Assim, a série fica

$$y_{r_-=1/2} = a_0 x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n.$$

Vejamos agora que esta série é convergente usando o teste do quociente:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (2n)!}{(-1)^n 2^n (2n+2)!} \\
&= -\frac{2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\
&= -\frac{2}{(2n+2)(2n+1)}
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1+1/2}}{a_n x^{n+1/2}} \right| = |x| \frac{2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$$

e a série converge para todo $x > 0$ finito.

O próximo passo agora, neste exemplo, é resolver a série para $r_+ = 1$. O processo é o análogo: escrevemos a série

$$\begin{aligned}
y &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

e substituímos na equação diferencial dada. Façamos as derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo estas séries na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned}
2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n & \\
+ (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n\right]x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n\right]x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n+2} = 0.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2\left(n+2\right)\left(n+1\right) - \left(n+1\right)\right]a_{n+1} + a_n\right\}x^{n+2} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(2n+3\right)\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n\right]x^{n+2} = 0.$$

Como esta equação tem que valer para todo x em algum intervalo em torno da origem, segue que

$$\left(2n+3\right)\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n = 0,$$

ou seja, encontramos a seguinte fórmula de recorrência para os coeficientes da série de Fobenius:

$$a_{n+1} = \frac{-1}{\left(2n+3\right)\left(n+1\right)}a_n.$$

Vejamos:

$$a_1 = \frac{-1}{3.1}a_0,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{5.2}a_1 \\ &= \frac{1}{5.3}\frac{1}{2.1}a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{7.3}a_2 \\ &= \frac{-1}{7.3}\frac{1}{5.3}\frac{1}{2.1}a_0 \\ &= \frac{-1}{7.5.3}\frac{1}{3.2.1}a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{9.4}a_3 \\ &= \frac{1}{9.7.5.3.1}\frac{1}{4.3.2.1}a_0. \end{aligned}$$

É evidente, então, que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{n!\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 4.3.2.1.\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n)\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots 8.6.4.2.\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2.n+1)\,(2n)\,(2.n-1)\,(2n-2)\,(2.n-3)\,(2n-4)\ldots 6.5.4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n+1)!}a_0. \end{aligned}$$

A solução de Frobenius fica

$$y_{r_+=1} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{(2n+1)!}x^{n+1},$$

para $x > 0$. O teste do quociente aqui dá:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+2}}{a_n x^{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{(2n+3)!}x^{n+2}}{\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}x^{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2\,(2n+1)!}{(2n+3)!}x\right| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{2\,(2n+1)!}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)!} \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+3)\,(2n+2)} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

e, portanto, o intervalo de convergência é para todo $x > 0$ finito.

Veja que as duas soluções acima são linearmente independentes, como pode ser verificado pelo cálculo do Wronskiano. Então, com $y_{r_+=1}$ e $y_{r_-=1/2}$ obtivemos um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea dada.