Exemplo passo a passo

Encontre duas soluções linearmente independentes, em torno de $x_0 = 0$, para a seguinte equação diferencial:

$$x^2 y'' + \left(x^2 - 2x\right) y' + 2y = 0.$$

Passo 1: escreva as funções $p(x)$ e $q(x)$

Para encontrar p e q, vemos que precisamos dividir tudo por x^2 :

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right) y' + \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Aí achamos que

$$p(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

e

$$q(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Passo 2: econtre as funções $f(x) = xp(x)$ e $g(x) = x^2 q(x)$

Agora calculamos as funções f e g :

$$\begin{aligned} f(x) &= xp(x) \\ &= x - 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 q(x) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Passo 3: determine se o ponto em torno do qual você quer as soluções é singular essencial, singular regular ou ordinário

Vejamos: ambas as funções p e q são singulares em $x = 0$. No entanto, ambas as funções f e g são analíticas em $x = 0$. Logo, porque há pelo menos uma das funções p e q singular, mas ambas as funções f e g são analíticas, temos uma singularidade regular e basta utilizarmos o método de Frobenius para resolver, pelo menos para uma das soluções.

Passo 4: encontre os possíveis valores de r

Vamos então resolver a equação para r :

$$r(r-1) + f(0)r + g(0) = 0,$$

isto é,

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0,$$

ou seja,

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

que resulta em duas raízes:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{3 + \sqrt{9-8}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{3 - \sqrt{9-8}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Passo 5: determine qual raiz usar na primeira solução e qual é o caso para a segunda solução

Para a primeira solução, devemos usar a maior das raízes acima, já que são distintas. Logo, a primeira solução será encontrada por uma série de Frobenius com $r_1 = 2$. Já para a segunda solução, vemos que

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 2 - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

que é um inteiro. Logo, a segunda solução será encontrada se utilizarmos uma série em que temos um coeficiente a ser encontrado para o termo proporcional a $\ln x$. (Lembre-se que se as raízes fossem idênticas, aí o coeficiente não precisaria ser encotrado e já seria dado: seria igual à unidade.)

Passo 6: determine a fórmula de recorrência para a primeira solução

Agora utilizamos a série:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \end{aligned}$$

que, neste caso em que $r_1 = 2$, fica:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}.$$

Encontremos as derivadas:

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, a_n x^{n+1}$$

e

$$y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n.$$

Substituindo na equação diferencial dada, vem:

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n \\ & + \left(x^2 - 2x\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1} \\ & +2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+3} \\ & -2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} \\ & +2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & 2a_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+3} \\ & -4a_0 x^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} \\ & 2a_0 x^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2}$$

$$\begin{aligned}
+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,a_{n-1}x^{n+2} & \\
-2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\,a_{n}x^{n+2} & \\
+2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n+2} & = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(n+2)\,(n+1)\,a_n-2\,(n+2)\,a_n+2a_n+(n+1)\,a_{n-1} = 0,$$

isto é,

$$[(n+2)\,(n-1)+2]\,a_n+(n+1)\,a_{n-1} = 0,$$

ou seja,

$$n\,(n+1)\,a_n+(n+1)\,a_{n-1} = 0,$$

ou ainda,

$$na_n+a_{n-1} = 0,$$

para $n=1,2,3,\ldots$. A fórmula de recorrência é, portanto,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n},$$

para $n=1,2,3,\ldots$