

Método do wronskiano para a segunda solução

Uma vez encontrada a primeira solução,

$$\begin{aligned}y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= x^2 \exp(-x),\end{aligned}$$

podemos, alternativamente, tentar usar o método do wronskiano para obter uma segunda solução, y_2 . Para isso, vemos que o wronskiano é definido como:

$$W(x) \equiv y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1(x)}{dx}.$$

Como $y_1(x)$ já é uma função determinada, podemos dividir a definição do wronskiano acima por $y_1(x)$, obtendo:

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - \left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} \right] y_2(x) = \frac{W(x)}{y_1(x)}.$$

Para resolver esta equação ordinária de primeira ordem, podemos usar o método do fator integrante, isto é, encontrar uma função de x , digamos $\mu(x)$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\mu(x) y_2(x)] &= \mu(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - \left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} \right] \mu(x) y_2(x) \\ &= \mu(x) \frac{W(x)}{y_1(x)}.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dx} [\mu(x) y_2(x)] = \mu(x) \frac{d}{dx} y_2(x) + y_2(x) \frac{d}{dx} \mu(x),$$

vemos que a equação que dá o fator integrante, $\mu(x)$, fica:

$$\frac{d}{dx} \mu(x) = - \left[\frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} \right] \mu(x),$$

isto é,

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d}{dx} \mu(x) + \frac{1}{y_1(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} [\ln |\mu(x)| + \ln |y_1(x)|] = 0,$$

ou ainda,

$$\ln |\mu(x)| + \ln |y_1(x)| = C_0,$$

onde C_0 é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\ln |\mu(x) y_1(x)| = C_0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} |\mu(x) y_1(x)| &= \exp(C_0) \\ &= C_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu(x) = \frac{C_2}{y_1(x)}.$$

Como a multiplicação da equação toda por $\mu(x)$ não vai ter dependência com C_2 , basta tomarmos $C_2 = 1$. Logo,

$$\mu(x) = \frac{1}{y_1(x)}$$

e, assim, da igualdade

$$\frac{d}{dx} [\mu(x) y_2(x)] = \mu(x) \frac{W(x)}{y_1(x)}$$

segue que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right] = \frac{W(x)}{[y_1(x)]^2}.$$

Integrando, indefinidamente, temos:

$$y_2(x) = y_1(x) \int dx \frac{W(x)}{[y_1(x)]^2},$$

onde ignoramos a constante de integração porque sua manutenção apenas incorpora uma contaminação irrelevante da segunda solução com a primeira solução $y_1(x)$.

E o wronskiano? Como vamos calculá-lo? É simples, derivando a definição do wronskiano, vem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(x) &= \frac{d}{dx} \left[y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1(x)}{dx} \right] \\ &+ \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{dy_2(x)}{dx} + y_1(x) \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} \\ &- \frac{dy_2(x)}{dx} \frac{dy_1(x)}{dx} - y_2(x) \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} \\ &= y_1(x) \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} - y_2(x) \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Da equação diferencial dada, sabemos que

$$\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy_1(x)}{dx} + q(x) y_1(x) = 0$$

e

$$\frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy_2(x)}{dx} + q(x) y_2(x) = 0.$$

Multiplicando a primeira destas equações por $y_2(x)$ e a segunda por $y_1(x)$, dá:

$$y_2(x) \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + p(x) y_2(x) \frac{dy_1(x)}{dx} + q(x) y_2(x) y_1(x) = 0$$

e

$$y_1(x) \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + p(x) y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} + q(x) y_1(x) y_2(x) = 0.$$

Subtraindo a primeira destas duas da segunda, ficamos com

$$\begin{aligned} y_1(x) \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} - y_2(x) \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} &= -p(x) \left[y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1(x)}{dx} \right] \\ &= -p(x) W(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, a equação que dá o wronskiano fica:

$$\frac{d}{dx} W(x) = -p(x) W(x)$$

e, assim,

$$W(x) = \exp \left[- \int dx p(x) \right],$$

onde escolhemos a constante arbitrária arbitrariamente como sendo 1, por ser irrelevante.

Logo, no caso que tratamos nessas aulas de sobre nossos passos, teremos:

$$\begin{aligned} W(x) &= \exp \left[- \int dx \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right] \\ &= \exp(-x + 2 \ln x) \\ &= \exp(-x) \exp(2 \ln x) \\ &= \exp(-x) \exp(\ln x^2) \\ &= x^2 \exp(-x) \\ &= y_1(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int dx \frac{y_1(x)}{[y_1(x)]^2} \\ &= y_1(x) \int dx \frac{1}{y_1(x)} \\ &= x^2 \exp(-x) \int dx \frac{\exp(x)}{x^2}. \end{aligned}$$