

Exemplo do livro-texto

Vamos ilustrar este método resolvendo a equação

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0.$$

O primeiro passo é calcularmos $p(x)$ e $q(x)$:

$$p(x) = -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x}$$

e

$$q(x) = \frac{1+x}{2x^2}.$$

O segundo passo é vermos se o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que $x = 0$ é obviamente singular. Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \\ &\equiv p_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\equiv q_0. \end{aligned}$$

Como ambos limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. O terceiro passo é encontrarmos a equação indicial. Mas já sabemos que a equação de Euler associada a esta é equação que queremos resolver é

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + xp_0 \frac{dy}{dx} + q_0 y = 0,$$

isto é,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} y = 0.$$

A equação indicial é obtida, como no livro, simplesmente fazendo nosso $\alpha = -r$ e resolvendo para r . Tínhamos

$$\alpha^2 + (1 - p_0)\alpha + q_0 = 0$$

e, assim, usando $\alpha = -r$,

$$r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0,$$

que dá

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r_+ = 1$$

e

$$r_- = \frac{1}{2}.$$

Vemos que temos duas raízes diferentes. O livro-texto faz primeiro com r_+ , mas aqui, justamente porque é novidade o caso com $r_- = 1/2$, racional, escolhemos resolver para esta raiz, enquanto que o outro caso você pode ler no livro-texto.

Usemos, então, o ansatz de Frobenius para $r_- = 1/2$, isto é, $\alpha_- = -1/2$:

$$\begin{aligned} y &= x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Como vamos substituir esta série na equação diferencial original, vamos tomar suas derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a_n x^{n-1/2}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) a_n x^{n-3/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n x^{n-3/2}. \end{aligned}$$

Logo, a equação diferencial fica:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n x^{n-3/2} - x \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a_n x^{n-1/2} \\ + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a_n x^{n+1/2} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3/2} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2n^2 - \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} + 1 \right) a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3/2} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1) a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3/2} = 0.$$

Dividindo tudo por $x^{1/2}$, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Esta equação também pode ser reescrita assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0,$$

ou seja, dividindo tudo por x ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(2n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0.$$

Como esta equação deve valer para todo x em um intervalo suficientemente próximo de $x_0 = 0$, segue que

$$(n+1)(2n+1) a_{n+1} + a_n = 0$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, temos:

$$a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(2n+1)} a_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-1}{1.1} a_0 \\ &= -a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{2.3} a_1 \\ &= \frac{1}{3!} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{3.5} a_2 \\ &= \frac{-1}{3.5} \frac{1}{3!} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{4.7} a_3 \\ &= \frac{1}{1.3.5.7} \frac{1}{4!} a_0. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n! (2n-1) (2n-3) \dots 5.3.1} a_0.$$

Podemos notar que, por exemplo,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{1.3.5.7} \frac{1}{4!} a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1} \frac{1}{4.3.2.1} a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1} \frac{2^4}{8.6.4.2} a_0 \\ &= \frac{2^4}{8.7.6.5.4.3.2.1} a_0 \\ &= \frac{2^4}{(2.4)!} a_0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0.$$