Adendo da aula 5: uma demonstração alternativa, sem usar o rotacional

Vamos considerar uma equação diferencial dada por

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad = \quad 0,$$

mas tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\,.$$

Se isso for verdade, queremos ver que, então, como uma consequência dessas duas hipóteses acima, concluímos que existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$df \quad = \quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

onde

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad = \quad M(x,y)$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad = \quad N(x,y)\,.$$

Não vamos usar mais do que cálculo de duas variáveis aqui.

Vamos considerar uma região S do plano xy que seja convexa. Para o caso em que a região é côncava, podemos sempre quebrá-la em uma união de regiões convexas. Para mais detalhes, faça uma pesquisa sobre regiões convexas e côncavas na internet.

Consideremos que a curva fechada C seja a fronteira da região S. Podemos considerar esse problema no plano xy de dois pontos de vista, como mostra a figura seguinte.

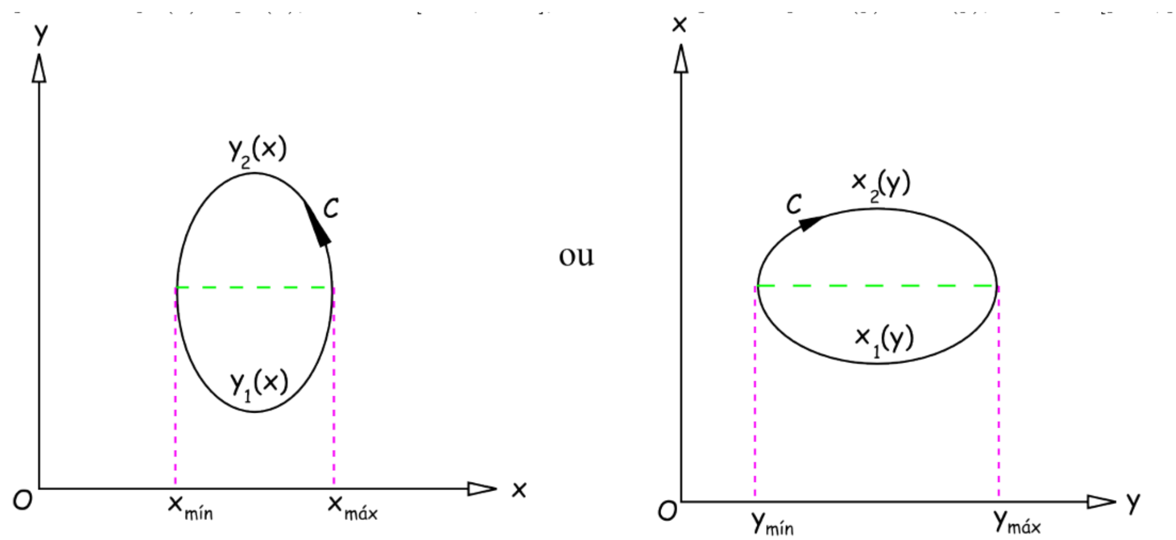

Figure 1: Uma região S, convexa, do plano xy vista de dois pontos de vista.

Vamos calcular a integral na região S da quantidade $\partial M(x,y)/\partial y$. Queremos, portanto, calcular

$$S_M = \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \frac{\partial M(x,y)}{\partial y},$$

quando consideramos o ponto de vista da esquerda na figura acima. Para x qualquer de valor fixo, a integral em y fica

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = M(x, y_2(x)) - M(x, y_1(x)).$$

Com isso, obtemos

$$S_M = \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx M(x, y_2(x)) - \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx M(x, y_1(x)).$$

Podemos interpretar o membro direito desse resultado como uma integral de linha. A coordenada x sendo integrada pode ser vista como um parâmetro que faz o integrando andar pela curva fechada C. A primeira integral, no entanto, passa por cima, pois estamos calculando o integrando com $y = y_2(x)$. Essa integral, no entanto, caminha ao contrário do sentido anti-horátio da curva C no lado de cima do desenho. Para ficar tudo conforme o desenho, podemos escrever:

$$S_M = -\int_{x_{máx}}^{x_{mín}} dx M(x, y_2(x)) - \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx M(x, y_1(x)).$$

Agora, sim, ignorando os sinais de menos por enquanto, na integração acima começamos de $x_{máx}$, caminhamos ao longo do sentido anti-horário sobre C calculando o integrando sobre $y_2(x)$ e aí paramos em $x_{mín}$. A partir desse ponto, a outra integral caminha sobre $y_1(x)$, desde $x_{mín}$ até $x_{máx}$, fechando a curva C, tendo caminhado sobre C no sentido anti-horário. Logo, podemos abreviar a notação e escrever:

$$S_M = -\oint_C M(x,y)\, dx,$$

onde agora inserimos o sinal de menos novamente que tínhamos temporariamente ignorado.

Vamos calcular, na mesma região S, a integral de $\partial N(x,y)/\partial x$. Assim, queremos calcular

$$S_N = \int_{y_{mín}}^{y_{máx}} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

quando consideremos o ponto de vista da direita da figura acima. Como fizemos acima, vamos agora fixar um valor qualquer de y e calcular a integral:

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = N(x_2(y), y) - N(x_1(y), y).$$

Desse modo,

$$S_N = \int_{y_{mín}}^{y_{máx}} dy N(x_2(y), y) - \int_{y_{mín}}^{y_{máx}} dy N(x_1(y), y).$$

Mas agora, pelo desenho da direita da figura acima, vemos que é a segunda integral no membro direito dessa equação que vai contra o sentido horário da integral de linha. Logo, escrevemos:

$$S_N = \int_{y_{mín}}^{y_{máx}} dy N(x_2(y), y) + \int_{y_{máx}}^{y_{mín}} dy N(x_1(y), y).$$

Então, como C é a mesma curva, mas é no sentido anti-horário no primeiro ponto de vista da figura acima e é no sentido horátio no segundo ponto de vista, podemos escrever também:

$$S_N \quad = \quad \oint_C N(x,y)\,dy.$$

Notemos que, pela definição de S_M e S_N acima, temos:

$$\begin{aligned} S_M - S_N &= \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \int_{y_{mín}}^{y_{máx}} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \\ &= \int_{x_{mín}}^{x_{máx}} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

pois, a integral dupla sobre $\partial N(x,y)/\partial x$ dá o mesmo resultado se olharmos a região de integração S de ambos os pontos de vista da figura acima. E, pela hipótese de que em todo o plano xy vale

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} N(x,y),$$

concluímos que

$$S_M - S_N \quad = \quad 0.$$

Pelos resultados das integrais acima, segue que

$$-\oint_C M(x,y)\,dx - \oint_C N(x,y)\,dy \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$\oint_C [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad 0.$$

Esse resultado usa o fato de que a curva fechada C é convexa. Vamos ver como podemos generalizar esse resultado para uma curva que não é convexa. Pensemos, por exemplo, na curva da figua seguinte.

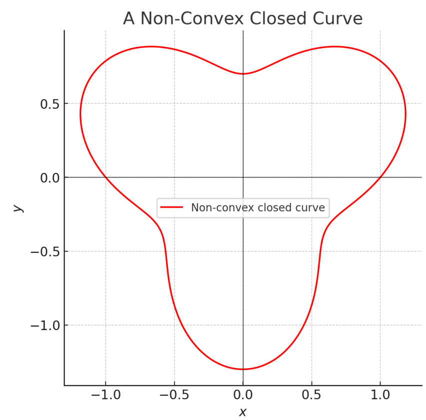

Figure 2: Uma curva fechada que não é convexa.

Nesse caso, podemos dividir a região dentro da curva fechada em regiões convexas. A curva abaixo ilustra como podemos inscrever um triângulo na região cuja fronteira é essa curva da figura acima.

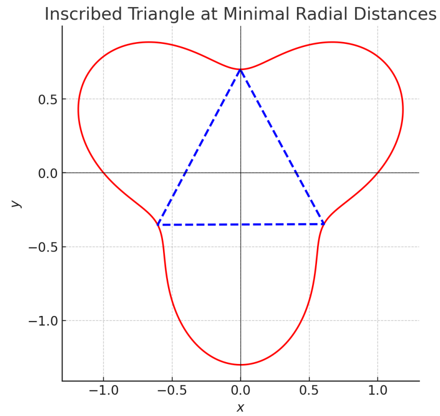

Figure 3: Um triângulo inscrito na curva que não é convexa.

Nesse caso, agora vemos que, exceto pelas junções entre o triângulo e a curva original, dividimos a região em quatro regiões convexas. Os pedaços que, por ventura, ainda não sejam convexos, podem ser subdividos em pedaços menores até que o que sobrar que não seja convexo possa ser, no limite de infinitas subdivisões, ser desprezados. A integral de linha sobre cada linha fechada de cada uma das quatro novas regiões menores, quando são concatenadas, se anulam e a soma das quatro integrais de linha resulta novamente na integral sobre a curva original que não é convexa. Com isso, como em cada pedaço vale que a integral de linha é nula, a soma de todas as quatro integrais de linha resulta em zero. Com isso, concluímos que mesmo quando a curva não é convexa, vale nosso resultado acima e C pode ser qualquer curva fechada. Você pode pensar em generalizações mais complicadas, como quando a curva se cruza sobre si mesma. O resultado ainda vai valer.

Só um detalhe: para ver que as integrais de linha se cancelam quando concatenamos duas curvas, notemos que dx e dy ao longo de um caminho trocam de sinal quando invertemos o sentido do caminho. Como quando concatenamos duas curvas, ambas sendo integradas no sentido anti-horário, por convenção, então na junção das linhas da concatenação teremos um caminho do mesmo integrando sendo subtraído do mesmo caminho com o mesmo integrando e a integral de linha total, a soma da ida com a da volta, resulta em zero. A figura abaixo mostra a ilustração desse fato.

Figure 4: Duas curvas fechadas com respectivas circuitações ambas em sentido anti-horário.

Podemos sempre, portanto, subdividir a região interna a uma curva fechada qualquer com uma partição de infinitas curvas fechadas, todas convexas, como os dois retângulos da figura acima e, como vale nossa hipótese, em cada uma dessas circuitações, dessas integrais de linha fechadas, teremos zero. Logo, como nas linhas de junção entre uma pequena curva à outra sempre teremos a integral de caminho nula, ao somar todas as pequenas integrações, só vão sobrar aquelas que não se contatenam a nenhuma outra curva vizinha. Essa curva final é a curva que foi subdividida. E assim, vemos que sempre teremos, para qualquer curva fechada C, o resultado acima:

$$\oint_C [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad 0.$$

Vamos agora considerar, então, duas curvas, ambas que saem do ponto A no plano xy e chegam no ponto B, diferente de A. Ao caminarmos de A para B por uma curva e depois, pela outra curva, de B para A, teremos feito uma integral de linha fechada e, portanto, obtemos zero. Seja C_{ida} o caminho de A para B e a outra curva, C_{volta}, o caminho de B para A. Com isso, podemos escrever:

$$\int_{A,C_{ida}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] + \int_{B,C_{volta}}^{A} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad 0.$$

Mas, claramente, ao invertermos o caminho da volta, podemos escrever:

$$\int_{B,C_{volta}}^{A} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad -\int_{A,C_{volta}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy]$$

e, assim,

$$\int_{A,C_{ida}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] - \int_{A,C_{volta}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$\int_{A,C_{ida}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] \quad = \quad \int_{A,C_{volta}}^{B} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy]\,.$$

Como C_{ida} e C_{volta} são quaisquer, vemos que esse resultado pode ser interpretado como dizendo que a integral de linha sobre uma curva aberta de um ponto A para um ponto B é uma função só dos pontos A e B, e não depende de como ligamos esses pontos com uma curva contínua de A até B.

Vamos então fixar o ponto A como um ponto de referência e tomar o ponto B como o ponto com vetor posição $\mathbf{r}$. Com isso, definimos uma função de $\mathbf{r}$ que é dada por

$$f(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_A^{\mathbf{r}} [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy]\,.$$

Como as variáveis de integração são mudas, podemos chamá-las, por exemplo, de x' e y' e, com isso, agora podemos usar x e y como as coordenadas do ponto cujo vetor posição é $\mathbf{r}$. Assim, escrevemos, simplesmente,

$$f_A(x,y) \quad = \quad \int_A^{(x,y)} [M(x',y')\,dx' + N(x',y')\,dy']\,.$$

Eu coloquei o subscrito A em $f_A(x,y)$ porque temos infinitas funções $f_P(x,y)$, bastando escolher outros pontos diferentes, P. Mas, qualquer que seja A, o que vamos mostrar agora vale, independente de nossa escolha de ponto de referência. Nós só precisamos achar uma função qualquer com as propriedades que vamos demonstrar a seguir.

Vamos considerar a situação de uma região S retangular, como na figura a seguir.

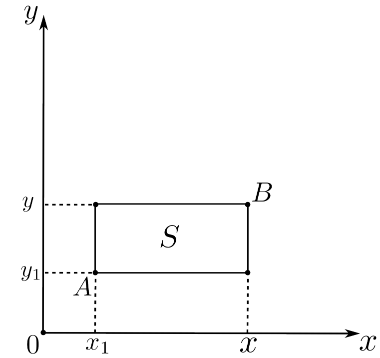

Figure 5: Uma região retangular S no plano xy.

Nesse caso, podemos ir do ponto A de referência até o ponto B, cujas coordenadas são x e y, por dois caminhos distintos, mas a integral acima vai resultar no mesmo valor $f_A(x, y)$. Indo por cima, podemos escrever

$$\begin{aligned} f_A(x,y) &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y)} N(x',y')\,dy' + \int_{(x_1,y)}^{(x,y)} M(x',y')\,dx' \\ &= \int_{y_1}^{y} N(x_1,y')\,dy' + \int_{x_1}^{x} M(x',y)\,dx', \end{aligned}$$

pois $dx' = 0$ no trecho vertical e $dy' = 0$ no trecho horizontal. Podemos, então, calcular a derivada parcial de $f_A(x, y)$ com relação a x e obtemos:

$$\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

já que, nesse caso, a primeira integral do membro direito não depende de x e

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} M(x',y)\,dx' = M(x,y),$$

já que y está fixo durante a integração.

Podemos, agora, sair de A e chegar em $B \equiv (x, y)$ por baixo, e escrevemos $f_A(x, y)$ como

$$\begin{aligned} f_A(x,y) &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y_1)} M(x',y')\,dx' + \int_{(x,y_1)}^{(x,y)} N(x',y')\,dy' \\ &= \int_{x_1}^{x} M(x',y_1)\,dx' + \int_{y_1}^{y} N(x,y')\,dy', \end{aligned}$$

pois $dy' = 0$ no trecho horizontal e $dx' = 0$ no trecho vertical. Vamos derivar $f_A(x, y)$ parcialmente com relação a y agora e obtemos:

$$\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

já que a primeira integral não depende de y e

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_1}^{y} N\left(x,y'\right)dy' \quad = \quad N\left(x,y\right).$$

Com isso, demonstramos as propriedades almejadas.