O truque é mostrar que

$$y_2(x) = \lim_{r\to r_2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y(x,r)\right]\right\} \tag{1}$$

é uma solução da equação diferencial dada e que é linearmente independente de $y_1(x)$. Vimos que a Eq. (2),

$$y(x,r) = x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)\,x^n\right), \tag{2}$$

é uma solução e, portanto,

$$\mathcal{L}y(x,r) = F(r)\,x^r,$$

com $a_0(r)=1$. Como $\mathcal{L}$ não atua em r, segue que vale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[(r-r_2)\,y(x,r)\right] &= (r-r_2)\,F(r)\,x^r \\ &= (r-r_1)\,(r-r_2)^2\,x^r.\end{aligned}$$

Também podemos derivar com relação a r e comutar $\mathcal{L}$ com $\partial/\partial r$ sem problemas. Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y(x,r)\right]\right\} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_1)\,(r-r_2)^2\right]x^r \\ &= (r-r_2)^2\,x^r+2\,(r-r_1)\,(r-r_2)\,x^r.\end{aligned}$$

Com isso, no limite em que $r\to r_2$, obtemos:

$$\mathcal{L}\left\{\lim_{r\to r_2}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y(x,r)\right]\right\} = 0,$$

que, pela Eq. (1), demonstra que

$$\mathcal{L}y_2(x) = 0.$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y(x,r)\right] &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\,x^n\right] \\ &= \left[(r-r_2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\,x^n\right]\frac{\partial}{\partial r}x^r \\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}x^r\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,a_n(r)\right]x^n \\ &= \left[(r-r_2)\,y(x,r)\right]\ln x \\ &\quad+x^r\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,a_n(r)\right]\right\}x^n,\end{aligned}$$

onde usamos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} x^r &= \frac{\partial}{\partial r} \exp\left[\ln\left(x^r\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \exp\left[r \ln(x)\right] \\
&= \ln(x) \exp\left[r \ln(x)\right] \\
&= \ln(x)\, x^r.
\end{aligned}
$$

Com isso, tomamos o limite em que $r \to r_2$ e obtemos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to r_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2)\, y(x, r)\right] \right\} &= \lim_{r\to r_2} \left[(r - r_2)\, y(x, r)\right] \ln x \\
&\quad + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{r\to r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2)\, a_n(r)\right] \right\} x^n, \\
&= b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,
\end{aligned}
$$

onde usamos a Eq. (3),

$$
\lim_{r\to r_2} \left[(r - r_2)\, y(x, r)\right] = b_0 y_1, \tag{3}
$$

e definimos novos coeficientes por

$$
c_n = \lim_{r\to r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2)\, a_n(r)\right]. \tag{4}
$$

Resumindo,

$$
y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{5}
$$

Aqui, b_0 é mais um coeficiente a ser determinado se usarmos a Eq. (5) como um ansatz para a segunda solução da equação diferencial dada. Porém, podemos calcular b_0 usando a Eq. (6),

$$
b_0 = \lim_{r\to r_2} \left[(r - r_2)\, a_N(r)\right], \tag{6}
$$

caso tenhamos a forma analítica de $a_N(r)$. Se tivermos realmente calculado todos os coeficientes $a_n(r)$, então segue que podemos obter todos os novos coeficientes c_n usando a Eq. (4).

Exemplo passo a passo

Encontre duas soluções linearmente independentes, em torno de $x_0 = 0$, para a seguinte equação diferencial:

$$
x^2 y'' + \left(x^2 - 2x\right) y' + 2y = 0.
$$

Passo 1: escreva as funções $p(x)$ e $q(x)$

Para encontrar p e q, vemos que precisamos dividir tudo por x^2 :

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right) y' + \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Aí achamos que

$$p(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

e

$$q(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Passo 2: econtre as funções $f(x) = xp(x)$ e $g(x) = x^2 q(x)$

Agora calculamos as funções f e g :

$$\begin{aligned} f(x) &= xp(x) \\ &= x - 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 q(x) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Passo 3: determine se o ponto em torno do qual você quer as soluções é singular essencial, singular regular ou ordinário

Vejamos: ambas as funções p e q são singulares em $x = 0$. No entanto, ambas as funções f e g são analíticas em $x = 0$. Logo, porque há pelo menos uma das funções p e q singular, mas ambas as funções f e g são analíticas, temos uma singularidade regular e basta utilizarmos o método de Frobenius para resolver, pelo menos para uma das soluções.

Passo 4: encontre os possíveis valores de r

Vamos então resolver a equação para r :

$$r(r-1) + f(0)r + g(0) = 0,$$

isto é,

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0,$$

ou seja,

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

que resulta em duas raízes:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{3+\sqrt{9-8}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{3-\sqrt{9-8}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$