Pequena digressão: por que $c_0 = a_0$, onde a_0 é o coeficiente que aparece na primeira solução?

Para responder essa questão, vamos lembrar que

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Aí, como vimos, o ansatz para a segunda solução, nesse caso em que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+$, é

$$y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Na aula 23, do dia 3 de junho de 2024, vimos que a definição dos coeficientes c_n era obtida da série que obtemos quando não especificamos a raiz, mas deixamos a raiz como r, sem dizer se é r_1 ou r_2. Lá, tínhamos a definição

$$c_n \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2)\, a_n (r) \right] \right\}_{r=r_2}.$$

No entanto, a_0 é uma constante e, assim, não depende de r. Logo, calculemos c_0 com essa definição:

$$\begin{aligned} c_0 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2)\, a_0 \right] \right\}_{r=r_2} \\ &= a_0 \left[\frac{\partial}{\partial r} (r - r_2) \right]_{r=r_2} \\ &= a_0, \end{aligned}$$

como usamos acima, onde escolhemos $a_0 = 1$. ■

Passo 13: verifique que o termo geral está correto por indução matemática

Vamos checar primeiro que o termo geral,

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!} c_1, \tag{1}$$

Eq. (1), vale para $n = 1$:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(-1)^1}{1!} \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^1}{1!} c_1 \\ &= -1 - c_1, \end{aligned}$$

que está de acordo com

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} - \frac{1}{n} c_n. \tag{2}$$

Vamos agora para a segunda etapa da indução matemática. Caso tenhamos agora, a fórmula válida para $n = p$, vejamos se continua válida para $n = p + 1$. Então, vamos supor que a Eq. (1), de fato, valha para $n = p$:

$$c_{p+1} = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^p}{p!} c_1. \tag{3}$$

Pela Eq. (2), quando $n = p + 1$, temos:

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)(p+1)!} - \frac{1}{p+1} c_{p+1}.$$

Como, por hipótese, a Eq. (3) deve valer para $n = p$, vamos substituí-la nesta expressão que acabamos de obter para c_{p+2} :

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)(p+1)!} - \frac{1}{p+1}\left[\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^p}{p!}c_1\right],$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_{p+2} &= \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)(p+1)!} - \frac{1}{p+1}\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} - \frac{1}{p+1}\frac{(-1)^p}{p!}c_1 \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{p+2} = \left(\frac{1}{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1,$$

ou ainda,

$$c_{p+2} = \left(\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{k}\right)\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1.$$

Logo, vemos que

$$c_{p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}c_1,$$

que é, exatamente, a Eq. (1), para $n = p + 1$.

Passo 14: determine o que fazer com os termos proporcionais ao coeficiente indeterminado c_1

Agora vamos, então, escrever a segunda solução com o que temos até agora:

$$\begin{aligned} y_2 &= b_0 x^2 \exp(-x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= -x^2 \exp(-x)\ln x + c_0 x + c_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= -x^2 \exp(-x)\ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} x^{n+2} \end{aligned}$$

e, usando agora a Eq. (1), vem:

$$\begin{aligned} y_2 &= -x^2 \exp(-x) \ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!} c_1 \right] x^{n+2} \\ &= -x^2 \exp(-x) \ln x + x + c_1 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^{n+2} + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2}. \end{aligned}$$

Notemos, no entanto, que se somarmos os termos que são todos proporcionais a c_1, vem:

$$\begin{aligned} c_1 x^2 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} &= c_1 x^2 + c_1 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= c_1 x^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right] \\ &= c_1 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= c_1 x^2 \exp(-x). \end{aligned}$$

Vemos, assim, que os termos proporcionais à constante que não havia sido determinada, c_1, dão a primeira solução e, portanto, não acrescentam nada linearmente independente à primeira solução. Escolhemos, portanto,

$$c_1 = 0.$$

Passo 15: escreva a segunda solução

A segunda solução, finalmente, fica:

$$y_2 = -x^2 \exp(-x) \ln x + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^{n+2}.$$