1 Exercício: Encontre as transformadas de Laplace para as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(kx), \\ f_2(x) &= \cosh(kx), \\ f_3(x) &= \mathrm{senh}(kx), \\ f_4(x) &= \cos(kx), \\ f_5(x) &= \mathrm{sen}(kx) \end{aligned}$$

e

$$f_6(x) = x^n,$$

onde k é uma constante real e $n > -1$. (Veja o Arfken, 6a. edição.)

2 Exercício: Usando a tabelinha que você montou das transformadas de Laplace das funções acima, utilize a técnica de expansão em frações parciais para encontrar a transformada de Laplace inversa da seguinte função:

$$g(s) = \frac{k^2}{s(s^2+k^2)},$$

onde $k \in \mathbb{R}$. (Veja o Arfken, 6a. edição.)

3 Exercício: (Ex. 15.8.3 do Arfken, 6a. edição) Verifique que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{b^2-a^2}\right\} = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$$

com $a \neq b$.

4 Exercício: (Ex. 15.8.4 do Arfken, 6a. edição) Usando expansões em frações parciais, mostre que

$$\text{(a) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{a-b},\ a \neq b,$$

$$\text{(b) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{a\exp(-ax)-b\exp(-bx)}{a-b},\ a \neq b.$$

5 Exercício: (Ex. 18.8.5 do Arfken, 6a. edição) Usando expansões em frações parciais, mostre que, para $a^2 \neq b^2$,

$$\text{(a) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = -\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{\mathrm{sen}(ax)}{a} - \frac{\mathrm{sen}(bx)}{b}\right],$$

$$\text{(b) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{a^2-b^2}\left[a\mathrm{sen}(ax) - b\mathrm{sen}(bx)\right].$$

6 **Exercício**: Mostre que a transformada de Laplace da segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).$$

7 **Exercício**: Faça o exercício 15.9.2 do Arfken, 6a. edição:

15.9.2 A mass m is attached to one end of an unstretched spring, spring constant k (Fig. 15.10). At time $t = 0$ the free end of the spring experiences a constant acceleration a, away from the mass. Using Laplace transforms,

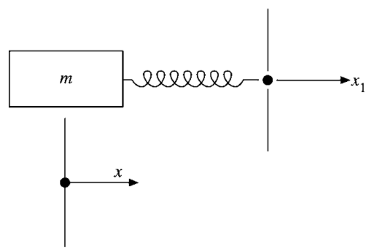

FIGURE 15.10 Spring.

(a) Find the position x of m as a function of time.
(b) Determine the limiting form of $x(t)$ for small t.

ANS. (a) $x = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos\omega t), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$,
(b) $x = \frac{a\omega^2}{4!}t^4, \quad \omega t \ll 1.$

8 **Exercício**: Mostre que, se $a \in \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{L}\{\exp(ax) f(x)\} = g(s-a),$$

onde

$$g(s) = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

que, na nossa notação da aula, também podemos escrever $\mathcal{L}[f](s)$.