

Transformada de Laplace

Considere a integral:

$$\mathcal{L}[f](s) \equiv \int_0^{\infty} dx \exp(-sx) f(x).$$

1 Exemplo: Considere

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-x) \\ &= \frac{1}{\exp(x)} \\ &= \left(\frac{1}{\exp}\right)(x), \end{aligned}$$

isto é, nesta notação formal,

$$f = \frac{1}{\exp}.$$

Então, sua transformada de Laplace é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1/\exp](s) &= \int_0^{\infty} dx \exp(-sx) \exp(-x) \\ &= \int_0^{\infty} dx \exp[-(1+s)x] \\ &= -\frac{1}{1+s} \exp[-(1+s)x] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1+s}, \end{aligned}$$

mas isso só se $s > -1$.

2 Exemplo: Calcule a transformada de Laplace inversa, denotada $\mathcal{L}^{-1}$, da função dada abaixo:

$$g(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Segue do exemplo anterior que

$$\mathcal{L}^{-1}[g](x) = \exp(-x).$$

3 Exemplo: Considere

$$f(x) = x^2.$$

Então, sua transformada de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} dx \exp(-sx) x^2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dx \frac{\partial^2}{\partial s^2} \exp(-sx) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^\infty dx \exp(-sx) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[-\frac{\exp(-sx)}{s} \Big|_0^\infty \right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{1}{s} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{s^2} \\
&= \frac{2}{s^3},
\end{aligned}$$

que só existe quando $s > 0$.

4 Exemplo: Calcule a transformada de Laplace inversa, denotada $\mathcal{L}^{-1}$, da função dada abaixo:

$$g(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Segue do exemplo anterior que

$$\mathcal{L}^{-1}[g](x) = \frac{x^2}{2}.$$

5 Exemplo: Como é a transformada de Laplace de $f'(x) \equiv df(x)/dx$? Note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty dx \exp(-sx) \frac{df(x)}{dx} \\
&= \int_0^\infty dx \left[\frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial \exp(-sx)}{\partial x} \right] \\
&= \int_0^\infty dx \left[\frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} + s f(x) \exp(-sx) \right] \\
&= \int_0^\infty dx \frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} + s \int_0^\infty dx f(x) \exp(-sx) \\
&= \exp(-sx) f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty dx f(x) \exp(-sx) \\
&= \exp(-sx) f(x) \Big|_0^\infty + s \mathcal{L}[f](s).
\end{aligned}$$

Supondo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-sx) f(x) = 0,$$

obtemos:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

6 Exemplo: Resolva a equação diferencial de primeira ordem seguinte usando as técnicas de transformada de Laplace (e sua inversa):

$$y'(x) + y(x) = 0,$$

sendo que $y(0) = 1$. Primeiro tomamos a transformada de Laplace desta equação:

$$\mathcal{L}[y' + y](s) = \mathcal{L}[0](s).$$

Notando que

$$\mathcal{L}[0](s) = 0,$$

notando a linearidade da transformada de Laplace e usando o Ex. 3, vem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y' + y](s) &= \mathcal{L}[y'](s) + \mathcal{L}[y](s) \\ &= s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + \mathcal{L}[y](s) \\ &= (1 + s)\mathcal{L}[y](s) - y(0).\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace da equação diferencial dada fica:

$$(1 + s)\mathcal{L}[y](s) - y(0) = 0,$$

isto é,

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y(0)}{1 + s}.$$

Usando o Ex. 2, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]](x) = y(0)\mathcal{L}^{-1}[g](x),$$

onde

$$g(s) \equiv \frac{1}{1 + s},$$

como no Ex. 2. Portanto,

$$y(x) = y(0)\exp(-x).$$

Com a condição para $y(0) = 1$, vem:

$$y(x) = \exp(-x).$$