Passo 7: encontre a série da primeira solução, já incluindo a expressão do $n-$ésimo coeficiente da série

Vejamos:

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0, \\ a_2 &= -\frac{a_1}{2} \\ &= \frac{a_0}{2}, \\ a_3 &= -\frac{a_2}{3} \\ &= -\frac{a_0}{3.2}, \\ a_4 &= -\frac{a_3}{4} \\ &= \frac{a_0}{4.3.2}, \\ a_5 &= -\frac{a_4}{5} \\ &= -\frac{a_0}{5.4.3.2}, \end{aligned}$$

etc. Vemos claramente que o coeficiente geral é dado por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0.$$

Como é convencional, usamos

$$a_0 \equiv 1$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

é a fórmula para o $n-$ésimo coeficiente. A série fica, portanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= x^2 \exp(-x), \end{aligned}$$

já que neste caso particular sabemos qual é o resultado da soma infinita.

Passo 8: escreva o ansatz para a segunda solução

Para a segunda solução, utilizamos o seguinte ansatz:

$$y_2 = b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

que, neste particular exercício, fica:

$$\begin{aligned} y_2 &= b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= b_0 x^2 \exp(-x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \end{aligned}$$

onde, porque fizemos $a_0 = 1$, temos:

$$c_0 = 1.$$

Temos, portanto, que encontrar todos os outros c_n's e o coeficiente b_0.

Passo 9: veja o que o operador diferencial dá para $y_1(x) \ln x$

Nosso operador diferencial é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{x^2}.$$

Vejamos, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[y_1(x) \ln x\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 \exp(-x) \ln x\right] \\ &= 2x \exp(-x) \ln x - x^2 \exp(-x) \ln x \\ &\quad + x \exp(-x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[y_1(x) \ln x\right] &= 2 \frac{\partial}{\partial x}\left[x \exp(-x) \ln x\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 \exp(-x) \ln x\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left[x \exp(-x)\right] \\ &= 2 \exp(-x) \ln x - 2x \exp(-x) \ln x + 2 \exp(-x) \\ &\quad - 2x \exp(-x) \ln x + x^2 \exp(-x) \ln x - x \exp(-x) \\ &\quad + \exp(-x) - x \exp(-x) \\ &= 2 \exp(-x) \ln x - 4x \exp(-x) \ln x + 3 \exp(-x) \\ &\quad + x^2 \exp(-x) \ln x - 2x \exp(-x). \end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y_1\left(x\right)\ln x\right] &= 2\exp\left(-x\right)\ln x - 4x\exp\left(-x\right)\ln x + 3\exp\left(-x\right)\\
&\quad +x^2\exp\left(-x\right)\ln x - 2x\exp\left(-x\right)\\
&\quad +2\left(1-\frac{2}{x}\right)x\exp\left(-x\right)\ln x - \left(1-\frac{2}{x}\right)x^2\exp\left(-x\right)\ln x +\\
&\quad +\left(1-\frac{2}{x}\right)x\exp\left(-x\right) + \frac{2}{x^2}x^2\exp\left(-x\right)\ln x\\
&= 2\exp\left(-x\right)\ln x - 4x\exp\left(-x\right)\ln x + 3\exp\left(-x\right)\\
&\quad +x^2\exp\left(-x\right)\ln x - 2x\exp\left(-x\right) + 2x\exp\left(-x\right)\ln x\\
&\quad -\frac{4}{x}x\exp\left(-x\right)\ln x - x^2\exp\left(-x\right)\ln x + 2x\exp\left(-x\right)\ln x\\
&\quad +x\exp\left(-x\right) - 2\exp\left(-x\right) + 2\exp\left(-x\right)\ln x\\
&= \left(1-x\right)\exp\left(-x\right).
\end{aligned}
$$