

Passo 5: determine qual raiz usar na primeira solução e qual é o caso para a segunda solução

Para a primeira solução, devemos usar a maior das raízes acima, já que são distintas. Logo, a primeira solução será encontrada por uma série de Frobenius com $r_1 = 2$. Já para a segunda solução, vemos que

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 2 - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

que é um inteiro. Logo, a segunda solução será encontrada se utilizarmos uma série em que temos um coeficiente a ser encontrado para o termo proporcional a $\ln x$. (Lembre-se que se as raízes fossem idênticas, aí o coeficiente não precisaria ser encontrado e já seria dado: seria igual à unidade.)

Passo 6: determine a fórmula de recorrência para a primeira solução

Agora utilizamos a série:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \end{aligned}$$

que, neste caso em que $r_1 = 2$, fica:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}.$$

Encontremos as derivadas:

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1}$$

e

$$y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n.$$

Substituindo na equação diferencial dada, vem:

$$\begin{aligned} &x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n \\ &+ (x^2 - 2x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1} \\ &\quad + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+3} \\
& - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} \\
& + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
2a_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+3} \\
- 4a_0 x^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} \\
2a_0 x^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n-1} x^{n+2} \\
& - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(n+2)(n+1) a_n - 2(n+2) a_n + 2a_n + (n+1) a_{n-1} = 0,$$

isto é,

$$[(n+2)(n-1)+2] a_n + (n+1) a_{n-1} = 0,$$

ou seja,

$$n(n+1)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0,$$

ou ainda,

$$na_n + a_{n-1} = 0,$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. A fórmula de recorrência é, portanto,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n},$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Passo 7: encontre a série da primeira solução, já incluindo a expressão do n -ésimo coeficiente da série

Vejamos:

$$a_1 = -a_0,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_1}{2} \\ &= \frac{a_0}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_2}{3} \\ &= -\frac{a_0}{3 \cdot 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_3}{4} \\ &= \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{a_4}{5} \\ &= -\frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \end{aligned}$$

etc. Vemos claramente que o coeficiente geral é dado por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0.$$

Como é convencional, usamos

$$a_0 \equiv 1$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

é a fórmula para o n -ésimo coeficiente. A série fica, portanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= x^2 \exp(-x), \end{aligned}$$

já que neste caso particular sabemos qual é o resultado da soma infinita.

Passo 8: escreva o ansatz para a segunda solução

Para a segunda solução, utilizamos o seguinte ansatz:

$$y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

que, neste particular exercício, fica:

$$\begin{aligned} y_2 &= b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \end{aligned}$$

onde, porque fizemos $a_0 = 1$, temos:

$$c_0 = 1.$$

Temos, portanto, que encontrar todos os outros c_n 's e o coeficiente b_0 .