Como montar um problema de segunda solução no método de Frobenius

Vamos pensar que temos uma função que tem série de Taylor, digamos $f(x)$. Agora, vamos pegar um a primeira raiz, r_1, que podemos escolher como qualquer número real. Assim, teremos como escrever uma primeira solução que é

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n,$$

supondo, é claro, que queremos examinar o problema em torno de $x_0 = 0$. Também vamos supor que $f(0) \neq 0$, pois queremos que, de fato, r_1 seja a primeira raiz (a maior) da equação indicial. Para não ficarmos carregando uma notação muito complexa, vamos batizar:

$$a_n \equiv \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Com isso, nossa primeira solução fica, simplesmente, como usual neste tópico do curso,

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \end{aligned}$$

mas com a diferença que agora começamos já sabendo os valores de a_n, pois estamos construindo uma questão que requer as soluções de uma equação diferencial que tem um ponto singular regular em $x_0 = 0$. A equação indicial é dada por

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0.$$

Queremos que $r_2 \leqslant r_1$. Então, escolhemos r_2 do jeito que quisermos desde que seja menor ou igual a r_1. Dadas as raízes r_1 e r_2 que escolhemos, podemos reescrever a equação indicial como

$$r^2 - (r_1 + r_2)\, r + r_1 r_2 = 0.$$

Mas, já sabemos da nossa teoria, que essa equação indicial dá os valores de p_0 e q_0, pois é dada por

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

que fica

$$r^2 + (p_0 - 1)\, r + q_0 = 0.$$

Assim, comparando com a que escrevemos acima, obtemos

$$p_0 = 1 - (r_1 + r_2)$$

e

$$q_0 = r_1 r_2.$$

Com isso, basta escolhermos as raízes e já obtemos os limites:

$$\lim_{x\to 0} x p(x) = p_0$$

e

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = q_0.$$

Vamos supor que como segunda solução queiramos uma função dada por $b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} g(x)$, onde também queremos que $g(x)$ tenha uma série de Taylor em torno de $x_0 = 0$, de forma que podemos escrever

$$y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) x^n,$$

onde também supomos que $g(0) \neq 0$. Vamos facilitar as coisas e batizar:

$$c_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0),$$

já usando

$$c_0 = a_0,$$

que, pela teoria, tem que ser mesmo. Também podemos escolher $f(x)$ para que $a_0 = 1$, bastando multiplicar a função $f(x)$ por uma constante adequada se nossa primeira escolha não tiver um $f(0) = 1$.

Tendo já escolhido as duas soluções do jeito que queremos, respeitando as raízes que escolhemos, já podemos até saber se vamos querer b_0 igual a zero ou igual a 1. Caso contrário, quando $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+$, deixamos para depois achar b_0.

Vamos achar a equação agora. Para isso, fazemos uma combinação linear

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Agora fazemos as derivadas e montamos a equação eliminando as constantes C_1 e C_2. Então,

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Escrevendo em forma de vetor, temos

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Como temos que escolher y_1 e y_2 linearmente independentes, podemos inverter a matriz acima e obter C_1 e C_2. É fácil vermos que a inversa dessa matriz é obtida calculando a matriz cofator:

$$\operatorname{cof}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2' & -y_1' \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Agora tomamos a transposta dessa matriz:

$$\begin{pmatrix} y_2' & -y_1' \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}.$$

Também precisamos do determinante:

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

que é o Wronskiano, definido durante o curso como

$$W(x) \equiv y_1(x)\frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1(x)}{dx}.$$

A inversa fica, portanto,

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar? Façamos, portanto,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2'y_1 - y_2y_1' & y_2'y_2 - y_2y_2' \\ -y_1'y_1 + y_1y_1' & -y_1'y_2 + y_1y_2' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

que confirma nossa matriz inversa. As constantes, portanto, são obtidas assim:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2'y - y_2y' \\ -y_1'y + y_1y' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como a segunda derivada de y é dada por

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'',$$

chamando o determinante acima de

$$W = y_1y_2' - y_2y_1',$$

que é o Wronskiano, obtemos

$$y'' = \frac{y_2'y - y_2y'}{W}y_1'' + \frac{-y_1'y + y_1y'}{W}y_2''.$$

No entanto, o que queremos é ter uma equação diferencial assim:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0.$$

Rearranjando nossa equação acima, podemos encontrar $p(x)$ e $q(x)$ notando que

$$y'' - \frac{y_2'y - y_2y'}{W}y_1'' - \frac{-y_1'y + y_1y'}{W}y_2'' = 0,$$

isto é,

$$y'' + \frac{-y_2'y_1''y + y_2y_1''y' + y_1'y_2''y - y_1y_2''y'}{W} = 0,$$

ou seja,

$$y'' + \frac{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}{W} y' + \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W} y = 0.$$

Assim,

$$p(x) = \frac{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}{W}$$

e

$$q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W}.$$

Vamos fazer um exemplo bem simples. Vamos simplificar bem, pois queremos polinômios envolvidos na nossa primeira solução. Vamos deixar r_1 e r_2 indefinidas por enquanto. Vamos pegar

$$f(x) = 1 + x$$

e

$$g(x) = 1 + 2x^2.$$

As duas soluções vão ter $a_0 = c_0 = 1$, como desejado. E podemos ver que vão ser linearmente independentes. Vamos usar esses polinômios para construir nossa equação diferencial. A primeira solução fica

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} f(x) \\ &= x^{r_1} (1 + x) \\ &= x^{r_1} + x^{1+r_1}. \end{aligned}$$

A segunda solução tem que ter a forma

$$\begin{aligned} y_2 &= b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} g(x) \\ &= b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \left(1 + 2x^2\right) \\ &= b_0 \left(x^{r_1} + x^{1+r_1}\right) \ln x + x^{r_2} + 2x^{2+r_2}. \end{aligned}$$

Vamos querer o caso mais difícil aqui, quando $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+$. Vamos usar, então,

$$r_1 = 1$$

e

$$r_2 = -1.$$

Nesse caso, temos

$$y_1 = x + x^2$$

$$y_2 = b_0 \left(x + x^2\right) \ln x + \frac{1}{x} + 2x.$$

Tudo o que precisamos agora é calcular as derivadas de cada uma dessas duas funções:

$$y_1' = 1 + 2x,$$

$$y_1'' = 2,$$

$$y_2' = b_0 (1 + 2x) \ln x + b_0 (1 + x) - \frac{1}{x^2} + 2$$

e

$$y_2'' = b_0 2 \ln x + b_0 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) + b_0 + \frac{2}{x^3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\
&= \left(x + x^2\right) \left[b_0 (1 + 2x) \ln x + b_0 (1 + x) - \frac{1}{x^2} + 2 \right] \\
&\quad - \left[b_0 \left(x + x^2\right) \ln x + \frac{1}{x} + 2x \right] (1 + 2x) \\
&= b_0 \left(x + x^2\right) (1 + 2x) \ln x + b_0 (1 + x) \left(x + x^2\right) - \frac{x + x^2}{x^2} + 2 \left(x + x^2\right) \\
&\quad - b_0 \left(x + x^2\right) (1 + 2x) \ln x - \frac{1 + 2x}{x} - 2x (1 + 2x) \\
&= b_0 x (1 + x) (1 + x) - \frac{1 + x}{x} + 2x (1 + x) - \frac{1 + 2x}{x} - 2x (1 + 2x) \\
&= b_0 x (1 + x)^2 - \frac{2}{x} - 3 + 2x (1 + x - 1 - 2x) \\
&= b_0 x (1 + x)^2 - \frac{2}{x} - 3 - 2x^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}{W} \\
&= \frac{1}{W} y_2 y_1'' - \frac{1}{W} y_1 y_2'' \\
&= \frac{2}{W} \left[b_0 \left(x + x^2\right) \ln x + \frac{1}{x} + 2x \right] \\
&\quad - \frac{1}{W} \left(x + x^2\right) \left[b_0 2 \ln x + b_0 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) + b_0 + \frac{2}{x^3} \right] \\
&= \frac{2}{W} b_0 \left(x + x^2\right) \ln x + \frac{2}{W} \left(\frac{1}{x} + 2x \right) \\
&\quad - \frac{1}{W} \left(x + x^2\right) b_0 2 \ln x - \frac{1}{W} \left(x + x^2\right) \left[b_0 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) + b_0 + \frac{2}{x^3} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{W}\left(\frac{2}{x}+4x\right)-\frac{1}{W}\left[b_0\left(x+x^2\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)+b_0\left(x+x^2\right)+\frac{2}{x^3}\left(x+x^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{W}\left[\frac{2}{x}+4x-b_0\left(1+x\right)\left(1+2x\right)-b_0x\left(1+x\right)-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right]\\
&= \frac{1}{W}\left[4x-b_0\left(1+x\right)\left(1+2x\right)-b_0x\left(1+x\right)-\frac{2}{x^2}\right]\\
&= \frac{4x-b_0\left(1+x\right)\left(1+2x\right)-b_0x\left(1+x\right)-\frac{2}{x^2}}{b_0x\left(1+x\right)^2-\frac{2}{x}-3-2x^2}.
\end{aligned}
$$

Vamos tentar simplificar essa expressão um pouco. Vamos tomar $b_0=0$ e ver o que dá:

$$
\begin{aligned}
p\left(x\right) &= \frac{4x-\frac{2}{x^2}}{-\frac{2}{x}-3-2x^2}\\
&= -\frac{4x^3-2}{x\left(2+3x+2x^3\right)}.
\end{aligned}
$$

Agora, calculamos

$$
\begin{aligned}
q\left(x\right) &= \frac{y_1'y_2''-y_2'y_1''}{W}\\
&= \frac{\left(1+2x\right)\frac{2}{x^3}-\left(-\frac{2}{x^2}+4\right)}{-\frac{2}{x}-3-2x^2}\\
&= \frac{2+4x+2x-4x^3}{-2x^2-3x^3-2x^5}\\
&= -\frac{2+6x-4x^3}{x^2\left(2+3x+2x^3\right)}.
\end{aligned}
$$

Nossa equação diferencial, portanto, fica

$$
y''-\frac{4x^3-2}{x\left(2+3x+2x^3\right)}y'-\frac{2+6x-4x^3}{x^2\left(2+3x+2x^3\right)}y = 0,
$$

que pode ser simplificada um pouco escrevendo

$$
\left(2+3x+2x^3\right)y''-\frac{4x^3-2}{x}y'-\frac{2+6x-4x^3}{x^2}y = 0.
$$

Vamos testar nossas soluções. Para

$$
y_1 = x+x^2,
$$

temos

$$
y_1' = 1+2x,
$$

$$
y_1'' = 2.
$$

Logo, a equação acima fica

$$\begin{aligned}
\left(2+3x+2x^3\right)2-\frac{4x^3-2}{x}(1+2x)-\frac{2+6x-4x^3}{x^2}\left(x+x^2\right) &= \\
4+6x+4x^3-\frac{4x^3-2}{x}-2x\frac{4x^3-2}{x}-\frac{2+6x-4x^3}{x}(1+x) &= \\
4+6x+4x^3-\frac{4x^3-2}{x}-8x^3+4-\frac{2-4x^3}{x}-6-2-6x+4x^3 &= \\
-\frac{4x^3-2}{x}-\frac{2-4x^3}{x} &= 0.
\end{aligned}$$

Para

$$y_2 = \frac{1}{x}+2x,$$

temos

$$y_2' = -\frac{1}{x^2}+2$$

e

$$y_2'' = \frac{2}{x^3}.$$

Assim, a equação que deduzimos fica

$$\begin{aligned}
\left(2+3x+2x^3\right)\frac{2}{x^3}-\frac{4x^3-2}{x}\left(-\frac{1}{x^2}+2\right)-\frac{2+6x-4x^3}{x^2}\left(\frac{1}{x}+2x\right) &= \\
\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^2}+4+4-\frac{2}{x^3}-8x^2+\frac{4}{x}-\frac{2+6x-4x^3}{x^3}\left(1+2x^2\right) &= \\
\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^2}+4+4-\frac{2}{x^3}-8x^2+\frac{4}{x}-\left(\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^2}-4+\frac{4+12x-8x^3}{x}\right) &= \\
\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^2}+4+4-\frac{2}{x^3}-8x^2+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^2}+4-\frac{4}{x}-12+8x^2 &= \\
4+4+4-12 &= 0.
\end{aligned}$$

Vemos, portanto, que definimos corretamente nossa equação.