A série de Maclaurin

Vamos ver como uma série de potências pode ser deduzida da integral de uma função contínua e diferenciável com derivadas contínuas e diferenciáveis. Seja $f(x)$ uma dessas funções bem comportadas (suaves). Vamos agora tomar um valor x e deixá-lo fixo, sem variação alguma. Vamos também definir uma função $g(t)$ tal que

$$g(t) = f(x-t),$$

com x fixo, mas que pode ser escolhido arbitrariamente. Sabemos que

$$\int_0^x g'(t)\,dt = g(x) - g(0).$$

Vamos fazer uma integração por partes. Para isso, escolhamos:

$$u = g'(t)$$

e

$$dv = dt.$$

Portanto,

$$du = g''(t)\,dt$$

e

$$v = t.$$

Com isso, a integral fica

$$\begin{aligned} \int_0^x g'(t)\,dt &= g'(t)\,t\big|_0^x - \int_0^x t g''(t)\,dt \\ &= g'(x)\,x - \int_0^x g''(t)\,t dt. \end{aligned}$$

Usando o resultado acima,

$$\int_0^x g'(t)\,dt = g(x) - g(0),$$

concluímos que

$$g(x) - g(0) = g'(x)\,x - \int_0^x g''(t)\,t dt$$

e, portanto,

$$g(0) = g(x) - g'(x)\,x + \int_0^x g''(t)\,t dt.$$

Vamos repetir a integração por partes, mas agora para a nova integral que apareceu:

$$\begin{aligned}\int_0^x g''(t)\,tdt &= \int_0^x udv \\ &= uv|_0^x - \int_0^x vdu,\end{aligned}$$

com

$$u = g''(t)$$

e

$$dv = tdt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^x g''(t)\,tdt &= g''(t)\,\frac{t^2}{2}\bigg|_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2} g'''(t)\,dt \\ &= g''(x)\,\frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{t^2}{2} g'''(t)\,dt.\end{aligned}$$

Substituindo de volta em

$$g(0) = g(x) - g'(x)\,x + \int_0^x g''(t)\,tdt,$$

obtemos:

$$g(0) = g(x) - g'(x)\,x + g''(x)\,\frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{t^2}{2} g'''(t)\,dt.$$

Já vai ficando fácil de concluir o que vai acontecer se continuarmos. Por exemplo, é fácil verificar que também vamos ter:

$$\int_0^x \frac{t^2}{2} g'''(t)\,dt = g'''(x)\,\frac{t^3}{3!} - \int_0^x \frac{t^3}{3!} g^{(4)}(t)\,dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}g(0) &= g(x) - g'(x)\,x + g''(x)\,\frac{x^2}{2} - g'''(x)\,\frac{t^3}{3!} + \int_0^x \frac{t^3}{3!} g^{(4)}(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{3} g^{(n)}(x)\,\frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{t^3}{3!} g^{(4)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Para um número qualquer de termos na soma, podemos escrever:

$$g(0) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, g^{(n)}(x)\,\frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{t^N}{N!} g^{(N+1)}(t)\,dt.$$

Agora, notemos que aparece uma série de potências até N somada com um resto, dado por

$$\mathcal{R}_N = \int_0^x \frac{t^N}{N!} g^{(N+1)}(t)\, dt.$$

Aí podemos usar uma versão do teorema do valor médio e dizer que existe um número ξ entre 0 e x tal que

$$g^{(N+1)}(\xi) = \frac{\mathcal{R}_N}{\int_0^x \frac{t^N}{N!} dt}.$$

Então, como

$$\int_0^x \frac{t^N}{N!} dt = \frac{x^{N+1}}{(N+1)!},$$

podemos escrever

$$\mathcal{R}_N = g^{(N+1)}(\xi) \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Quando existir um número real finito $M > 0$ tal que, para todo N, vale a desigualdade

$$\left| g^{(N+1)}(\xi) \right| \leqslant M,$$

segue que

$$\mathcal{R}_N \leqslant \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} M.$$

Esta é a forma de Lagrange do resto. Nesse caso, a série acima converge (e você pode verificar) e podemos escrever:

$$g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g^{(n)}(x) \frac{x^n}{n!}.$$

Como vimos,

$$g(t) = f(x-t)$$

e, portanto,

$$g^{(n)}(t) = (-1)^n f^{(n)}(x-t).$$

Assim,

$$g(0) = f(x)$$

e

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Logo, a série acima pode ser também escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}.$$

Esta é chamada de série de Maclaurin. Quando trocamos a variável x tal que

$$x = y - a,$$

podemos escrever:

$$f(y-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (y-a)^n .$$

Só que agora, vamos definir uma nova função assim:

$$h(y) = f(y-a) .$$

Com isso,

$$h(a) = f(0) .$$

Portanto, a série agora fica

$$h(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (y-a)^n .$$

Esta é a chamada série de Taylor.