Na aula passada tínhamos chegado ao resultado:

$$\begin{aligned} & [r(r-1)+rp_0+q_0]\,a_0x^r \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+(n+r)p_0+q_0]\,a_nx^{n+r} \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}[(j+r)p_{n-j}+q_{n-j}]\,a_jx^{n+r} = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & F(r)\,a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}F(r+n)\,a_nx^{n+r} \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}[(j+r)p_{n-j}+q_{n-j}]\,a_jx^{n+r} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(r)\,a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)\,a_n+\sum_{j=0}^{n-1}[(j+r)p_{n-j}+q_{n-j}]\,a_j\right\}x^{n+r} = 0, \tag{1}$$

que é o resultado do livro-texto. Como esta equação deve valer para todo x em um intervalo em torno de $x_0=0$, temos que ter

$$F(r) = 0,$$

já que estamos supondo que $a_0\neq 0$. Esta é a **equação indicial**, que já vimos antes, e que fornece as duas raízes r_1 e r_2. Estes números são os **expoentes em torno da singularidade**, isto é, a maneira como a solução vai se aproximar de $x_0=0$. Ambos podem ser iguais.

Para $n\geqslant 1$, a Eq. (1) dá a chamada **relação de recorrência**:

$$F(r+n)\,a_n+\sum_{j=0}^{n-1}[(j+r)p_{n-j}+q_{n-j}]\,a_j = 0. \tag{2}$$

Veja que com esta equação, se

$$F(r+n) \neq 0$$

para $n\geqslant 1$, encontramos a_1 em termos de a_0, depois encontramos a_2 em termos de a_1 e a_0 e, portanto, só em termos de a_0 e, enfim, todos os coeficientes serão encontrados em termos de a_0. Note também que todos os coeficientes $a_{n\geqslant 1}$ serão também funções dos coeficientes p_n e q_n. Em suma, teremos uma série de potências se a equação indicial for satisfeita, isto é, se $F(r)=0$ e, por esta ser uma equação quadrática, teremos duas raízes, r_1 e r_2, que podem ser diferentes ou iguais.

Vamos escolher as raízes de forma tal que r_1 seja $r_1\geqslant r_2$, quando as raízes forem reais e se forem complexas já sabemos que uma é a complexa conjugada da outra. Então, como $F(r)=0$ só ocorre para $r=r_1$ e $r=r_2$, segue que $F(r_1+n)\neq 0$

para todo $n \geqslant 1$, já que não vai ter um $n \geqslant 1$ tal que $r_2 = r_1 + n$, que violaria a nossa escolha $r_1 \geqslant r_2$ quando $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e no caso estritamente complexo (não real) obviamente as respectivas partes imaginárias não seriam iguais, sendo uma a negativa da outra. Então, sempre teremos uma solução

$$y_1 = x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\right),$$

para $x > 0$, onde escolhemos, como o livro-texto, $a_0 = 1$ e escrevemos $a_n(r_1)$ para explicitar o fato de que estamos usando a raiz r_1 e que os coeficientes dependerão deste número.

Caso em que as raízes são distintas e não diferem por um número inteiro

Veja agora que se $r_2 \neq r_1$ e se $r_1 - r_2$ não é um número inteiro positivo, segue que $r_2 + n \neq r_1$ para todo $n \geqslant 1$ e, assim, $F(r_2 + n) \neq 0$, já que $F(r) = 0$ só para $r = r_1$ e $r = r_2$. Neste caso, portanto, usando a Eq. (3),

$$F(r+n)\, a_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j = 0, \tag{3}$$

para $n \geqslant 1$, vemos que teremos outra solução da forma de Frobenius:

$$y_2 = x^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)\, x^n\right),$$

para $x > 0$, onde agora os coeficientes são dependentes da raiz r_2 e também escolhemos $a_0 = 1$ para esta solução. Portanto, obtemos, neste caso em que $r_1 \neq r_2$ e que não diferem por um inteiro positivo, isto é, $r_1 - r_2 \neq n$, com $n \geqslant 1$, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea dada. Veja também que as soluções não são linearmente dependentes, fato que pode ser igualmente verificado com o cálculo do Wronskiano. E, finalmente, se as soluções tiverem comportamento singular, este é proveniente de x^{r_1} ou x^{r_2} e não das séries entre parênteses nas expressões de y_1 e y_2, respectivamente, acima, já que estas são analíticas dentro de seus intervalos de convergência.

Caso em que as raízes são iguais (por favor, estude este caso fazendo suas próprias passagens matemáticas)

Quando as soluções da equação indicial, $F(r) = 0$, são idênticas, $r_2 = r_1$, segue que só esta raiz satisfaz a equação indicial. Logo, $F(r+n) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$. Sendo assim, a ideia agora é resolver a relação de recorrência, Eq. (3), e encotrar $a_n(r)$, mas sem substituir r por r_1, obtendo estes coeficientes como funções contínuas de r. Note agora que a Eq. (4),

$$F(r)\, a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)\, a_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j \right\} x^{n+r} = 0, \tag{4}$$

foi obtida da equação diferencial original multiplicada por x^2, isto é,

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{dy}{dx} + x^2 q(x)\, y &= F(r)\, a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ F(r+n)\, a_n(r) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j(r) \Bigg\} x^{n+r}, \end{aligned}$$

que igualamos a zero. Mas, como estamos usando os coeficientes obtidos resolvendo a Eq. (3), a última equação fica:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{dy}{dx} + x^2 q(x) y = F(r) a_0 x^r.$$

Como r_1 é uma raiz repetida de $F(r) = 0$, segue que podemos escrever que

$$F(r) = (r - r_1)^2.$$

Com isto,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{dy}{dx} + x^2 q(x) y = a_0 (r - r_1)^2 x^r.$$

Veja que não estamos especificando que $r = r_1$ e, assim, podemos escrever que $y = y(r, x)$, ou seja,

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(r,x) + x^2 p(x) \frac{d}{dx} y(r,x) + x^2 q(x) y(r,x) = a_0 (r - r_1)^2 x^r. \tag{5}$$

Fazendo $r = r_1$ dá simplesmente a série de Frobenius $y(r_1, x)$, que satisfaz a equação homogênea original:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(r_1,x) + x^2 p(x) \frac{d}{dx} y(r_1,x) + x^2 q(x) y(r_1,x) &= a_0 (r_1 - r_1)^2 x^{r_1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas veja o que acontece se derivarmos parcialmente a Eq. (5) com relação a r:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} y(r,x) \right] + x^2 p(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial r} y(r,x) \right] + x^2 q(x) \frac{\partial}{\partial r} y(r,x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_1)^2 x^r \right] \\ &= 2a_0 (r - r_1) x^r \\ &\quad + a_0 (r - r_1)^2 \frac{\partial}{\partial r} x^r. \end{aligned}$$

Fazendo agora $r = r_1$ nesta equação, obtemos uma nova solução:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} y(r,x) \right]_{r=r_1} + x^2 p(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial r} y(r,x) \right]_{r=r_1} + x^2 q(x) \left[\frac{\partial}{\partial r} y(r,x) \right]_{r=r_1} = 0.$$

Como supomos que já encontramos uma das soluções, ou seja,

$$y_1 = x^{r_1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right),$$

segue que a nova solução fica:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} y_1 = \left(\frac{\partial}{\partial r_1} x^{r_1} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right) + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} a_n(r) \right]_{r=r_1} x^n.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_1} x^{r_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1} \exp\left[\ln\left(x^{r_1}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial r_1} \exp\left[r_1 \ln(x)\right] \\
&= \ln(x) \exp\left[r_1 \ln(x)\right] \\
&= \ln(x)\, x^{r_1}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_1} y_1 &= \ln(x)\, x^{r_1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\right) + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} a_n(r)\right]_{r=r_1} x^n \\
&= y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} a_n(r)\right]_{r=r_1} x^n.
\end{aligned}$$

Como diz o livro-texto, encontrar os coeficientes em função de r para depois derivá-los com relação a r pode ser difícil. Então, a proposta é usar um ansatz específico para a segunda solução assim:

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

onde os b_n serão calculados diretamente com a substituição de y_2 na equação diferencial original, já usando a primeira solução encontrada, y_1. Veja que, obviamente, y_1 e y_2 são linearmente independentes, como também pode ser verificado pelo cálculo do Wronskiano.

Caso em que as raízes diferem por um número inteiro

Agora vamos considerar o caso em que $r_1 = r_2 + N$, com N sendo um número inteiro positivo. Como este é um caso mais complicado, vamos definir o operador diferencial:

$$\mathcal{L} \equiv x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{d}{dx} + x^2 q(x),$$

já com o fator x^2 multiplicado, por conveniência. Assim, a equação diferencial dada é equivalente a

$$\mathcal{L} y = 0.$$

Novamente, como fizemos para o caso das raízes iguais, usamos o ansatz de Frobenius,

$$y(x,r) = x^r \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\, x^n\right), \tag{6}$$

e encontramos os coeficientes como funções de r e usamos a fórmula de recorrência, resultando em

$$\mathcal{L} y = F(r)\, a_0 x^r.$$

Mas agora, como temos duas raízes distindas, r_1 e r_2, podemos escrever

$$F(r) = (r - r_1)(r - r_2) \tag{7}$$

e a equação acima fica:

$$\mathcal{L}[y(r,x)] = a_0 (r - r_1)(r - r_2) x^r. \tag{8}$$

Aqui supomos que já temos a solução $y(r_1, x)$.

Se tentarmos colocar $r = r_2$ na relação de recorrência, Eq. (3), obtemos

$$F(r+n) a_n(r) + \sum_{j=0}^{n-1} [(j+r) p_{n-j} + q_{n-j}] a_j(r) = 0, \tag{9}$$

vamos ficar com o N-ésimo coeficiente, $a_N(r)$, divergente, já que $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$. Vamos deixar isso mais explícito. Da Eq. (9), vem:

$$F(r+N) a_N(r) = -\sum_{j=0}^{N-1} [(j+r) p_{N-j} + q_{N-j}] a_j(r),$$

isto é,

$$(r + N - r_1)(r + N - r_2) a_N(r) = -\sum_{j=0}^{N-1} [(j+r) p_{N-j} + q_{N-j}] a_j(r),$$

onde usamos a Eq. (7) com $r \to r + N$. Logo, como $r_1 = r_2 + N$, esta última equação dá:

$$(r - r_2)(r + N - r_2) a_N(r) = -\sum_{j=0}^{N-1} [(j+r) p_{N-j} + q_{N-j}] a_j(r), \tag{10}$$

ou seja,

$$(r + N - r_2) a_N(r) = -\frac{1}{(r - r_2)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+r) p_{N-j} + q_{N-j}] a_j(r),$$

e vemos facilmente que $a_N(r)$ diverge se $r \to r_2$. Já se multiplicarmos tudo por $(r - r_2)$, vemos que

$$(r - r_2) a_N(r) = -\frac{1}{(r + N - r_2)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+r) p_{N-j} + q_{N-j}] a_j(r), \tag{11}$$

e essa quantidade não diverge para $r \to r_2$, pois os demais $a_j(r)$, para $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, são todos finitos.

Vamos tentar tirar a divergência, então, considerando o que acontece com

$$(r - r_2) y(x, r) = x^r \left((r - r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (r - r_2) a_n(r) x^n \right), \tag{12}$$

que é a Eq. (6) multiplicada por $(r - r_2)$. Da Eq. (9), segue que

$$(r + n - r_1)(r + n - r_2)\, a_n(r) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{n-1} \left[(j + r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j(r),$$

onde já usamos a Eq. (7) e, portanto, multiplicando tudo por $(r - r_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(r - r_2)\, a_n(r) \quad &= \quad -\frac{1}{(r + n - r_2 - N)(r + n - r_2)} \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j + r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] (r - r_2)\, a_j(r) \\
&= \quad -\frac{1}{(r + n - r_2)} \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j + r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] \frac{(r - r_2)}{(r + n - r_2 - N)} a_j(r),
\end{aligned}$$

já usando $r_1 = r_2 + N$. Se lembrarmos que podemos obter cada $a_n(r)$ a partir de $a_0(r)$ e que vamos escolher $a_0(r) = 1$, então cada $(r - r_2)\, a_n(r)$ vai ser proporcional a $(r - r_2) / (r + n - r_2 - N)$. Portanto, para todo $n < N$, teremos

$$\lim_{r \to r_2} (r - r_2)\, a_n(r) \quad = \quad 0.$$

Só a partir de $n = N$ que teremos esse limite não nulo, já que, nesse caso, vale a Eq. (11). Com isso, podemos escrever que a Eq. (12) dá, quando $r \to r_2$, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to r_2} (r - r_2)\, y(x, r) \quad &= \quad x^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_n(r)\right] x^n \\
&= \quad x^{r_2} \sum_{n=N}^{\infty} \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_n(r)\right] x^n.
\end{aligned}$$

Vamos trocar o índice da soma acima para que comece de zero. Então, fazemos a mudança $n \to n + N$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to r_2} (r - r_2)\, y(x, r) \quad &= \quad x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_{n+N}(r)\right] x^{n+N} \\
&= \quad x^{r_2 + N} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_{n+N}(r)\right] x^n \\
&= \quad x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_{n+N}(r)\right] x^n,
\end{aligned}$$

já que

$$r_1 \quad = \quad r_2 + N.$$

Se batizarmos agora os novos coeficientes,

$$b_n \quad = \quad \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2)\, a_{n+N}(r)\right],$$

Concluímos que a equação acima fica:

$$\lim_{r \to r_2} (r - r_2)\, y(x, r) \quad = \quad x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Mas essa equação é proporcional à que obtemos para o ansatz com $r = r_1$, que é $y(x, r_1) = y_1$. A única diferença, no entanto, é que agora temos b_0 dado em termos de a_N, assim:

$$b_0 = \lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2) \, a_N(r) \right]. \tag{13}$$

Para y_1, como escolhemos $a_0 = 1$ acima, vemos que podemos fatorar b_0 na equação acima e identificar a série resultante como y_1 :

$$\lim_{r \to r_2} \left[(r - r_2) \, y(x, r) \right] = b_0 y_1. \tag{14}$$

Mas, então, não obtivemos uma nova solução linearmente independente, pois acabamos ficando com uma solução que é proporcional à própria solução y_1.