Raízes de números complexos

Já fizemos um exercício que implica no seguinte resultado:

$$\exp(z' + z') = \exp(z')\exp(z'),$$

isto é,

$$\exp(2z') = [\exp(z')]^2,$$

ou seja,

$$[\exp(z')]^2 = \exp(2z').$$

Nós vimos acima que para

$$z = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, sempre podemos escrever

$$z = \exp(z'),$$

com

$$z' = \alpha + i\beta,$$

onde α e β são calculados como acima. Logo, a equação

$$[\exp(z')]^2 = \exp(2z')$$

pode ser escrita assim:

$$z^2 = \exp(2z').$$

Exercício Mostre que, para $\forall n \in \mathbb{Z}$, temos

$$z^n = \exp(nz').$$

Como podemos utilizar esses resultados acima para extrair raízes inteiras de um número complexo qualquer?

Consideremos o problema de encontrar $\sqrt[3]{i}$. Por definição, as raízes $\sqrt[3]{i}$ são números complexos z tais que

$$z^3 = i.$$

Devemos encontrar todos os números z's tais que cada um, elevado ao cubo, seja igual a i. Sabemos que esses números z's têm formas que podem ser assim escritas:

$$z = \exp(\alpha + i\beta)$$

e nosso objetivo é encontrar todos os α's e β's para que $z^3 = i$. Sendo assim, impomos que

$$[\exp(\alpha + i\beta)]^3 = i.$$

Logo, pelo que vimos acima,

$$\exp(3\alpha + i3\beta) = i.$$

Como

$$\begin{aligned}\exp(3\alpha + i3\beta) &= \exp(3\alpha)\exp(i3\beta)\\ &= \exp(3\alpha)\left[\cos(3\beta) + i\mathrm{sen}(3\beta)\right]\\ &= \exp(3\alpha)\cos(3\beta) + i\exp(3\alpha)\,\mathrm{sen}(3\beta),\end{aligned}$$

devemos impor

$$\exp(3\alpha)\cos(3\beta) + i\exp(3\alpha)\,\mathrm{sen}(3\beta) = i$$

e achar todos os valores de α e β para os quais esta equação é válida. Esta equação complexa, equivalentemente, corresponde a duas equações reais:

$$\exp(3\alpha)\cos(3\beta) = 0$$

e

$$\exp(3\alpha)\,\mathrm{sen}(3\beta) = 1.$$

A primeira equação fica:

$$\exp(3\alpha)\cos(3\beta) = 0,$$

isto é,

$$\cos(3\beta) = 0$$

e, portanto,

$$3\beta = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

ou seja,

$$\beta = (2m+1)\frac{\pi}{6},$$

com $m \in \mathbb{Z}$. Vamos resolver também a segunda equação:

$$\exp(3\alpha)\,\mathrm{sen}(3\beta) = 1,$$

isto é,

$$\exp(3\alpha)\,\mathrm{sen}\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

Veja que

$$\mathrm{sen}\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^m.$$

Portanto, a equação agora fica:

$$\exp(3\alpha)(-1)^m = 1,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\exp(3\alpha) &= (-1)^{-m} \\ &= (-1)^{-m}\frac{(-1)^m}{(-1)^m} \\ &= \frac{(-1)^{-m}}{(-1)^m}(-1)^m \\ &= \frac{1}{(-1)^{2m}}(-1)^m \\ &= \frac{1}{\left[(-1)^2\right]^m}(-1)^m,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\exp(3\alpha) = (-1)^m.$$

Como $\exp(3\alpha) > 0$, segue que só serão soluções, os casos em que m for par. Assim,

$$\exp(3\alpha) = 1$$

com m par. Tomando o logaritmo de ambos os membros desta equação, encontramos que

$$\begin{aligned}3\alpha &= \ln(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, assim, concluímos que

$$\alpha = 0.$$

As raízes cúbicas de i são, portanto, da forma

$$\begin{aligned}z &= \exp(\alpha + i\beta) \\ &= \exp\left[i(2m+1)\frac{\pi}{6}\right],\end{aligned}$$

mas com m inteiro e par. Escrevamos, então, $m = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, as raízes cúbicas de i são dadas por

$$\begin{aligned}z &= \exp\left[i(4k+1)\frac{\pi}{6}\right] \\ &= \exp\left(i\frac{\pi}{6} + i\frac{k2\pi}{3}\right),\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Veja que

$$\exp\left(i\frac{\pi}{6} + i\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right).$$

Note que o cosseno e o seno são funções periódicas com período igual a 2π e, nesta solução, conforme o k vai varrendo todos os inteiros, só vamos ter três possíveis valores diferentes desta solução, sendo que eles são os que se obtêm, por exemplo, para $k = 0, 1, 2$. Aí, quando $k = 3$, por exemplo, $2k\pi/3 = 2\pi$ e a solução assume de novo o valor que havia assumido para $k = 0$. É por isso que as raízes n-ésimas são sempre dadas com o ângulo β/n somado a $2k\pi/n$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e há apenas n raízes distintas.

Exercício Mostre que

$$\sqrt[n]{\exp(i\beta)} = \exp\left(i\frac{\beta}{n} + i\frac{2k\pi}{n}\right),$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, sendo que quaisquer outros valores de $k \in \mathbb{Z}$ só vão dar as mesmas raízes de novo dentro do conjunto das n raízes distintas com k's tais que $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Vejamos, portanto, que um número complexo qualquer, podendo sempre ser escrito como

$$z = \exp(\alpha + i\beta),$$

pode diretamente ter suas raízes n-ésimas calculadas diretamente assim:

$$\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{\alpha}{n} + i\frac{\beta}{n} + i\frac{2k\pi}{n}\right), \tag{1}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Tudo o que você tem a fazer é sempre escrever z na forma $\exp(\alpha + i\beta)$ e aí seguir a receita da Eq. (1) para achar todas suas raízes n-ésimas.

Para realmente verificar que estamos falando coisas óbvias, façamos o seguinte:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = \left[\exp\left(\frac{\alpha}{n} + i\frac{\beta}{n} + i\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^n.$$

Mas já sabemos que

$$\begin{aligned}
\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n} + i\frac{\beta}{n} + i\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^n &= \exp\left(n\frac{\alpha}{n} + ni\frac{\beta}{n} + ni\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \exp(\alpha + i\beta + i2k\pi) \\
&= \exp(\alpha + i\beta)\exp(i2k\pi) \\
&= \exp(\alpha + i\beta)\left[\cos(2k\pi) + i\mathrm{sen}(2k\pi)\right] \\
&= \exp(\alpha + i\beta)\cos(2k\pi) \\
&= \exp(\alpha + i\beta) \\
&= z
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z,$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, como deveria ser. Pronto! Agora podemos extrair todas as raízes n-ésimas de números complexos!

Funções de variável complexa

Nós já vimos que a função

$$f(z) = \exp(z)$$

é uma função que tem $\mathbb{C}$ como seu domínio e tem a imagem em $\mathbb{C}$. Vejamos se há algum $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. Para isso, escrevemos:

$$z_0 = x + iy,$$

com $x, y \in \mathbb{R}$. Então, procuremos por

$$\exp(x + iy) = 0.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \exp(x + iy) &= \exp(x)\exp(iy) \\ &= \exp(x)(\cos y + i\text{sen}y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso é possível? Para isso, teríamos que ter, ao mesmo tempo,

$$\exp(x)\cos y = 0$$

e

$$\exp(x)\,\text{sen}y = 0.$$

Como $\exp(x) \neq 0$, devemos ter, simultaneamente,

$$\cos y = 0$$

e

$$\text{sen}y = 0.$$

Mas, isto não é possível. Logo, zero não pertence à imagem de $f(z)$.

Podemos, então, definir várias funções usando a exponencial complexa. Como, para $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\text{sen}\theta$$

e

$$\exp(-i\theta) = \cos\theta - i\text{sen}\theta,$$

somando e subtraindo, obtemos, respectivamente:

$$\cos\theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2}$$

e

$$\mathrm{sen}\theta \quad = \quad \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i}.$$

Como cosseno e seno são agora dados em termos de exponenciais e as exponenciais de variável complexa são bem definidas, podemos usar estas duas fórmulas para definir o cosseno e seno de uma variável compleza $z \in \mathbb{C}$, isto é,

$$\cos z \quad \equiv \quad \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

e

$$\mathrm{sen} z \quad \equiv \quad \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Analogamente, podemos também definir as correspondentes funções hiperbólicas:

$$\cosh z \quad \equiv \quad \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

e

$$\mathrm{senh} z \quad \equiv \quad \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$