Um caso mais difícil (um caso que é "famigerado")

Vamos agora olhar para o problema 1 da página 436 do livro do Boyce et al. Neste caso, temos uma equação homogênea:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Este é um caso diferente porque só vamos ter um auto-vetor. Para ver isso, vamos primeiro encontrar os auto-valores:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$(3-\lambda)(-1-\lambda)+4 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2+\lambda-3\lambda-3+4 = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2-2\lambda+1 = 0,$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então, só temos um único auto-valor. Vejamos se ainda assim teremos dois auto-vetores:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$2\alpha-4\beta = 0$$

e

$$\alpha-2\beta = 0,$$

ou seja, ambas são a mesma equação:

$$\alpha = 2\beta.$$

Escolhendo $\beta = 1$, segue que $\alpha = 2$ e temos apenas um auto-vetor:

$$u \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, uma solução da equação é dada por

$$\begin{aligned} v_1(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\lambda t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t). \end{aligned}$$

Só para conferir que isto está correto, calculemos a derivada:

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = v_1(t)$$

e como o auto-valor λ é a unidade, segue que

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1(t) = v_1(t),$$

que, substituindo em nossa derivada, segue que

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1(t),$$

confirmando que $v_1(t)$ é, de fato, uma solução para nossa equação diferencial matricial. Precisamos encontrar outra solução linearmente independente a esta, pois são necessárias duas constantes arbitrárias neste caso 2×2.

Mas tem um truque que sempre vale para matrizes quadradas, mesmo essas que são defeituosas e não podem ser diagonalizadas. É que o Jordan, matemático, encontrou a chamada forma de Jordan e que tem a ver com um jeito de lidar com matrizes que não podem ser diagonalizadas. Sempre teremos um auto-vetor, mas nem sempre teremos mais auto-vetores com auto-valores diferentes, pois podemos ter um bloco da matriz que não é diagonalizável. Como exemplo, considere uma matriz 6×6, de tal forma que tenha só três auto-valores distintos sendo que um deles se repete três vezes e outro se repete duas vezes, sobrando só um que não se repete. Os que se repetem são chamados de auto-valores degenerados e o que não se repete é chamado de não degenerado. Então, pode ocorrer que os dois blocos degenerados sejam de tal forma que não possam ser diagonalizados, ou seja, a matriz é defeituosa. Uma matriz simétrica ou, quando complexa, hermitiana é sempre diagonalizável. Mas quando não for ou simétrica ou hermitiana, então pode ser ou não diagonalizável. No caso em que temos a nossa matriz com dois auto-valores degenerados e que seus blocos degenarados não possam ser diagonalizados, 6×6, podemos colocá-la sempre na forma de Jordan, dando:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Temos um bloquinho não diagonalizável 2×2 na forma de Jordan,

$$B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

e outro, também não diagonalizável, 3×3 também na forma de Jordan,

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

O bloquinho 1×1 do auto-valor não degenerado λ_2 é diagonal, obvia e trivialmente. Demonstrar que sempre podemos colocar uma matriz quadrada na forma de Jordan é chato e leva tempo. Então, se você tiver interesse, dê uma procurada até na Wikipedia que você encontrará imensa literatura a respeito. Aqui, como nós só vamos usar matrizes 2×2 ou, no máximo, 3×3, nosso exemplo acima vai exaurir toda dificuldade que possa surgir durante exercícios do livro do Boyce et al.