O caso degenerado para matrizes hermitianas

O outro caso de sistema de equações diferenciais de primeira ordem 2×2 degenerado mais simples é o de quando temos uma matriz de coeficientes hermitiana, mas que tem dois auto-valores iguais. Você pode tentar isso com a seguinte matriz, por exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é hermitiana, isto é, $M^\dagger = M$, ou seja,

$$\begin{aligned} M^\dagger &\equiv (M^*)^t \\ &= \left(M^t\right)^* \\ &= M. \end{aligned}$$

(Note que

$$(X^*)^t = \left(X^t\right)^*$$

sempre vale $\forall X$.) Veja que os autovalores de M são obtidos resolvendo a equação:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

isto é,

$$\lambda = 1.$$

Você vai encontrar um espaço de auto-vetores para este único auto-valor com multiplicidade dupla que é um espaço vetorial bidimensional, ou seja, a dimensão geométrica é igual à multiplicidade algébrica do auto-valor e, neste caso, temos como encontrar dois auto-vetores linearmente independentes.

Vamos encontrar os auto-vetores. Façamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

ou, o que dá na mesma,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Como $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Logo, quaisquer valores de α e β servem. Assim, sempre podemos, por exemplo, escolher dois auto-vetores ortogonais:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Claro, este problema é muito trivial, mas há situações menos triviais para matrizes maiores.

Vejamos um caso 3×3. Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Novamente, vemos que esta é uma matriz hermitiana. Vamos calcular seus auto-valores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -i & 0 \\ i & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então,

$$\left(\sqrt{2}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)-1\right] = 0,$$

isto é,

$$\lambda_0 = \sqrt{2}$$

ou

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-1 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 = 2,$$

dando

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}.$$

Teremos, portanto, apenas dois auto-valores distintos. Vamos procurar por auto-vetores:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -i & 0 \\ i & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda)\,\alpha - i\beta &= 0, \\
i\alpha - (1+\lambda)\,\beta &= 0
\end{aligned}
$$

e

$$\left(\sqrt{2}-\lambda\right)\gamma = 0.$$

Primeiro, vejamos o auto-valor não degenerado:

$$
\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha - i\beta &= 0, \\
i\alpha - \left(1-\sqrt{2}\right)\beta &= 0
\end{aligned}
$$

e

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\gamma = 0,$$

resultando em

$$\gamma = 0$$

e

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha = i\beta,$$

que é equivalente a

$$i\alpha = \left(1-\sqrt{2}\right)\beta,$$

pois, ao multiplicar por $\left(1+\sqrt{2}\right)$, esta última dá

$$
\begin{aligned}
i\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha &= \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\beta \\
&= (1-2)\,\beta,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$i\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha = -\beta,$$

isto é,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha = i\beta.$$

Então, escolhendo

$$\alpha = 1,$$

segue que

$$\beta = -i\left(1+\sqrt{2}\right).$$

O auto-vetor para $\lambda_- = -\sqrt{2}$ fica, então,

$$u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1+\sqrt{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora vejamos o que acontece com o auto-valor degenerado $\lambda_+ = \lambda_0 = \sqrt{2}$. Neste caso,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -i & 0 \\ i & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

dá

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -i & 0 \\ i & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0,$$

resultando nas seguintes equações:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha = i\beta,$$

$$i\alpha = \left(1+\sqrt{2}\right)\beta$$

e

$$0\gamma = 0.$$

Logo, qualquer γ serve e podemos escolher $\forall\alpha$, com $\beta = -i\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha$. Logo, temos a família de auto-vetores:

$$u(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -i\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Como temos liberdade de escolher qualquer α e γ, tomemos os seguintes dois casos:

$$u(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1-\sqrt{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$u(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teremos, portanto, três vetores linearmente independentes e podemos agora diagonalizar a matriz original a despeito do fato de que ela tem dois auto-valores degenerados. Sempre teremos como fazer isso para matrizes hermitianas.