Exemplo de solução por série

Vamos agora ver o que acontece se tentarmos achar uma série de potências como sendo a solução para a equação diferencial do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Assim, consideremos que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo esta segunda derivada na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0.$$

Como uma solução em série tem que valer para todo x em um intervalo onde a série converge, segue que os coeficientes das potências de x têm que se anular. Logo,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\,(n+1)},$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto, vemos que

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2!}, \\
a_3 &= -\frac{a_1}{3!}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4.3} \\
&= \frac{a_0}{4!}, \\
a_5 &= -\frac{a_3}{5.4} \\
&= \frac{a_1}{5!},
\end{aligned}$$

etc. Vemos, assim, que podemos escrever a série como

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Como temos duas soluções linearmente independentes:

$$\begin{aligned}
y_1 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_2 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= \operatorname{sen}(x),
\end{aligned}$$

onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias, vemos que obtivemos a solução geral da equação homogênea dada. Note também que o Wronskiano é igual a 1, mostrando que, de fato, y_1 e y_2, formam um conjunto fundamental de soluções para esta equação homogênea.