Prova de que os termos em y_2 que são proporcionais a c_N formam uma solução proporcional a y_1 no caso em que $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{Z}$

Consideremos o caso em que

$$r_1 - r_2 \quad = \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Por que vamos encontrar que c_N é indeterminado? Para responder essa questão, vamos notar o procedimento de Frobenius para esse caso. Temos a equação diferencial

$$\mathcal{L}y\left(x\right) \quad = \quad 0,$$

com

$$\mathcal{L} \quad = \quad \frac{d^2}{dx^2} + p\left(x\right)\frac{d}{dx} + q\left(x\right).$$

O ansatz que usamos é

$$y_2 \quad = \quad b_0 y_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

com $c_0 = 1$ quando escolhemos $a_0\left(r\right) = 1$. Primeiro, vamos considerar a situação em que temos

$$y\left(r, x\right) \quad = \quad b_0 y_1 \ln x + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(r\right) x^n.$$

Depois vamos fazer $r \to r_2$ e ver o que isso acarreta como consequência para $c_N\left(r\right)$. O procedimento de Frobenius, antes de tomar o limite em que $r \to r_2$, é substituir esse ansatz na equação:

$$\mathcal{L}y\left(r, x\right) \quad = \quad 0.$$

O resultado dá

$$b_0 \mathcal{L}\left(y_1 \ln x\right) + \mathcal{L}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(r\right) x^n\right) \quad = \quad 0. \tag{1}$$

Para entender o que acontece agora, vamos rever o que fizemos nas aulas 21 e 22

Revisão das aulas 21 e 22

O primeiro passo foi usar o ansatz básico,

$$y\left(r, x\right) \quad = \quad x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(r\right) x^n,$$

substituído na equação diferencial. Então, vamos querer calcular $\mathcal{L}y\left(r, x\right)$ e, só depois, igualar a zero. Isso foi o que fizemos nas aulas 21 e 22. Antes, porém, usamos também as séries:

$$xp\left(x\right) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Aí, obtivemos um resultado que ficou assim:

$$\mathcal{L}y(r,x) \quad = \quad F(r)\, a_0(r)\, x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)\, a_n(r) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] a_j(r) \right\} x^{n+r},$$

onde definimos

$$F(r) \quad = \quad r(r-1) + p_0 r + q_0.$$

Já podemos tomar $a_0(r) = 1$, obtendo:

$$\mathcal{L}y(r,x) \quad = \quad F(r)\, x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)\, a_n(r) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] a_j(r) \right\} x^{n+r}. \qquad (2)$$

Nas aulas 21 e 22, já impusemos que esse resultado fosse igual a zero e depois analisamos o resultado. Isso é tudo que fizemos naquelas aulas. Fim da revisão das aulas 21 e 22. ■

Agora que fizemos a revisão das aulas 21 e 22, notemos o que temos acima, na Eq. (1) de agora. Queremos encontrar

$$\mathcal{L}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)\, x^n \right).$$

Exceto pelo fato de que agora temos $c_n(r)$ como os nomes de nossos coeficientes, com $c_0(r) = 1$, como já discutimos anteriormente, estamos fazendo exatamente o que fizemos nas aulas 21 e 22. Podemos, portanto, usar a própria Eq. (2) da revisão, substituída na nossa Eq. (1) de agora, só trocando os $a_n(r)$ pelos nossos $c_n(r)$ de agora e obtemos:

$$b_0 \mathcal{L}(y_1 \ln x) + F(r)\, x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)\, c_n(r) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j(r) \right\} x^{n+r} \quad = \quad 0.$$

Queremos agora tomar o limite dessa equação em que $r \to r_2$. O resultado dá

$$b_0 \mathcal{L}(y_1 \ln x) + F(r_2)\, x^{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n(r_2) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j(r_2) \right\} x^{n+r_2} \quad = \quad 0.$$

Como r_2 é uma das raízes, temos $F(r_2) = 0$. Então,

$$b_0 \mathcal{L}(y_1 \ln x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n+r_2} \quad = \quad 0,$$

onde, para simplificar, já estamos escrevendo $c_n = c_n(r_2)$.

Também precisamos escrever $\mathcal{L}(y_1 \ln x)$. Então, notemos que

$$\frac{d}{dx}(y_1 \ln x) = y_1' \ln x + \frac{1}{x} y_1.$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(y_1 \ln x) &= \frac{d}{dx}(y_1' \ln x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} y_1\right) \\ &= y_1'' \ln x + \frac{2}{x} y_1' - \frac{1}{x^2} y_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_1 \ln x) &= \frac{d^2}{dx^2}(y_1 \ln x) + p(x) \frac{d}{dx}(y_1 \ln x) + q(x) y_1 \ln x \\ &= y_1'' \ln x + \frac{2}{x} y_1' - \frac{1}{x^2} y_1 + p(x)\left(y_1' \ln x + \frac{1}{x} y_1\right) + q(x) y_1 \ln x \\ &= [y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] \ln x + \frac{2}{x} y_1' - \frac{1}{x^2} y_1 + p(x) \frac{1}{x} y_1 \\ &= \frac{2}{x} y_1' - \frac{1}{x^2} y_1 + p(x) \frac{1}{x} y_1. \end{aligned}$$

Mas,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$$

e

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r_1) a_n x^{n+r_1-1}.$$

Então,

$$\mathcal{L}(y_1 \ln x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r_1) a_n x^{n+r_1-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1-2} + p(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1-1}.$$

Como

$$x p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m,$$

segue que

$$\mathcal{L}(y_1 \ln x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r_1) a_n x^{n+r_1-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_m a_n x^{m+n+r_1-2}.$$

Vemos que essa série toda começa com a potência mais baixa x^{r_1-2}. Podemos escrever:

$$\mathcal{L}(y_1 \ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^{n+r_1-2}.$$

Aqui, quando escolhemos $a_0 = 1$, porque já resolvemos y_1, temos todos os coeficientes a_n e, portanto, todos os coeficientes ℓ_n ficam determinados. Voltando à série y_2, ficamos com

$$b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^{n+r_1-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n+r_2} = 0.$$

Dividimos tudo por x^{r_2} e obtemos:

$$b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^{n+r_1-r_2-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n} = 0.$$

Como $r_1 - r_2 = N$, segue que

$$b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^{n+N-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^{N-2} &= \ell_0 x^{N-2} + \ell_1 x^{N-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \ell_n x^{n+N-2} \\ &= \ell_0 x^{N-2} + \ell_1 x^{N-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{n+2} x^{n+N}, \end{aligned}$$

podemos escrever:

$$b_0 \ell_0 x^{N-2} + b_0 \ell_1 x^{N-1} + b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{n+2} x^{n+N} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n} = 0.$$

Podemos quebrar em dois pedaços essa equação:

$$b_0 \ell_0 x^{N-2} + b_0 \ell_1 x^{N-1} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n} = 0$$

e

$$b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{n+2} x^{n+N} + \sum_{n=N}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j \right\} x^{n} = 0.$$

O primeiro pedaço vai dar todos os coeficientes c_n para $n = 1, \ldots, N-1$ em termos de b_0 e $c_0 = 1$. O segundo pedaço vai dar

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left\{ F(r_2+n)\, c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r_2)\, p_{n-j} + q_{n-j} \right] c_j + b_0 \ell_{n-N+2} \right\} x^{n} = 0.$$

A fórmula de recorrência, portanto, para $n \geqslant N$, fica

$$F\left(r_2+n\right)c_n = -\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r_2\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]c_j - b_0\ell_{n-N+2}.$$

Já temos, em termos de b_0 e $c_0 = 1$, todos os c_n, para $n = 1, 2, \ldots, N-1$, usando o pedaço anterior. Quando $n = N$, segue que

$$F\left(r_2+N\right)c_N = -\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(j+r_2\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]c_j - b_0\ell_2.$$

Mas,

$$\begin{aligned} F\left(r_2+N\right) &= F\left(r_1\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Essa equação, portanto, vai dar uma equação envolvendo b_0, caso ainda não tenha sido determinado pela auto-consistência do primeiro pedaço. E vemos que c_N pode ser qualquer valor e é, portanto, uma constante arbitrária. A partir desse valor de n, os demais c_n, com $n > N$, vão ser determinados pelos valores anteriores, inclusive pelo valor escolhido de c_N.

Vamos olhar agora todos os termos que são proporcionais a c_N. Consideremos o caso $n = N+1$. A fórmula de recorrência fica:

$$F\left(r_2+N+1\right)c_{N+1} = -\sum_{j=0}^{N}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+1-j}+q_{N+1-j}\right]c_j - b_0\ell_3.$$

Vamos dividir agora cada c_n, para $n > N$, em dois pedaços: um que é proporcional a c_N, que vamos chamar de d_n, e outro que não é proporcional a c_N, que vamos chamar de g_n. Nesse caso, temos:

$$F\left(r_1+1\right)d_{N+1} = -\left(r_1p_1+q_1\right)c_N.$$

Vamos certamente ter, então,

$$c_{N+1} = d_{N+1}+g_{N+1}.$$

Para $n = N+2$, obtemos:

$$F\left(r_1+2\right)c_{N+2} = -\sum_{j=0}^{N+1}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+2-j}+q_{N+2-j}\right]c_j - b_0\ell_4.$$

Então,

$$F\left(r_1+2\right)d_{N+2} = -\sum_{j=N}^{N+1}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+2-j}+q_{N+2-j}\right]d_j,$$

já que d_{N+1} é proporcional a c_N. Verifiquemos agora o caso $n = N+3$. A fórmula de recorrência agora fica:

$$F\left(r_2+N+3\right)c_{N+3} = -\sum_{j=0}^{N+2}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+3-j}+q_{N+3-j}\right]c_j - b_0\ell_5.$$

Com isso,

$$F\left(r_1+3\right)d_{N+3} \quad = \quad -\sum_{j=N}^{N+2}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+3-j}+q_{N+3-j}\right]d_j,$$

já que d_{N+1} e d_{N+2} são proporcionais a c_N. Em geral, portanto, podemos estabelecer a fórmula de recorrência para toda a série que é proporcional a c_N. Logo, obtemos, com a inferência dos resultados acima, que

$$\begin{aligned} F\left(r_1+n\right)d_{N+n} &= -\sum_{j=N}^{N+n-1}\left[\left(j+r_2\right)p_{N+n-j}+q_{N+n-j}\right]d_j \\ &= -\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+N+r_2\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]d_{N+j}, \end{aligned}$$

onde fizemos $j \to j+N$ na soma. Vamos definir, então os coeficientes:

$$\alpha_n \quad \equiv \quad d_{N+n}.$$

Nesse caso, nossa fórmula de recorrência acima dá

$$F\left(r_1+n\right)\alpha_n \quad = \quad -\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r_1\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]\alpha_j.$$

Mas, esse resultado é exatamente aquele que obtemos para a primeira solução. Para ver que isso é verdade, olhemos para a Eq. (2) da revisão. Basta fazer $r \to r_1$ nessa equação e impor que cada coeficiente de x^{n+r_1} seja nulo para obermos:

$$F\left(r_1+n\right)a_n\left(r_1\right) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r_1\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_j\left(r_1\right).$$

Logo, mostramos que os termos em y_2 que forem proporcionais a c_N formam a série $c_N y_1$, com $a_0=1$.