Passo 11: use a série encontrada no passo 10 para achar a fórmula de recorrência para a segunda solução

Agora que temos o ansatz completo em forma de série, isto é,

$$y_2 = b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

aplicamos $\mathcal{L}$ em ambos os membros desta equação e impomos que este resultado deve ser igual a zero. Assim, obtemos:

$$b_0 \mathcal{L}\left[x^2 \exp(-x) \ln x\right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L} x^{n+1} = 0.$$

Mas, dos passos 9 e 10 que acabamos de seguir, esta equação fica:

$$b_0 (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L} x^{n+1} = 0.$$

Também podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} x^{n+1} &= \frac{\partial^2 x^{n+1}}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x} + \frac{2x^{n+1}}{x^2} \\
&= (n+1) n x^{n-1} + (n+1)\left(x^n - 2x^{n-1}\right) + 2x^{n-1} \\
&= \left(n^2 + n + 2\right) x^{n-1} + (n+1) x^n - 2(n+1) x^{n-1} \\
&= \left(n^2 + n + 2 - 2n - 2\right) x^{n-1} + (n+1) x^n \\
&= \left(n^2 - n\right) x^{n-1} + (n+1) x^n \\
&= n(n-1) x^{n-1} + (n+1) x^n
\end{aligned}$$

e, assim, temos:

$$b_0 (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (n-1) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^n = 0,$$

isto é,

$$b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) x^{n-1} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+1) x^n = 0,$$

ou seja,

$$b_0 + c_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1) n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+1) x^n = 0,$$

ou ainda,

$$b_0 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_0 \frac{(-1)^n}{n!} + b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + c_{n+1} (n+1) n + c_n (n+1) \right] x^n = 0.$$

Como todos os coeficientes das diferentes potências de x têm que se anular, temos:

$$b_0 + c_0 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_0 &= -c_0 \\ &= -1, \end{aligned}$$

pois, como vamos explicar a seguir, $c_0 = a_0$ e já escolhemos $a_0 = 1$. Para $n \geqslant 1$,

$$b_0 \frac{(-1)^n}{n!} + b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + c_{n+1} (n+1) n + c_n (n+1) = 0,$$

isto é,

$$c_{n+1} (n+1) n = -b_0 \frac{(-1)^n}{n!} - b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} - c_n (n+1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{(-1)^n}{n (n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n (n+1) (n-1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(n+1) n (n-1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^n}{(n+1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} - \frac{c_n}{n}. \end{aligned}$$

Passo 12: encontre o termo geral para a segunda solução

Usando a fórmula de recorrência que acabamos de encontrar, notemos que podemos agora reiterá-la para obter:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} - \frac{1}{n} c_n \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} - \frac{1}{n} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)(n-1)!} - \frac{1}{n-1} c_{n-1} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} - \frac{(-1)^{n-1}}{n (n-1)(n-1)!} + \frac{1}{n (n-1)} c_{n-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1) n!} + \frac{1}{n (n-1)} c_{n-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1) n!} + \frac{1}{n (n-1)} \left[\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)(n-2)!} - \frac{1}{n-2} c_{n-2} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1) n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2) n!} - \frac{1}{n (n-1)(n-2)} c_{n-2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!} - \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}\left[\frac{(-1)^{n-3}}{(n-3)\,(n-3)!} - \frac{1}{n-3}c_{n-3}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-3)\,n!} + \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}c_{n-3}
\end{aligned}
$$

e, portanto, podemos inferir que o termo geral fica:

$$
c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!}c_1. \tag{1}
$$

Pequena digressão: por que $c_0 = a_0$, onde a_0 é o coeficiente que aparece na primeira solução?

Para responder essa questão, vamos lembrar que

$$
y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
$$

Aí, como vimos, o ansatz para a segunda solução, nesse caso em que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+$, é

$$
y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.
$$

Na aula 23, do dia 3 de junho de 2024, vimos que a definição dos coeficientes c_n era obtida da série que obtemos quando não especificamos a raiz, mas deixamos a raiz como r, sem dizer se é r_1 ou r_2. Lá, tínhamos a definição

$$
c_n \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_2)\,a_n\,(r)\right]\right\}_{r=r_2}.
$$

No entanto, a_0 é uma constante e, assim, não depende de r. Logo, calculemos c_0 com essa definição:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_2)\,a_0\right]\right\}_{r=r_2} \\
&= a_0\left[\frac{\partial}{\partial r}(r - r_2)\right]_{r=r_2} \\
&= a_0,
\end{aligned}
$$

como usamos acima, onde escolhemos $a_0 = 1$. ■

Passo 13: verifique que o termo geral está correto por indução matemática

Vamos checar primeiro que o termo geral,

$$
c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!}c_1, \tag{2}
$$

Eq. (2), vale para $n = 1$:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(-1)^1}{1!}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^1}{1!}c_1 \\ &= -1 - c_1, \end{aligned}$$

que está de acordo com

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} - \frac{1}{n}c_n. \tag{3}$$

Vamos agora para a segunda etapa da indução matemática. Caso tenhamos agora, a fórmula válida para $n = p$, vejamos se continua válida para $n = p + 1$. Então, vamos supor que a Eq. (2), de fato, valha para $n = p$:

$$c_{p+1} = \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^p}{p!}c_1. \tag{4}$$

Pela Eq. (3), quando $n = p + 1$, temos:

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)\,(p+1)!} - \frac{1}{p+1}c_{p+1}.$$

Como, por hipótese, a Eq. (4) deve valer para $n = p$, vamos substituí-la nesta expressão que acabamos de obter para c_{p+2} :

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)\,(p+1)!} - \frac{1}{p+1}\left[\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^p}{p!}c_1\right],$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_{p+2} &= \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)\,(p+1)!} - \frac{1}{p+1}\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} - \frac{1}{p+1}\frac{(-1)^p}{p!}c_1 \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)\,(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{p+2} = \left(\frac{1}{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1,$$

ou ainda,

$$c_{p+2} = \left(\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{k}\right)\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1.$$

Logo, vemos que

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1,$$

que é, exatamente, a Eq. (2), para $n = p + 1$.

Passo 14: determine o que fazer com os termos proporcionais ao coeficiente indeterminado c_1

Agora vamos, então, escrever a segunda solução com o que temos até agora:

$$\begin{aligned} y_2 &= b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= -x^2 \exp(-x) \ln x + c_0 x + c_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= -x^2 \exp(-x) \ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} x^{n+2} \end{aligned}$$

e, usando agora a Eq. (1), vem:

$$\begin{aligned} y_2 &= -x^2 \exp(-x) \ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!} c_1 \right] x^{n+2} \\ &= -x^2 \exp(-x) \ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^{n+2} + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2}. \end{aligned}$$

Notemos, no entanto, que se somarmos os termos que são todos proporcionais a c_1, vem:

$$\begin{aligned} c_1 x^2 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} &= c_1 x^2 + c_1 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= c_1 x^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right] \\ &= c_1 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= c_1 x^2 \exp(-x). \end{aligned}$$

Vemos, assim, que os termos proporcionais à constante que não havia sido determinada, c_1, dão a primeira solução e, portanto, não acrescentam nada linearmente independente à primeira solução. Escolhemos, portanto,

$$c_1 = 0.$$

Passo 15: escreva a segunda solução

A segunda solução, finalmente, fica:

$$y_2 = -x^2 \exp(-x) \ln x + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^{n+2}.$$