Equações diferenciais exatas de primeira ordem

Note que uma função de duas variáveis, digamos $f(x,y)$, tem uma diferencial definida como:

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Outra digressãozinha

De novo, tomamos um incremento no plano, isto é, tem um incremento Δx em x e outro, Δy, em y :

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y \\
&\approx \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \\
&\approx \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \\
&\approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,
\end{aligned}$$

quando $|\Delta x| \ll 1$ e $|\Delta y| \ll 1$. E, de forma análoga ao que fizemos acima, para funções de uma só variável, neste caso definimos a diferencial para uma função de duas variáveis assim:

$$df \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Retornando ao tópico, uma equação diferencial da forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é chamada de equação diferencial **exata** se a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ for uma diferencial de uma função das variáveis x e y, isto é, existe uma função $f = f(x,y)$ tal que sua diferencial é dada por:

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Sendo assim, temos que

$$df = 0$$

e, portanto, segue imediatamente que

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Tudo o que precisamos fazer, portanto, é achar $f(x,y)$.

A equação diferencial de primeira ordem

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é chamada de equação diferencial **exata** se a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ for uma diferencial de uma função das variáveis x e y, isto é, existe uma função $f = f(x,y)$ tal que sua diferencial é dada por:

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Sendo assim, temos que

$$df = 0$$

e, portanto, segue imediatamente que

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Tudo o que precisamos fazer, portanto, é achar $f(x,y)$. Para isso, notemos que a diferencial de $f(x,y)$ é dada por

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

e, como também estamos supondo que

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

segue que devermos ter

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{1}$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \tag{2}$$

supondo os incrementos dx e dy como sendo arbitrários e independentes, já que se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é, de fato, por hipótese, a diferencial de um função, então dx e dy devem ser pensados como incrementos arbitrários e independentes. Um critério que nos permite ver se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata ou não é notar que se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ forem funções contínuas, então, para que as Eqs. (1) e (2) valham, sendo também contínuas, decorre que $\partial f(x,y)/\partial x$ e $\partial f(x,y)/\partial y$ também são contínuas. Logo, como essas derivadas parciais são contínuas, segue necessariamente que

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right],$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y). \tag{3}$$

Assim, é necessário que esta equação seja válida para que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ seja uma diferencial. Ou seja, ao fazermos o teste se a Eq. (3) vale e concluirmos que não vale, segue que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ não é uma diferencial e, portanto, a equação dada não é exata.

Por outro lado, caso a Eq. (3) valha, segue imediatamente que isto é suficiente para concluirmos que a equação dada é exata. Esta suficiência é verificada como segue. Considere um campo vetorial dado por

$$\mathbf{w}(x,y) \equiv \hat{\mathbf{x}}M(x,y) + \hat{\mathbf{y}}N(x,y).$$

O rotacional deste campo vetorial é dado por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{w}(x,y) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y) & N(x,y) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}0\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\
&= \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese, a Eq. (3) é válida e, portanto,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{w}(x,y) = \mathbf{0}.$$

Sendo assim, como o rotacional é zero no plano xy, segue que existe uma função escalar, $\phi(x,y,z)$, como em eletrostática, tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(x,y) &= -\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) \\
&= -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\phi}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Pela definição de $\mathbf{w}(x,y)$, vemos que, então,

$$M(x,y) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x},$$

$$N(x,y) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

A terceira desta equações mostra que $\phi(x,y,z)$ não depende da variável z e, portanto, é uma função só de x e y. Vamos denotar essa função por $-f(x,y)$ e aí concluímos, das equações acima, que, como consequência de que a Eq. (3) vale, segue a existência de uma função $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Com isso, portanto, segue agora que a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata, já que acabamos de demonstrar a existência de uma função tal que:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

que, pela definição de diferencial, é equivalente a termos

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = df.$$

A equação diferencial dada é, dessa forma, equivalente a termos

$$df = 0,$$

ou seja, as soluções são tais que satisfazem

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Basta resolver agora y como função de x ou x como função de y. O critério resumido na Eq. (3) é, portanto, necessário e suficiente para termos uma equação diferencial exata.

Como encontramos $f(x,y)$? Simples, resolvemos duas equações parciais:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Só isso. Segue um exemplo resolvido do livro de Boyce et al; é o de número 4, na página 100. Queremos resolver a equação diferencial

$$3xy + y^2 + \left(x^2 + xy\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Escrevendo no formato padrão com que começamos esta discussão, multiplicamos tudo por dx e obtemos

$$\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0.$$

Logo, neste exemplo,

$$M(x,y) = 3xy + y^2$$

e

$$N(x,y) = x^2 + xy.$$

Usando nosso critério da Eq. (5),

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y), \tag{4}$$

calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 3x+2y$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 2x+y.$$

Nossa conclusão é que esta equação diferencial não é exata. Portanto, não há uma função f tal que $df=0$ é equivalente a esta equação.

Há, porém, uma outra coisa podemos fazer para transformar, facilmente, em alguns casos, uma equação que não é exata em outra que seja. Neste exemplo, temos a equação que, como acabamos de ver, não é exata:

$$\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy = 0.$$

E se houver um fator integrante, $\mu(x)$, tal que quando multiplicamos por esta equação, obtemos uma equação diferencial exata? Isto é, será que há $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\left(3xy+y^2\right)dx+\mu(x)\left(x^2+xy\right)dy = 0$$

agora é uma equação exata? Para verificar isto, bata usarmos nosso critério miraculoso, isto é,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{5}$$

Tomemos

$$M(x,y) = \mu(x)\left(3xy+y^2\right)$$

e

$$N(x,y) = \mu(x)\left(x^2+xy\right).$$

Agora, calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \mu(x)(3x+2y)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2+xy\right)+\mu(x)(2x+y).$$

Para que estas duas equações sejam iguais, impomos que

$$\mu(x)(3x+2y) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2+xy\right)+\mu(x)(2x+y),$$

isto é,

$$\frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2+xy\right) = \mu(x)(3x+2y-2x-y),$$

ou seja,

$$\frac{d\mu\left(x\right)}{dx}x\left(x+y\right) = \mu\left(x\right)\left(x+y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{d\mu\left(x\right)}{dx}x = \mu\left(x\right),$$

que queremos que a equação valha em todos os pontos do plano xy e, portanto, podemos tomar $x, y \neq 0$ e cancelar $x+y$ em ambos os membros. Lembre-se também que, aqui, x e y têm que ser vistas como duas variáveis independentes, para podermos falar de diferenciais de funções de duas variáveis independentes. Logo, podemos escrever a equação acima como

$$\frac{1}{\mu\left(x\right)}\frac{d\mu\left(x\right)}{dx} = \frac{1}{x},$$

isto é,

$$\frac{d\ln\left|\mu\left(x\right)\right|}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Integrando, dá

$$\ln\left|\mu\left(x\right)\right| = \ln\left|x\right| + K,$$

onde K é uma constante arbitrária. Para fatores integrantes, como já vimos em outro contexto, podemos tomar a constante arbitrária que aparece como sendo o valor que acharmos mais conveniente, e aqui tomamos como sendo zero. Com isso,

$$\ln\left|\mu\left(x\right)\right| = \ln\left|x\right|$$

e, exponenciando,

$$\mu\left(x\right) = \pm x.$$

Para fatores integrantes, por ser fatores, podemos simplesmente escolher qualquer constante multiplicativa e, como prefiro $+1$ ao invés de -1, vou escolher

$$\mu\left(x\right) = x.$$

Agora a nossa equação diferencial fica:

$$\mu\left(x\right)\left(3xy+y^2\right)dx + \mu\left(x\right)\left(x^2+xy\right)dy = 0,$$

isto é,

$$\left(3x^2y+xy^2\right)dx + \left(x^3+x^2y\right)dy = 0.$$

Neste caso,

$$M\left(x,y\right) = 3x^2y+xy^2$$

e

$$N(x,y) = x^3 + x^2 y.$$

Vamos usar o critério dos milagres:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = 3x^2 + 2xy$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = 3x^2 + 2xy.$$

Como estas duas derivadas parciais são iguais, a nova equação diferencial é exata e só temos que encontrar uma função $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ &= 3x^2 y + xy^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \\ &= x^3 + x^2 y.\end{aligned}$$

Integrando a primeira delas com relação a x, obtemos:

$$f(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função que só depende de y. Agora integramos a segunda equação acima com relação a y e obtemos:

$$f(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + h(x),$$

onde $h(x)$ é uma função que só depende de x. Mas como $f(x,y) = f(x,y)$, para todo valor de x e y, então temos que ter

$$x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + g(y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + h(x),$$

isto é,

$$g(y) = h(x).$$

A única solução plausível para esta equação, enfim, é que

$$\begin{aligned} g &= h \\ &= C', \end{aligned}$$

onde C' é uma constante arbitrária. Portanto, nossa função $f(x,y)$ é dada por

$$f(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + C'.$$

A equação diferencial que temos que resolver é, portanto,

$$df = 0,$$

que é equivalente a termos

$$f = C'',$$

onde C'' é uma constante arbitrária. Nossa família de soluções é, finalmente, dada por

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + C' = C'',$$

isto é,

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = C,$$

com

$$C \equiv -C' + C''$$

uma constante arbitrária. Se quisermos y como uma função de x, fazemos:

$$y^2 + 2xy - \frac{2C}{x^2} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 8\frac{C}{x^2}}}{2} \\ &= -x \pm \sqrt{x^2 + 2\frac{C}{x^2}}. \end{aligned}$$

Podemos simplificar ainda mais tomando

$$k \equiv 2C.$$

Aí temos:

$$y = -x \pm \frac{1}{x}\sqrt{k + x^4}.$$