Alguns teoremas

Teorema 3.2.1 (Teorema da existência e unicidade)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y \quad = \quad g(t)\,,$$

com as seguintes condições iniciais dadas:

$$y(t_0) \quad = \quad y_0$$

e

$$y'(t_0) \quad = \quad y_0'.$$

Então, a solução $y = y(t)$ satisfazendo a equação diferencial e as condições iniciais existe e é única no intervalo onde a equação é válida.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Considere a seguinte equação homogênea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y \quad = \quad 0.$$

Seja

$$L[y] \quad \equiv \quad \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y.$$

Se y_1 e y_2 ambas são funções satisfazendo

$$L[y_1] \quad = \quad 0$$

e

$$L[y_2] \quad = \quad 0,$$

então segue que

$$y_s \quad \equiv \quad c_1y_1 + c_2y_2$$

também satisfaz

$$L[y_s] \quad = \quad 0,$$

para constantes quaisquer c_1 e c_2.

Teorema 3.2.3

Considere a seguinte equação homogênea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y = 0.$$

Seja

$$L[y] \equiv \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y.$$

Sejam y_1 e y_2 soluções da equação homogênea, isto é,

$$L[y_1] = 0$$

e

$$L[y_2] = 0.$$

Considere também as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0$$

e

$$y'(t_0) = y_0',$$

para um ponto t_0 do intervalo onde a equação é para ser resolvida. Definimos o wronskiano como sendo

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t_0) &\equiv y_1(t_0)\,y_2'(t_0) - y_2(t_0)\,y_1'(t_0) \\ &= \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Então, é possível encontrar c_1 e c_2 tais que

$$y \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2$$

satisfaz as condições iniciais, isto é,

$$y(t_0) = y_0$$

e

$$y'(t_0) = y_0',$$

se e somente se

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0.$$

Para vermos isso, tomamos a combinação linear $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ e impomos que

$$y(t_0) = y_0,$$

isto é,

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0.$$

Também calculamos

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

e impomos que

$$y'(t_0) = y_0',$$

ou seja,

$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'.$$

Tentemos agora resolver essas duas equações e encontrar c_1 e c_2. Multiplicando a primeira das equações por $y_2'(t_0)$:

$$c_1 y_1(t_0) y_2'(t_0) + c_2 y_2(t_0) y_2'(t_0) = y_0 y_2'(t_0).$$

Agora, multiplicamos a segunda das equações acima por $y_2(t_0)$:

$$c_1 y_2(t_0) y_1'(t_0) + c_2 y_2(t_0) y_2'(t_0) = y_0' y_2(t_0).$$

Subtraímos agora a segunda destas duas últimas equações da primeira, obtendo:

$$\begin{aligned} & c_1 y_1(t_0) y_2'(t_0) + c_2 y_2(t_0) y_2'(t_0) \\ & -c_1 y_2(t_0) y_1'(t_0) - c_2 y_2(t_0) y_2'(t_0) = y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0), \end{aligned}$$

isto é,

$$c_1 \left[y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_2(t_0) y_1'(t_0) \right] = y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0),$$

ou seja, como

$$W[y_1, y_2](t_0) \equiv y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_2(t_0) y_1'(t_0),$$

segue que

$$c_1 W[y_1, y_2](t_0) = y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0).$$

Com isto, vemos que teremos uma solução para c_1 se e somente se

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0.$$

Veja que, caso isto aconteça, encontramos:

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{W[y_1, y_2](t_0)}.$$

Também podemos considerar o seguinte:

$$c_1 y_1(t_0) y_1'(t_0) + c_2 y_2(t_0) y_1'(t_0) = y_0 y_1'(t_0)$$

e

$$c_1 y_1(t_0)\, y_1'(t_0) + c_2 y_1(t_0)\, y_2'(t_0) \quad = \quad y_0' y_1(t_0)\,.$$

Subtraindo, vem:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0)\, y_1'(t_0) + c_2 y_2(t_0)\, y_1'(t_0) & \\ -c_1 y_1(t_0)\, y_1'(t_0) - c_2 y_1(t_0)\, y_2'(t_0) &= y_0 y_1'(t_0) - y_0' y_1(t_0)\,, \end{aligned}$$

isto é,

$$c_2\left[y_2(t_0)\, y_1'(t_0) - y_1(t_0)\, y_2'(t_0)\right] \quad = \quad y_0 y_1'(t_0) - y_0' y_1(t_0)\,,$$

ou seja, como

$$W[y_1, y_2](t_0) \quad \equiv \quad y_1(t_0)\, y_2'(t_0) - y_2(t_0)\, y_1'(t_0)\,,$$

obtemos

$$-c_2 W[y_1, y_2](t_0) \quad = \quad y_0 y_1'(t_0) - y_0' y_1(t_0)\,,$$

ou, quando

$$W[y_1, y_2](t_0) \quad \neq \quad 0,$$

vem

$$c_2 \quad = \quad \frac{y_0' y_1(t_0) - y_0 y_1'(t_0)}{W[y_1, y_2](t_0)}.$$