Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

Seja o sistema de duas equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a_{11}(t)\,x(t) + a_{12}(t)\,y(t) + f(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}y(t) = a_{21}(t)\,x(t) + a_{22}(t)\,y(t) + g(t)\,.$$

Em termos matriciais, também podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Este é um sistema que pode não ter coeficientes independentes do tempo, já que $a_{mn}(t)$, para $m, n = 1, 2$, podem todos depender do tempo. No entanto, aqui, neste curso, vamos resolver o problema 2×2 acima e vamos considerar apenas coeficientes independentes do tempo. Com isso, você poderá facilmente resolver todos os problemas desde o 1 até o 12 das páginas 447 e 448 do livro do Boyce et al. E, com um pouco de cuidado, poderá até resolver os problemas desde o 14 até o 16 da página 448. Esses são problemas do fim do capítulo sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias inomogêneas.

Caso de coeficientes constantes

Neste caso, a equação diferencial matricial acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

onde agora a_{mn}, para $m, n = 1, 2$, são constantes. O que fizermos a seguir pode ser generalizado para o caso de sistemas maiores, mas nós vamos nos restringir a sistemas quadrados, isto é, quando a matriz de coeficientes é quadrada. A ideia aqui é lembrar do problema que já resolvemos quando temos apenas uma equação diferencial linear de primeira ordem. Precisamos, de alguma forma, encontrar um fator integrante, mesmo que, neste caso, o fator integrante seja uma matriz.

Ao invés de apresentar toda a teoria do capítulo 7 do livro do Boyce et al, vamos aqui resolver o problema 1 da página 447 desse livro. Vamos resolver passo a passo para poder estabelecer um algoritmo prático para a resolução desse tipo de problema. O problema é encontrar a solução geral da equação inomogênia:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz dos coeficientes,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

não é diagonal e nem simétrica. Precisamos, então, tentar diagonalizá-la. Para isso, precisamos encontrar as soluções para λ na equação:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$(2-\lambda)\,(-2-\lambda)+3 \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2-(2-2)\,\lambda-4+3 \quad = \quad 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 \quad = \quad 1.$$

Há, portanto, dois auto-valores distintos:

$$\lambda_{\pm} \quad = \quad \pm 1.$$

O próximo passo é encontrar os correspondentes auto-vetores. Para isso, escrevemos:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$(2-\lambda)\,\alpha-\beta \quad = \quad 0$$

e

$$3\alpha-(2+\lambda)\,\beta \quad = \quad 0.$$

Da primeira dessas duas equações, obtemos

$$\beta \quad = \quad (2-\lambda)\,\alpha.$$

Para simplificar, vamos tomar

$$\alpha \quad = \quad 1$$

e aí teremos

$$\beta \quad = \quad 2-\lambda.$$

Podemos até substituir esses valores na segunda das equações acima e verificar que, para nossos auto-valores, a segunda equação também é automaticamente satisfeita.

Temos, portanto, dois auto-vetores:

$$\begin{aligned} u_+ \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda_+ \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
u_- &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Note que estes auto-vetores são linearmente independentes, mas não são ortogonais.

Podemos construir uma matriz cujas colunas são dadas por esses dois auto-vetores:

$$
T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Como suas colunas não são linearmente dependentes, seu determinante não é nulo e esta matriz tem uma inversa. Note que

$$
\begin{aligned}
\det(T) &= 3-1 \\
&= 2 \neq 0
\end{aligned}
$$

e, portanto, pode ser invertida. A matriz chamada de co-fator de T é dada por

$$
\operatorname{cof}(T) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

e sua transposta é dada por

$$
[\operatorname{cof}(T)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Assim, a inversa fica:

$$
\begin{aligned}
T^{-1} &= \frac{1}{\det(T)}[\operatorname{cof}(T)]^t \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar então:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & 3-3 \\ -1+1 & -1+3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

como deveria ser.

Agora nós mudamos de variáveis fazendo o seguinte. Multiplicamos a equação dada pela esquerda por T^{-1}, obtendo:

$$T^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Como aqui temos coeficientes constantes, nós podemos reescrever esta equação como

$$\frac{d}{dt}\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Veja que o produto TT^{-1} dá a matriz identidade e, portanto, podemos sempre escrever

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}TT^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}T\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Podemos, portanto, definir novas variáveis assim:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \equiv T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

e nossa equação original agora fica assim:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}T\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

O grande negócio aqui é o que dá a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}T &= T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{pmatrix} 2-1 & 2-3 \\ 3-2 & 3-6 \end{pmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & -3+3 \\ -1+1 & 1-3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Você viu?! Obtivemos uma matriz diagonal com os nossos auto-valores ao longo da diagonal principal. Portanto, diagonalizamos a matriz dos coeficientes. É esse processo que é chamado de diagonalização.

Agora, nossa equação fica assim:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\exp(t) - t \\ -\exp(t) + t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r(t) \\ -s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\exp(t) - t \\ -\exp(t) + t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}r(t) = r(t) + \frac{1}{2}\left[3\exp(t) - t\right]$$

e

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + \frac{1}{2}\left[-\exp(t) + t\right].$$

Vemos, portanto, que desacoplamos as equações que antes eram acopladas.

Para resolver cada uma das duas equações, usamos o método do fator integrante. A primeira fica:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-t)\, r(t)\right] = \frac{1}{2}\left[3 - t\exp(-t)\right]$$

e, portanto,

$$\exp(-t)\, r(t) = c_1 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t\exp(-t) + \frac{1}{2}\exp(-t),$$

isto é,

$$r(t) = c_1\exp(t) + \frac{3}{2}t\exp(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$$

A segunda das equações fica:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\, s(t)\right] = \frac{1}{2}\left[-\exp(2t) + t\exp(t)\right]$$

e, assim,

$$\exp(t)\, s(t) = c_2 - \frac{1}{4}\exp(2t) + \frac{1}{2}t\exp(t) - \frac{1}{2}\exp(t),$$

ou seja,

$$s(t) = c_2\exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Em termos matriciais, a solução geral transformada fica:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2}t\exp(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A solução para as funções $x(t)$ e $y(t)$ são agora obtidas com a multiplicação pela matriz T, assim:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2}t\exp(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2}t\exp(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + c_2\exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ c_1 \exp(t) + \frac{3}{2}t\exp(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + 3c_2\exp(-t) - \frac{3}{4}\exp(t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + c_2\exp(-t) + \frac{3}{2}t\exp(t) - \frac{1}{4}\exp(t) + t \\ c_1 \exp(t) + 3c_2\exp(-t) + \frac{3}{2}t\exp(t) - \frac{3}{4}\exp(t) + 2t - 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1\exp(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}t\exp(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{4}\exp(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$