Método do wronskiano para a segunda solução

Uma vez encontrada a primeira solução,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= x^2 \exp(-x), \end{aligned}$$

podemos, alternativamente, tentar usar o método do wronskiano para obter uma segunda solução, y_2. Para isso, vemos que o wronskiano é definido como:

$$W(x) \equiv y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1(x)}{dx}.$$

Como $y_1(x)$ já é uma função determinada, podemos dividir a definição do wronskiano acima por $y_1(x)$, obtendo:

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - \left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx}\right] y_2(x) = \frac{W(x)}{y_1(x)}.$$

Para resolver esta equação ordinária de primeira ordem, podemos usar o método do fator integrante, isto é, encontrar uma função de x, digamos $\mu(x)$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\mu(x) y_2(x)\right] &= \mu(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - \left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx}\right] \mu(x) y_2(x) \\ &= \mu(x) \frac{W(x)}{y_1(x)}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x) y_2(x)\right] = \mu(x) \frac{d}{dx} y_2(x) + y_2(x) \frac{d}{dx} \mu(x),$$

vemos que a equação que dá o fator integrante, $\mu(x)$, fica:

$$\frac{d}{dx}\mu(x) = -\left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx}\right] \mu(x),$$

isto é,

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d}{dx}\mu(x) + \frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|\mu(x)| + \ln|y_1(x)|\right] = 0,$$

ou ainda,

$$\ln|\mu(x)| + \ln|y_1(x)| = C_0,$$

onde C_0 é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\ln|\mu(x)\, y_1(x)| = C_0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} |\mu(x)\, y_1(x)| &= \exp(C_0) \\ &= C_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu(x) = \frac{C_2}{y_1(x)}.$$

Como a multiplicação da equação toda por $\mu(x)$ não vai ter dependência com C_2, basta tomarmos $C_2 = 1$. Logo,

$$\mu(x) = \frac{1}{y_1(x)}$$

e, assim, da igualdade

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\, y_2(x)\right] = \mu(x)\, \frac{W(x)}{y_1(x)}$$

segue que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] = \frac{W(x)}{[y_1(x)]^2}.$$

Integrando, indefinidamente, temos:

$$y_2(x) = y_1(x) \int dx\, \frac{W(x)}{[y_1(x)]^2},$$

onde ignoramos a constante de integração porque sua manutenção apenas incorpora uma contaminação irrelevante da segunda solução com a primeira solução $y_1(x)$.

E o wronskiano? Como vamos calculá-lo? É simples, derivando a definição do wronskiano, vem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(x) &= \frac{d}{dx}\left[y_1(x)\, \frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x)\, \frac{dy_1(x)}{dx}\right] \\ &\quad + \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{dy_2(x)}{dx} + y_1(x)\, \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} \\ &\quad - \frac{dy_2(x)}{dx} \frac{dy_1(x)}{dx} - y_2(x)\, \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} \\ &= y_1(x)\, \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} - y_2(x)\, \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Da equação diferencial dada, sabemos que

$$\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + q(x)\, y_1(x) = 0$$

e

$$\frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy_2(x)}{dx} + q(x)\, y_2(x) = 0.$$

Multiplicando a primeira destas equações por $y_2(x)$ e a segunda por $y_1(x)$, dá:

$$y_2(x)\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + p(x)\, y_2(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + q(x)\, y_2(x)\, y_1(x) = 0$$

e

$$y_1(x)\frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + p(x)\, y_1(x)\frac{dy_2(x)}{dx} + q(x)\, y_1(x)\, y_2(x) = 0.$$

Subtraindo a primeira destas duas da segunda, ficamos com

$$\begin{aligned} y_1(x)\frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} - y_2(x)\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} &= -p(x)\left[y_1(x)\frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1(x)}{dx}\right] \\ &= -p(x)\, W(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, a equação que dá o wronskiano fica:

$$\frac{d}{dx}W(x) = -p(x)\, W(x)$$

e, assim,

$$W(x) = \exp\left[-\int dx\, p(x)\right],$$

onde escolhemos a constante arbitrária arbitrariamente como sendo 1, por ser irrelavante.

Logo, no caso que tratamos nessas aulas de sobre nossos passos, teremos:

$$\begin{aligned} W(x) &= \exp\left[-\int dx\left(1 - \frac{2}{x}\right)\right] \\ &= \exp(-x + 2\ln x) \\ &= \exp(-x)\exp(2\ln x) \\ &= \exp(-x)\exp\left(\ln x^2\right) \\ &= x^2 \exp(-x) \\ &= y_1(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y_2^W(x) &= y_1(x)\int dx\, \frac{y_1(x)}{[y_1(x)]^2} \\ &= y_1(x)\int dx\, \frac{1}{y_1(x)} \\ &= x^2\exp(-x)\int dx\, \frac{\exp(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Aqui estamos usando $y_2^W(x)$ para explicitar que essa é a segunda solução obtida através do método do Wronskiano. Vemos que essa solução não se parece com a que obtivemos pelo método de Frobenius, que é dada por:

$$y_2^F(x) = -x^2 \exp(-x) \ln x + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^{n+2}.$$

Aqui, usamos $y_2^F(x)$ para indicar que essa é a segunda solução obtida pelo método de Frobenius. Precisamos, então, mostrar que podemos transformar o que obtivemos acima para $y_2^W(x)$ no resultado $y_2^F(x)$.

Olhando a forma da solução $y_2^W(x)$, podemos fazer aparecer o logaritmo notando o seguinte:

$$\begin{aligned}
\int dx \, \frac{\exp(x)}{x^2} &= \int dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2} \\
&= \int dx \, x^{-2} + \int dx \, x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2} \\
&= -\frac{1}{x} + \ln x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y_2^W(x) &= -x \exp(-x) + x^2 \exp(-x) \ln x + x^2 \exp(-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2} \\
&= x^2 \exp(-x) \ln x - x \exp(-x) + x^2 \exp(-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2} \\
&= x^2 \exp(-x) \ln x - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + x^2 \exp(-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2} \\
&= x^2 \exp(-x) \ln x - x - x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + x^2 \exp(-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx \, x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Agora podemos usar uma "mágica" que é notar que

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = -x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n$$