Soluções por série

Brevíssima introdução de séries de potências

1. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge no ponto x se o limite

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} a_n (x - x_0)^n$$

existe para esse ponto x.

2. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge absolutamente no ponto x se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x - x_0|^n$$

converge. Se uma série converge absolutamente, então a série converge. A recíproca não é necessariamente válida.

3. Teste da razão: se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| &= |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x - x_0| \, L, \end{aligned}$$

então a série de potências converge absolutamente para o valor fixo x se

$$|x - x_0| \, L < 1$$

e diverge se

$$|x - x_0| \, L > 1.$$

Caso

$$|x - x_0| \, L = 1,$$

então o teste é inconclusivo.

Um pouco de teoria

Um teste muito interessante para ver se uma série de potências converge é o teste da raiz. Dada uma série,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

vamos supor que pegamos $|a_n|^{1/n}$ para n bem grande. Suponhamos que esse número seja menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$ para $n \geqslant N$, com N um número natural suficientemente grande. Então, temos:

$$|a_n|^{1/n} \leqslant \lambda < 1.$$

Logo,

$$|a_n| \leqslant \lambda^n,$$

implicando que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n < \infty,$$

pois $\lambda < 1$ por hipótese. Para vermos que $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n$ converge, basta notarmos o seguinte:

$$\begin{aligned} S_N^{M>N} &\equiv \sum_{n=N}^{M} \lambda^n \\ &= \lambda^N + \lambda^{N+1} + \ldots + \lambda^M. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\, S_N^{M>N} &= (1-\lambda)\left(\lambda^N + \lambda^{N+1} + \ldots + \lambda^M\right) \\ &= \lambda^N + \lambda^{N+1} + \lambda^{N+2} + \ldots + \lambda^M \\ &\quad -\lambda^{N+1} - \lambda^{N+2} - \ldots - \lambda^M - \lambda^{M+1} \\ &= \lambda^N - \lambda^{M+1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$S_N^{M>N} = \frac{\lambda^N - \lambda^{M+1}}{1-\lambda}.$$

Logo,

$$\lim_{M\to\infty} S_N^{M>N} = \frac{\lambda^N}{1-\lambda} < \infty.$$

Assim, a série y é absolutamente convergente, já que o módulo de a_n, para $n > N$, é sempre menor do que λ^n e, pelo teste da comparação, como a série em λ^n, como acabamos de ver, converge, então a série y converge absolutamente.

Logo, se $|a_n|^{1/n}$ for menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$ para $n \geqslant N$, isso será suficiente para a série convergir absolutamente. Vejamos que também é necessário que isso aconteça para a série convergir. Vamos supor que a série converge e, no entanto, para $n \geqslant N$, para algum inteiro $N > 0$ suficientemente grande, $|a_n|^{1/n} \geqslant \lambda > 1$. Nesse caso, obviamente,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \quad \geqslant \quad \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n \to \infty.$$

Logo, se isso acontecer, a série original,

$$y \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

diverge absolutamente. No máximo, ela só pode ser condicionalmente convergente, mas aí nós rejeitamos aqui, neste curso, porque rearranjando a maneira com que os termos da série são somados, o resultado dessa nova soma pode dar qualquer coisa, segundo o teorema de Riemann sobre séries. Com essa ressalva feita, podemos dizer que é também necessário que tenhamos $|a_n|^{1/n}$ menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$, para $n \geqslant N$, para que a série convirja.

O raio de convergência é aquele em que uma série

$$S(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

converge. Para poder aplicar nosso teste, precisamos tomar

$$a_n \quad = \quad b_n x^n.$$

Aí precisamos encontrar o maior valor de $|x|$ para o qual nossa série ainda é convergente. Então, para convergir, é necessário que haja um λ real positivo tal que

$$|a_n|^{1/n} \quad \leqslant \quad \lambda < 1,$$

isto é,

$$|b_n x^n| \quad \leqslant \quad \lambda^n,$$

para $n \geqslant N$, para um natural N suficientemente grande. Como $\lambda < 1$, segue que

$$|b_n x^n| \quad < \quad 1$$

e

$$|x^n| \quad < \quad \frac{1}{|b_n|},$$

ou seja,

$$|x| \quad < \quad \frac{1}{|b_n|^{1/n}},$$

quando $n \to \infty$. Então, podemos definir o raio de convergência R como sendo dado pela fórmula:

$$\frac{1}{R} \quad \equiv \quad \lim_{n \to \infty} |b_n|^{1/n}.$$