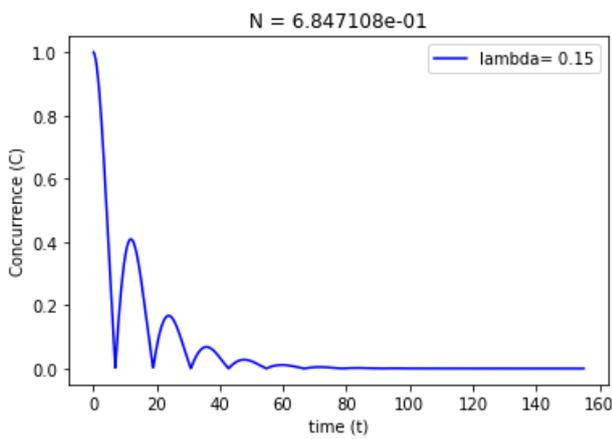


Figura 4

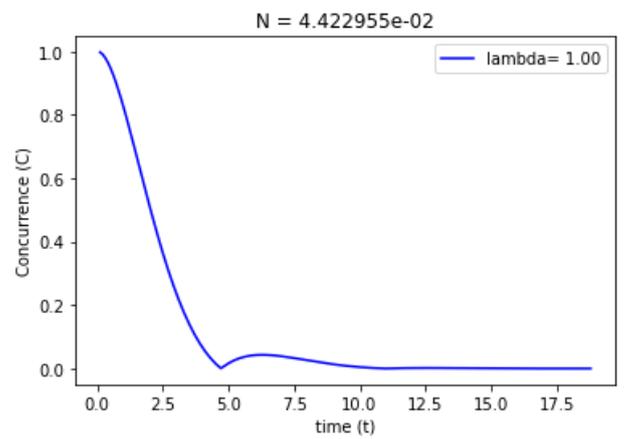


Figura 5

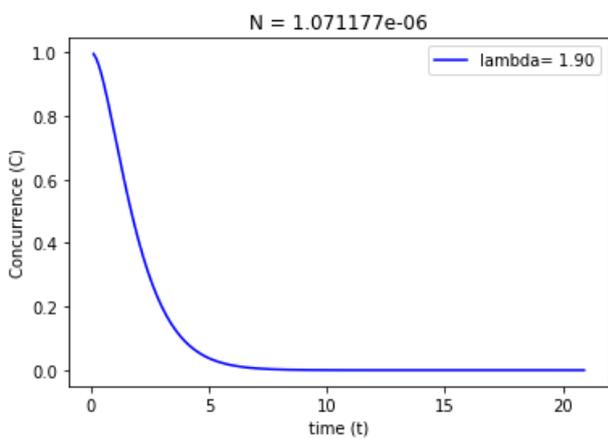


Figura 6

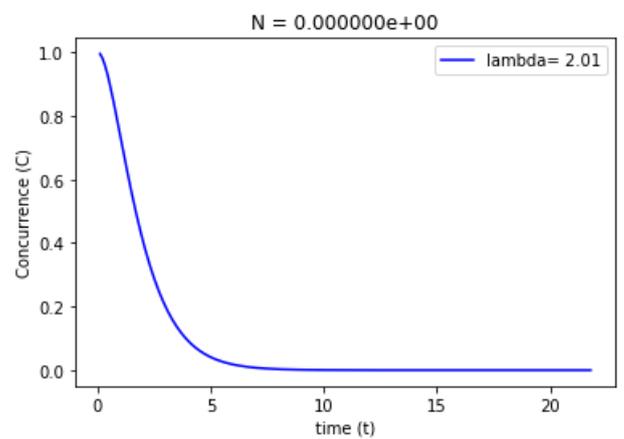


Figura 7

Como podemos observar, antes do estado se comprimir em $|0\rangle$, seu grau de emaranhamento oscila. Essa oscilação depende do parâmetro $\frac{\lambda}{\gamma_0}$, que se encontram nas equações (55 e 56), onde quanto

maior a razão, menor a oscilação e, conseqüentemente, seu grau de não-Markovianidade. Além disso, como podemos observar, quando $\frac{\lambda}{\gamma_0} > 2$ o sistema passa a ser Markoviano. Isso se dá pelo fato constatado por RHP, melhor explicado na seção 6.1, em que é possível medir o grau de não-Markovianidade a partir desses incrementos de emaranhamento temporários no sistema, o que implica que uma diminuição monotônica indica dinâmicas impostas por processos Markovianos. Com isso, a não-Markovianidade pode ser quantificada como:

$$\mathcal{N}_E = \max_{\rho_{AB}(0)} \int_{\frac{dE(t)}{dt} > 0} \frac{dE(t)}{dt} dt, \quad (59)$$

sendo $E(t)$ o emaranhamento entre o sistema principal e o auxiliar e a otimização ocorre sobre todos os estados iniciais do sistema bipartido $\rho_{AB}(0)$.

Na prática, no algoritmo, o cálculo o grau de não-Markovianidade para diferentes $\frac{\lambda}{\gamma_0}$ foi realizado calculando a diferença entre os mínimos e máximos locais e somando-as. Neste sentido, quanto mais oscilatório, mostrado pelos gráficos, maior o grau de não Markovianidade do processo. Além disso, quando o decaimento do emaranhamento é monotônico, ou seja, sem oscilações, o processo é Markoviano. A evolução de $N \times \frac{\lambda}{\gamma_0}$ é mostrada a seguir, onde para $\frac{\lambda}{\gamma_0} > 2$ temos $N = 0$.

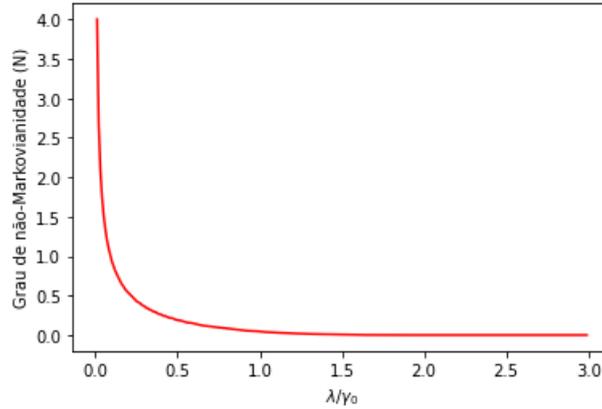


Figura 8: Grau de não Markovianidade do processo dissipativo em função de $\frac{\lambda}{\gamma_0}$.

Para fazermos uso do aprendizado de máquina para determinarmos o grau de não Markovianidade do processo dissipativo, foi gerado o banco de dados para o treinamento do nosso algoritmo de regressão. Para as *features* calculamos os valores esperados O_x , O_y e O_z para tempos fixos t' em nossa dinâmica. Os valores esperados são dados por

$$O_k = \text{Tr}[\sigma_k \rho(t')], \quad (60)$$

com σ_k sendo as matrizes de Pauli e os tempos fixados usados foram $t'_1 = 10$ e $t'_2 = 20$. Os dados de teste são calculados para diversos valores de $\frac{\lambda}{\gamma_0}$. Após rodar o algoritmo de regressão, a máquina apresentou uma boa precisão no cálculo de N , com somente um estado de tomografia, o erro encontrado foi de 9×10^{-3} .

10 Conclusão

Em resumo, neste trabalho estudamos um método prático para estimar o grau de efeitos de memória na dinâmica de sistemas quânticos abertos usando técnicas de aprendizado de máquina baseadas em Support Vector Regression (SVR). O foco do estudo está na medida de não-Markovianidade RHP. Examinamos especialmente o caso de um canal de erro de amplitude e descobrimos que com uma única tomografia de estado quântico pudemos estimar com precisão o valor dos graus de não-Markovianidade. Isso sugere que a abordagem de ML proposta é experimentalmente viável e fornece bons resultados nesse cenário.

Com isso, destacamos o potencial do uso de técnicas de ML, como SVR, para analisar e quantificar efeitos de memória em sistemas quânticos, especificamente no contexto da dinâmica não-Markoviana.

Referências

- [1] Batta Mahesh. “Machine Learning Algorithms -A Review”. Em: (jan. de 2019).
- [2] Tammy Jiang, Jaimie L. Gradus e Anthony J. Rosellini. “Supervised Machine Learning: A Brief Primer”. Em: *Behavior Therapy* 51.5 (2020), pp. 675–687.
- [3] *Experimento descreve efeitos de memória em sistemas quânticos.* <https://agencia.fapesp.br/experimento-descreve-efeitos-de-memoria-em-sistemas-quanticos/19314/>. Accessed: 15-06-2023.
- [4] Heinz-Peter Breuer. “Foundations and measures of quantum non-Markovianity”. Em: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 45.15 (2012), p. 154001.
- [5] Askery Canabarro, Samurá Brito e Rafael Chaves. “Machine Learning Nonlocal Correlations”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 122 (20 2019), p. 200401.
- [6] T. Baumgratz, M. Cramer e M. B. Plenio. “Quantifying Coherence”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 113 (14 2014), p. 140401.
- [7] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso e Martin B. Plenio. “Colloquium: Quantum coherence as a resource”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 89 (4 2017), p. 041003.
- [8] Ángel Rivas, Susana F Huelga e Martin B Plenio. “Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection”. Em: *Reports on Progress in Physics* 77.9 (2014), p. 094001.
- [9] Sally Shrapnel, Fabio Costa e Gerard Milburn. “Quantum Markovianity as a supervised learning task”. Em: *International Journal of Quantum Information* 16.08 (2018), p. 1840010. eprint: <https://doi.org/10.1142/S0219749918400105>.
- [10] I. A. Luchnikov, S. V. Vintskevich, D. A. Grigoriev e S. N. Filippov. “Machine Learning Non-Markovian Quantum Dynamics”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 124 (14 2020), p. 140502.

- [11] William K. Wootters. “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 80 (10 1998), pp. 2245–2248.
- [12] Qiskit Development Team. *Tomografia Quântica*. 2021. URL: https://qiskit.org/documentation/locale/pt_BR/tutorials/noise/8_tomography.html.
- [13] *A nova onda dos qubits*. <https://revistapesquisa.fapesp.br/a-nova-onda-dos-qubits/>. Accessed: 15-06-2023.
- [14] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] João Carlos Alves Barata, M Brum, V Chabu e Ricardo Correa da Silva. “Pure and mixed states”. Em: *Brazilian Journal of Physics* (2020).
- [16] A.G. REDFIELD. “The Theory of Relaxation Processes* *This work was started while the author was at Harvard University, and was then partially supported by Joint Services Contract N5ori-76, Project Order I.” Em: *Advances in Magnetic Resonance*. Ed. por John S. Waugh. Vol. 1. Advances in Magnetic and Optical Resonance. Academic Press, 1965, pp. 1–32.
- [17] G. Lindblad. “On the generators of quantum dynamical semigroups”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (jun. de 1976), pp. 119–130.
- [18] K. Kraus, A. Böhm e J.D. Dollard. *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory*. Lecture notes in physics. Springer, 1983.
- [19] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine e Jyrki Piilo. “Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems”. Em: *Physical Review Letters* 103.21 (2009).
- [20] Shunlong Luo, Shuangshuang Fu e Hongting Song. “Quantifying non-Markovianity via correlations”. Em: *Phys. Rev. A* 86 (4 2012), p. 044101.
- [21] Ángel Rivas, Susana F Huelga e Martin B Plenio. “Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection”. Em: *Reports on Progress in Physics* 77.9 (2014), p. 094001.
- [22] Sam A. Hill e William K. Wootters. “Entanglement of a Pair of Quantum Bits”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 78 (26 1997), pp. 5022–5025.
- [23] Jair Cervantes, Farid Garcia-Lamont, Lisbeth Rodríguez-Mazahua e Asdrubal Lopez. “A comprehensive survey on support vector machine classification: Applications, challenges and trends”. Em: *Neurocomputing* 408 (2020), pp. 189–215.
- [24] Alex Smola e Bernhard Scholkopf. “A tutorial on support vector regression”. Em: *Statistics and Computing* 14 (2004), pp. 199–222.