

Se quisermos colocar um número complexo na forma

$$z = a + bi,$$

podemos, em alguns casos em que temos denominadores envolvendo números complexos, proceder assim, por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5 + 4i} &= \frac{2}{5 + 4i} \frac{5 - 4i}{5 - 4i} \\ &= \frac{10 - 8i}{(5 + 4i)(5 - 4i)}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (5 + 4i)(5 - 4i) &= 5(5 - 4i) + 4i(5 - 4i) \\ &= 25 - 20i + 20i - 16i^2 \\ &= 25 + 16 \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5 + 4i} &= \frac{2}{5 + 4i} \frac{5 - 4i}{5 - 4i} \\ &= \frac{10}{41} - \frac{8}{41}i. \end{aligned}$$

Prove isto:

$$z^*z = |z|^2$$

## Raízes de números complexos

Vamos começar com uma equação algébrica assim:

$$x^2 = 4.$$

Os valores possíveis de  $x$  que satisfazem a esta equação são, obviamente,  $-2$  e  $2$ . Outro exemplo é esta equação:

$$x^3 = 8.$$

Neste caso, a solução real é  $2$ . E, segundo o teorema fundamental da álgebra, há mais duas raízes complexas para esta equação. Quais são elas? Para ser uma experiência muito mais intuitiva o procedimento de extração de raízes complexas, é mais produtivo e eficiente se tivermos posse da fórmula de Euler para representação de números complexos.

## Fórmula de Euler

Vamos pensar em uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Por exemplo, sabemos que

$$f(x) \equiv \sqrt{x}.$$

Por exemplo, quando  $x = -1$ ,  $f(x) = \pm i$ . Não é, portanto, uma função, pois não leva a uma única imagem. Mas podemos generalizar o conceito de função para o de uma função multi-valorada. Para o mesmo elemento do domínio, pode haver mais do que uma imagem. Outro exemplo é

$$g(x) \equiv 1 + x^2 i.$$

Outro exemplo ainda é

$$h(x) \equiv x + ix^3 + 3 - 5i.$$

podemos, então, pensar nas derivadas dessas funções. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} (x + ix^3 + 3 - 5i) \\ &= \frac{d}{dx} [(x + 3) + i(x^3 - 5)] \\ &= \frac{d}{dx} (x + 3) + \frac{d}{dx} [i(x^3 - 5)] \\ &= 1 + i \frac{d}{dx} (x^3 - 5) \\ &= 1 + i3x^2. \end{aligned}$$

O que nós vamos fazer agora é considerar a seguinte função desse tipo que acabamos de exemplificar:

$$u(\theta) \equiv \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

A derivada desta função fica:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta.$$

Como já vimos nos exemplos acima, podemos fatorar  $i$  no segundo membro desta equação e assim obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{du(\theta)}{d\theta} &= i^2 \operatorname{sen} \theta + i \cos \theta \\ &= i (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= i u(\theta). \end{aligned}$$

(Um verdadeiro “ah-ha moment”! Ou “insight”.) Então, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = i u(\theta).$$

Logo, a solução formal para  $u(\theta)$  é

$$u(\theta) = A \exp(i\theta),$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária e, no presente contexto, uma constante complexa, em princípio. Notemos, no entanto, que quando  $\theta = 0$ , a definição de  $u(\theta)$  acima nos dá:

$$\begin{aligned} u(0) &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, pela solução da equação diferencial acima, obtemos

$$\begin{aligned} u(0) &= A \exp(i0) \\ &= A \exp(0) \\ &= A. \end{aligned}$$

Com este resultado e o fato de que, pela definição,  $u(0) = 1$ , segue que  $A = 1$ . E assim, obtemos a celebrada fórmula de Euler:

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Como é o complexo conjugado de  $\exp(i\theta)$ ? Pelo que vimos acima, basta trocarmos  $i$  por  $-i$ :

$$\begin{aligned} [\exp(i\theta)]^* &= \exp(-i\theta) \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^* \\ &= \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Vemos, portanto, que

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) \exp(-i\theta) &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cos \theta \\ &\quad - (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) i \operatorname{sen} \theta \\ &= \cos^2 \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &\quad - (\cos \theta i \operatorname{sen} \theta + i i \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &\quad - i \cos \theta \operatorname{sen} \theta - i i \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &\quad - i \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mas, então, como se fosse o caso real, porque

$$\exp(i\theta) \exp(-i\theta) = 1,$$

segue que

$$\exp(-i\theta) = \frac{1}{\exp(i\theta)}.$$

Ora, como seria, então, a exponencial de um número complexo qualquer,

$$z = a + bi,$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ , por exemplo?

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(a + bi) \\ &\equiv \exp(a) \exp(bi) \\ &= \exp(a) (\cos b + i \operatorname{sen} b) \\ &= \exp(a) \cos b + i \exp(a) \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

**Exercício:** Demonstre que, para  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , vale a seguinte igualdade:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

Dica: use seno e cosseno da soma.

Uma consequência importante disso tudo que acabamos de ver é que sempre podemos escrever um número complexo qualquer como  $\exp(\alpha + i\beta)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Para vermos isso, consideremos um número complexo arbitrário não nulo:

$$z = a + bi,$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sempre podemos escrever  $z$  da seguinte forma:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Já sabemos que

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

isto é,  $\sqrt{a^2 + b^2}$  é o módulo de  $z$ . Então, para qualquer  $z \neq 0$ ,

$$z = |z| \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Notemos que

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

e

$$-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.$$

É um bom exercício demonstrar isto! Então sempre existe um  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

já que

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Portanto, sempre é possível escrevermos

$$z = |z| (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

Mas, agora, podemos observar o seguinte:

$$\exp(\ln |z|) = |z|.$$

Então, podemos escolher

$$\alpha = \ln |z|$$

e, voilà:

$$\begin{aligned} z &= \exp(\ln |z|) (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\ &= \exp(\alpha) \exp(i\beta) \\ &= \exp(\alpha + i\beta). \end{aligned}$$

Note que, neste exemplo, a função

$$f(z') = \exp(z')$$

é uma função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Neste particular exemplo,  $z' = \alpha + i\beta$ .