Fórmula de de Moivre

Já vimos que, para uma variável $\theta \in \mathbb{R}$,

$$[\exp(i\theta)]^n = \exp(in\theta),$$

com $n \in \mathbb{Z}$. A fórmula de de Moivre é exatamente esta que acabamos de escrever, expressa em termos de cosseno e seno:

$$(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta).$$

O logaritmo de uma variável complexa

Considere $z \in \mathbb{C}$. Se quisermos encontrar todos os valores de $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$\exp(w) = z,$$

teremos encontrado, por definição, os valores de $\ln z$. Para isso, vejamos um exemplo. Encontremos o $\ln(-1)$. Pela definição que acabamos de apresentar, devemos encontrar todos os valores $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$\exp(w) = -1.$$

Seja

$$w = x + iy,$$

com $x, y \in \mathbb{R}$. Neste caso, queremos encontrar x, y tais que

$$\exp(x + iy) = -1,$$

isto é,

$$\exp(x)\exp(iy) = -1,$$

ou seja,

$$\exp(x)\cos(y) = -1$$

e

$$\exp(x)\,\mathrm{sen}(y) = 0$$

ao mesmo tempo. Como $\exp(x) \neq 0$, segue que

$$\mathrm{sen}(y) = 0.$$

Então,

$$y = n\pi,$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Sabendo isso, vemos que

$$\exp(x)\cos(n\pi) = -1,$$

isto é,

$$\exp(x)(-1)^n = -1,$$

ou seja,

$$x = 0$$

e n deve ser ímpar. Logo,

$$\begin{aligned}\ln(-1) &= x + iy \\ &= i(2k+1)\pi \\ &= i\pi + i2\pi k,\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Veja que

$$-1 = \exp(i\pi),$$

de forma que o logaritmo que obtivemos é também escrito como

$$\ln[\exp(i\pi)] = i\pi + i2\pi k.$$

Então, em geral, podemos sempre escrever que

$$\ln[\exp(i\theta)] = i\theta + i2\pi k,$$

para $\theta \in \mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para qualquer variável complexa, $z \in \mathbb{C}$, portanto, primeiro escrevermos

$$z = |z| \exp(i\theta),$$

já que sempre podemos encontrar um tal $\theta \in \mathbb{R}$, e aí, de agora em diante, podemos também definir:

$$\begin{aligned}\ln(z) &\equiv \ln|z| + \ln[\exp(i\theta)] \\ &= \ln|z| + i\theta + i2\pi k,\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Não se esqueça de que, sempre,

$$|\exp(i\theta)| = 1,$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

Equações diferenciais separáveis de primeira ordem

Temos a forma geral:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad = \quad 0.$$

Por que é geral? Por exemplo, tomando

$$M(x,y) \quad = \quad q(x)\,y - f(x)$$

e

$$N(x,y) \quad = \quad p(x),$$

teremos:

$$[q(x)\,y - f(x)]\,dx + p(x)\,dy \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y \quad = \quad f(x).$$

Quando acontecer que

$$M(x,y) \quad = \quad h(x)$$

e

$$N(x,y) \quad = \quad g(y),$$

teremos:

$$h(x)\,dx + g(y)\,dy \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$g(y)\,dy \quad = \quad -h(x)\,dx,$$

que é fácil de resolver, em princípio, bastando apenas fazer a integração de ambos os membros:

$$\int g(y)\,dy \quad = \quad -\int h(x)\,dx.$$

Neste caso, dizemos que a equação diferencial é **separável**.

Vamos ver o Exemplo 2 do livro-texto de Boyce et al:

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}.$$

Podemos reescrever esta equação diferencial como:

$$-\left(3x^2+4x+2\right)dx + 2(y-1)\,dy \quad = \quad 0$$

e vemos que a equação é separável. A solução é obtida por integração:

$$2\int (y-1)\,dy \quad = \quad \int \left(3x^2+4x+2\right)dx,$$

isto é,

$$2\left(\frac{y^2}{2}-y+C_1\right) \quad = \quad x^3+2x^2+2x+C_2,$$

ou seja,

$$y^2-2y \quad = \quad x^3+2x^2+2x+C_2-2C_1,$$

ou ainda,

$$y^2-2y \quad = \quad x^3+2x^2+2x+C,$$

com

$$C \quad \equiv \quad C_2-2C_1$$

uma constante arbitrária.

Digressão: diferenciais

Suponha uma função de x, digamos, $f(x)$. A variação de $f(x)$, quando x varia de um incremento Δx (que pode ser positivo ou não), é denotado por $\Delta f = \Delta f(x)$ e definido como:

$$\Delta f(x) \quad \equiv \quad f(x+\Delta x)-f(x).$$

Por exemplo, quando

$$f(x) \quad = \quad x^2,$$

temos:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 \\ &= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x)-f(x) \\ &= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 \\ &= 2x\Delta x+(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

No caso em que $|\Delta x| \ll 1$, podemos aproximar:

$$\Delta f \quad \approx \quad 2x\Delta x.$$

Neste caso, a aproximação até a primeira ordem de Δx da variação de $f(x)$ é definida como a diferencial da função f e denotada, neste exemplo, como

$$df = 2x\Delta x.$$

Note que, neste exemplo, $2x$ é $f'(x)$. Assim, temos, em um caso geral,

$$df \equiv f'(x)\,\Delta x.$$

Veja que podemos pensar em x como sendo a função x, isto é, x é uma função de x, que se denotarmos por $g(x)$, então podemos escrevê-la assim:

$$g(x) = x.$$

Com isso, a diferencial de g, pela definição acima, fica:

$$dg \equiv g'(x)\,\Delta x.$$

Mas,

$$g'(x) = 1$$

e, assim,

$$dg = \Delta x.$$

Mas, $g = g(x) = x$ e, com isto, temos:

$$\begin{aligned} dg &= dx \\ &= \Delta x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta x = dx$$

e, portanto,

$$df = f'(x)\,dx.$$

Claramente, também, vemos que:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right) \\
&= 2x \\
&= f'\left(x\right).
\end{aligned}$$

Vemos, portanto, facilmente, que, no caso geral, quando a função f é qualquer, que podemos sempre considerar que

$$\frac{df}{dx} = f'\left(x\right).$$

Note também que, em geral,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x} \\
&= f'\left(x\right),
\end{aligned}$$

que é a definição de derivada.

Veja também que a diferencial dá uma aproximação para a curva $f\left(x+\Delta x\right)\equiv s_x\left(\Delta x\right)$ como função do incremento Δx :

$$\begin{aligned}
f\left(x+\Delta x\right) &\approx f\left(x\right)+df \\
&= f\left(x\right)+f'\left(x\right)\Delta x,
\end{aligned}$$

ou em termos da curva tangente ao ponto $\left(x,y=f\left(x\right)\right)$,

$$s_x\left(\Delta x\right) \approx s_x\left(0\right)+m\Delta x,$$

onde $m\equiv f'\left(x\right)$ é o coeficiente angular da reta tangente.