

Equações diferenciais de segunda ordem, lineares e com coeficientes constantes

Considere a equação

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g(t),$$

onde a , b e c são constantes com $a \neq 0$. Esta equação é homogênea quando $g(t) \equiv 0, \forall t$, e é inhomogênea quando $g(t) \neq 0$. Este tipo de equação diferencial é de segunda ordem, linear e com coeficientes (a, b, c) constantes. A forma padrão que nós vamos usar é dividindo esta equação por a e definindo

$$p \equiv \frac{b}{a},$$

$$q \equiv \frac{c}{a}$$

e

$$f(t) \equiv \frac{g(t)}{a},$$

isto é,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t).$$

Note que temos o seguinte operador diferencial de segunda ordem:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + p \frac{d}{dt} + q.$$

Então, vemos que este operador é linear e a equação acima se escreve

$$\mathcal{L}x = f(t).$$

Note também que podemos pensar em uma classe de operadores diferenciais de primeira ordem assim:

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv \frac{d}{dt} + \alpha.$$

Seria, então, possível termos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha,$$

com valores α e β escolhidos adequadamente? Para responder, façamos:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + p \frac{d}{dt} + q \right) y = \left[\left(\frac{d}{dt} + \beta \right) \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right) \right] y,$$

para qualquer função $y = y(t)$. O primeiro membro dá:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + p\frac{d}{dt} + q\right)y = \frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy.$$

O segundo membro dá:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\right]y &= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left[\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)y\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left(\frac{dy}{dt} + \alpha y\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\alpha y \\ &= \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha y}{dt} + \beta\alpha y \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} + \beta\frac{dy}{dt} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta\alpha y \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta)\frac{dy}{dt} + \alpha\beta y. \end{aligned}$$

Logo, teremos $\mathcal{L} = \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha$ resolvendo para α e β o seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\alpha + \beta = p$$

e

$$\alpha\beta = q.$$

Substituindo $\beta = q/\alpha$ na primeira equação, vem:

$$\alpha + \frac{q}{\alpha} = p,$$

isto é,

$$\alpha^2 - p\alpha + q = 0.$$

Há duas soluções para esta equação de segundo grau:

$$\alpha_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Lembre-se:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo, também temos:

$$\begin{aligned}
\beta_{\pm} &= \frac{q}{\alpha_{\pm}} \\
&= \frac{q}{\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \\
&= \frac{2q}{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}.
\end{aligned}$$

Vejamos, primeiro,

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= \frac{2q}{p + \sqrt{p^2 - 4q}} \\
&= \frac{2q \left(p - \sqrt{p^2 - 4q} \right)}{\left(p + \sqrt{p^2 - 4q} \right) \left(p - \sqrt{p^2 - 4q} \right)} \\
&= \frac{2q \left(p - \sqrt{p^2 - 4q} \right)}{p^2 - (p^2 - 4q)} \\
&= \frac{2q \left(p - \sqrt{p^2 - 4q} \right)}{p^2 - p^2 + 4q} \\
&= \frac{2q \left(p - \sqrt{p^2 - 4q} \right)}{4q} \\
&= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\
&= \alpha_-.
\end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\beta_- = \alpha_+.$$

Vemos, portanto, que há duas possíveis fatorizações do operador $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\alpha_+} \mathcal{D}_{\alpha_-}$$

ou

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\alpha_-} \mathcal{D}_{\alpha_+},$$

isto é,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + p \frac{d}{dt} + q \right) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha_+ \right) \left(\frac{d}{dt} + \alpha_- \right)$$

ou

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + p \frac{d}{dt} + q \right) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha_- \right) \left(\frac{d}{dt} + \alpha_+ \right),$$

onde

$$\alpha_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Sendo assim, agora podemos reescrever nossa equação diferencial original,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t),$$

por exemplo, como

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha_{-}\right) \left(\frac{d}{dt} + \alpha_{+}\right) x(t) = f(t).$$

Definamos, então, uma nova incógnita:

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + \alpha_{+}\right) x(t).$$

Portanto, a equação para $y(t)$ fica:

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha_{-}\right) y(t) = f(t).$$

Exemplo meio degeneradinho: escolhendo um em que $4q = p^2$

Resolva a equação diferencial seguinte:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = \exp(-3t).$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, devemos resolver:

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) \left(\frac{d}{dt} + 1\right) x(t) = \exp(-3t).$$

Definimos:

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + 1\right) x(t)$$

e resolvemos, primeiro,

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y(t) = \exp(-3t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \exp(-3t).$$

Tentemos um fator integrante:

$$\mu(t) \frac{d}{dt}y(t) + \mu(t)y(t) = \mu(t)\exp(-3t),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] - y(t)\frac{d}{dt}\mu(t) + \mu(t)y(t) = \mu(t)\exp(-3t).$$

Para achar qual é o fator integrante que vai simplificar esta equação diferencial, nós impomos que

$$-y(t)\frac{d}{dt}\mu(t) + \mu(t)y(t) = 0,$$

isto é,

$$y(t)\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t)y(t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t).$$

Mas, também podemos escrever:

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = dt.$$

Integrando, obemos:

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int dt,$$

isto é,

$$\ln|\mu(t)| = t + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Logo,

$$|\mu(t)| = \exp(t + C),$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \pm \exp(C)\exp(t) \\ &= A\exp(t),\end{aligned}$$

onde $A \equiv \pm \exp(C)$ é uma constante multiplicativa arbitrária. O fator integrante para a equação diferencial dada acima, é simplesmente $\exp(t)$, já que a constante multiplicativa, qualquer que seja escolhida, será cancelada e, portanto, a tomamos como sendo 1. Com isto, a equação fica:

$$\exp(t) \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) y(t) = \exp(t) \exp(-3t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} [\exp(t) y(t)] = \exp(-2t),$$

ou ainda,

$$\int d [\exp(t) y(t)] = \int \exp(-2t) dt.$$

Então, segue que

$$\exp(t) y(t) = -\frac{1}{2} \exp(-2t) + C_1,$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Assim,

$$y(t) = -\frac{1}{2} \exp(-3t) + C_1 \exp(-t).$$

Mas,

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) x(t)$$

e, portanto, agora, para encontrar $x(t)$, substituímos nesta equação, a solução que obtivemos acima para $y(t)$, dando:

$$-\frac{1}{2} \exp(-3t) + C_1 \exp(-t) = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) x(t),$$

cujo fator integrante, de novo, é $\exp(t)$. Com isto, temos:

$$\frac{d}{dt} [\exp(t) x(t)] = -\frac{1}{2} \exp(-2t) + C_1.$$

Integrando, temos:

$$\exp(t) x(t) = -\frac{1}{2} \int dt \exp(-2t) + C_1 t + C_2,$$

onde C_2 é uma segunda constante de integração e, portanto, arbitrária também, como C_1 . Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} \exp(-t) \int dt \exp(-2t) + C_1 t \exp(-t) + C_2 \exp(-t) \\ &= \frac{1}{4} \exp(-t) \exp(-2t) + C_1 t \exp(-t) + C_2 \exp(-t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{1}{4} \exp(-3t) + C_1 t \exp(-t) + C_2 \exp(-t).$$