

Método de Frobenius

Vamos continuar nossa investigação teórica do método de Frobenius. Consideremos a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0,$$

onde $x_0 = 0$ é um ponto singular regular, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = p_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = q_0,$$

com p_0 e q_0 números finitos e, além disso, com $x p(x)$ e $x^2 q(x)$ funções analíticas em $x_0 = 0$. Então, como vimos anteriormente,

$$x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Vamos agora considerar o ansatz de Frobenius, propondo uma solução da equação diferencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \end{aligned}$$

onde $a_0 \neq 0$, já que no limite em que $x \rightarrow 0$ a equação dada se aproxima da equação de Euler e r será uma das raízes da equação indicial, como veremos a seguir. Calculemos as derivadas de y :

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo nossos resultados na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\ &+ x p(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \\ &+ x^2 q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0, \end{aligned}$$

onde multiplicamos tudo por x^2 . Vamos agora usar as séries de Taylor de $xp(x)$ e $x^2q(x)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

A seguir reescrevemos esta equação colecionando os termos em ordem crescente de potências de x :

$$\begin{aligned} & r(r-1) a_0 x^r + (r+1) r a_1 x^{r+1} + (r+2)(r+1) a_2 x^{r+2} + \dots \\ & + p_0 r a_0 x^r + p_0 (r+1) a_1 x^{r+1} + p_1 r a_0 x^{r+1} \\ & + p_0 (r+2) a_2 x^{r+2} + p_1 (r+1) a_1 x^{r+2} + p_2 r a_0 x^{r+2} \dots \\ & + q_0 a_0 x^r + q_0 a_1 x^{r+1} + q_1 a_0 x^{r+1} \\ & + q_0 a_2 x^{r+2} + q_1 a_1 x^{r+2} + q_2 a_0 x^{r+2} + \dots = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & [r(r-1) + p_0 r + q_0] a_0 x^r \\ & + [(r+1) r a_1 + p_0 (r+1) a_1 + p_1 r a_0 + q_0 a_1 + q_1 a_0] x^{r+1} \\ & + [(r+2)(r+1) a_2 + p_0 (r+2) a_2 + p_1 (r+1) a_1 \\ & + p_2 r a_0 + q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0] x^{r+2} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Vamos seguir o livro-texto e definir

$$F(r) \equiv r(r-1) + p_0 r + q_0, \quad (3)$$

de modo que

$$F(r+1) = r(r+1) + p_0 (r+1) + q_0$$

e

$$F(r+2) = (r+1)(r+2) + p_0 (r+2) + q_0.$$

Notando estas quantidades na Eq. (2), temos:

$$\begin{aligned} & F(r) a_0 x^r + [F(r+1) a_1 + (p_1 r + q_1) a_0] x^{r+1} \\ & + \{F(r+2) a_2 + [p_1 (r+1) + q_1] a_1 + (p_2 r + q_2) a_0\} x^{r+2} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Como encontramos o coeficiente de x^{r+n} , que o livro-texto mostra? Para responder esta questão, notemos primeiro o seguinte:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) p_m a_n x^{m+n+r} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) p_m a_j x^{m+j+r}, \end{aligned}$$

que aparece na Eq. (1). Note que podemos reescrever este resultado assim:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) p_m a_j \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} x^{n+r},$$

onde

$$\delta_{m+j,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m+j = n, \\ 0, & \text{se } m+j \neq n \end{cases}$$

é a chamada delta de Kronecker.

Podemos ainda escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} (n-m+r) p_m a_{n-m} x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} (n-m+r) p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} (n-m+r) p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} (n-m+r) p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (j+r) p_{n-j} a_j x^{n+r}. \end{aligned} \tag{4}$$

De forma análoga, tomamos também

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_m a_j x^{m+j+r},$$

da Eq. (1). Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_m a_j \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} x^{n+r} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} q_m a_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} q_m a_n x^{n+r} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} q_m a_n x^{n+r} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} q_m a_n x^{n+r} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n q_{n-j} a_j x^{n+r}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (4) e (5) na Eq. (1), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (j+r) p_{n-j} a_j x^{n+r} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n q_{n-j} a_j x^{n+r} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&r(r-1) a_0 x^r + r p_0 a_0 x^r + q_0 a_0 x^r \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n (j+r) p_{n-j} a_j x^{n+r} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n q_{n-j} a_j x^{n+r} = 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& r(r-1)a_0x^r + rp_0a_0x^r + q_0a_0x^r \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)p_0a_nx^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} q_0a_nx^{n+r} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (j+r)p_{n-j}a_jx^{n+r} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} q_{n-j}a_jx^{n+r} = 0,
\end{aligned}$$

seguindo o que o livro-texto faz. Então, notando a Eq. (3), vem:

$$\begin{aligned}
& [r(r-1) + rp_0 + q_0]a_0x^r \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0]a_nx^{n+r} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} [(j+r)p_{n-j} + q_{n-j}]a_jx^{n+r} = 0,
\end{aligned}$$