Passo 10: expanda em série o resultado do passo 9

Seja

$$h(x) \equiv (1-x)\exp(-x).$$

Então, em torno de $x=0$, podemos escrever uma série de Taylor para $h(x)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Passo 11: use a série encontrada no passo 10 para achar a fórmula de recorrência para a segunda solução

Agora que temos o ansatz completo em forma de série, isto é,

$$y_2 = b_0 x^2 \exp(-x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

aplicamos $\mathcal{L}$ em ambos os membros desta equação e impomos que este resultado deve ser igual a zero. Assim, obtemos:

$$b_0\mathcal{L}\left[x^2\exp(-x)\ln x\right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L}x^{n+1} = 0.$$

Mas, dos passos 9 e 10 que acabamos de seguir, esta equação fica:

$$b_0(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathcal{L}x^{n+1} = 0.$$

Também podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x^{n+1} &= \frac{\partial^2 x^{n+1}}{\partial x^2} + \left(1-\frac{2}{x}\right)\frac{\partial x^{n+1}}{\partial x} + \frac{2x^{n+1}}{x^2} \\ &= (n+1)nx^{n-1} + (n+1)\left(x^n - 2x^{n-1}\right) + 2x^{n-1} \\ &= \left(n^2+n+2\right)x^{n-1} + (n+1)x^n - 2(n+1)x^{n-1} \\ &= \left(n^2+n+2-2n-2\right)x^{n-1} + (n+1)x^n \\ &= \left(n^2-n\right)x^{n-1} + (n+1)x^n \\ &= n(n-1)x^{n-1} + (n+1)x^n \end{aligned}$$

e, assim, temos:

$$b_0(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^n = 0,$$

isto é,

$$b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) x^{n-1} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+1) x^n = 0,$$

ou seja,

$$b_0 + c_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1) n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+1) x^n = 0,$$

ou ainda,

$$b_0 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_0 \frac{(-1)^n}{n!} + b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + c_{n+1} (n+1) n + c_n (n+1) \right] x^n = 0.$$

Como todos os coeficientes das diferentes potências de x têm que se anular, temos:

$$b_0 + c_0 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_0 &= -c_0 \\ &= -1, \end{aligned}$$

pois, como vamos explicar a seguir, $c_0 = a_0$ e já escolhemos $a_0 = 1$. Para $n \geqslant 1$,

$$b_0 \frac{(-1)^n}{n!} + b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + c_{n+1} (n+1) n + c_n (n+1) = 0,$$

isto é,

$$c_{n+1} (n+1) n = -b_0 \frac{(-1)^n}{n!} - b_0 \frac{(-1)^n}{(n-1)!} - c_n (n+1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{(-1)^n}{n (n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n (n+1) (n-1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(n+1) n (n-1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^n}{(n+1)!} - \frac{c_n}{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n (n!)} - \frac{c_n}{n}. \end{aligned}$$

Passo 12: encontre o termo geral para a segunda solução

Usando a fórmula de recorrência que acabamos de encontrar, notemos que podemos agora reiterá-la para obter:

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} - \frac{1}{n}c_n \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} - \frac{1}{n}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,(n-1)!} - \frac{1}{n-1}c_{n-1}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} - \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n-1)\,(n-1)!} + \frac{1}{n\,(n-1)}c_{n-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{1}{n\,(n-1)}c_{n-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{1}{n\,(n-1)}\left[\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)\,(n-2)!} - \frac{1}{n-2}c_{n-2}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!} - \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}c_{n-2} \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!} - \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}\left[\frac{(-1)^{n-3}}{(n-3)\,(n-3)!} - \frac{1}{n-3}c_{n-3}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n\,(n!)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!} + \frac{(-1)^n}{(n-3)\,n!} + \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}c_{n-3}
\end{aligned}
$$

e, portanto, podemos inferir que o termo geral fica:

$$
c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n!}c_1. \tag{1}
$$