Caso em que as raízes são distintas e não diferem por um número inteiro

Veja agora que se $r_2 \neq r_1$ e se $r_1 - r_2$ não é um número inteiro positivo, segue que $r_2 + n \neq r_1$ para todo $n \geqslant 1$ e, assim, $F(r_2 + n) \neq 0$, já que $F(r) = 0$ só para $r = r_1$ e $r = r_2$. Neste caso, portanto, usando a Eq. (1),

$$F(r+n)\,a_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\,p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j \quad = \quad 0, \tag{1}$$

para $n \geqslant 1$, vemos que teremos outra solução da forma de Frobenius:

$$y_2 \quad = \quad x^{r_2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)\, x^n\right),$$

para $x > 0$, onde agora os coeficientes são dependentes da raiz r_2 e também escolhemos $a_0 = 1$ para esta solução. Portanto, obtemos, neste caso em que $r_1 \neq r_2$ e que não diferem por um inteiro positivo, isto é, $r_1 - r_2 \neq n$, com $n \geqslant 1$, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea dada. Veja também que as soluções não são linearmente dependentes, fato que pode ser igualmente verificado com o cálculo do Wronskiano. E, finalmente, se as soluções tiverem comportamento singular, este é proveniente de x^{r_1} ou x^{r_2} e não das séries entre parênteses nas expressões de y_1 e y_2, respectivamente, acima, já que estas são analíticas dentro de seus intervalos de convergência.

Caso em que as raízes são iguais

Quando as soluções da equação indicial, $F(r) = 0$, são idênticas, $r_2 = r_1$, segue que só esta raiz satisfaz a equação indicial. Logo, $F(r+n) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$. Sendo assim, a ideia agora é resolver a relação de recorrência, Eq. (1), e encotrar $a_n(r)$, mas sem substituir r por r_1, obtendo estes coeficientes como funções contínuas de r. Note agora que a Eq. (2),

$$F(r)\,a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)\,a_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\,p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j \right\} x^{n+r} \quad = \quad 0, \tag{2}$$

foi obtida da equação diferencial original multiplicada por x^2, isto é,

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{dy}{dx} + x^2 q(x)\, y \quad &= \quad F(r)\,a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ F(r+n)\,a_n(r) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\,p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j(r) \Bigg\} x^{n+r}, \end{aligned}$$

que igualamos a zero. Mas, como estamos usando os coeficientes obtidos resolvendo a Eq. (1), a última equação fica:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 p(x) \frac{dy}{dx} + x^2 q(x)\, y \quad = \quad F(r)\,a_0 x^r.$$

Como r_1 é uma raiz repetida de $F(r) = 0$, segue que podemos escrever que

$$F(r) \quad = \quad (r - r_1)^2.$$

Com isto,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^2p(x)\frac{dy}{dx}+x^2q(x)y = a_0(r-r_1)^2x^r.$$

Veja que não estamos especificando que $r=r_1$ e, assim, podemos escrever que $y=y(r,x)$, ou seja,

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(r,x)+x^2p(x)\frac{d}{dx}y(r,x)+x^2q(x)y(r,x) = a_0(r-r_1)^2x^r. \tag{3}$$

Fazendo $r=r_1$ dá simplesmente a série de Frobenius $y(r_1,x)$, que satisfaz a equação homogênea original:

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2}{dx^2}y(r_1,x)+x^2p(x)\frac{d}{dx}y(r_1,x)+x^2q(x)y(r_1,x) &= a_0(r_1-r_1)^2x^{r_1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Mas veja o que acontece se derivarmos parcialmente a Eq. (3) com relação a r:

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(r,x)\right]+x^2p(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(r,x)\right]+x^2q(x)\frac{\partial}{\partial r}y(r,x) &= a_0\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_1)^2x^r\right]\\ &= 2a_0(r-r_1)x^r\\ &\quad +a_0(r-r_1)^2\frac{\partial}{\partial r}x^r.\end{aligned}$$

Fazendo agora $r=r_1$ nesta equação, obtemos uma nova solução:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(r,x)\right]_{r=r_1}+x^2p(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(r,x)\right]_{r=r_1}+x^2q(x)\left[\frac{\partial}{\partial r}y(r,x)\right]_{r=r_1} = 0.$$

Como supomos que já encontramos uma das soluções, ou seja,

$$y_1 = x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right),$$

segue que a nova solução fica:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}y_1 = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}x^{r_1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right)+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}a_n(r)\right]_{r=r_1}x^n.$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r_1}x^{r_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1}\exp\left[\ln\left(x^{r_1}\right)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial r_1}\exp\left[r_1\ln(x)\right]\\ &= \ln(x)\exp\left[r_1\ln(x)\right]\\ &= \ln(x)x^{r_1}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r_1}y_1 &= \ln(x)\,x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)\,x^n\right)+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}a_n(r)\right]_{r=r_1}x^n \\ &= y_1\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}a_n(r)\right]_{r=r_1}x^n.\end{aligned}$$

Como diz o livro-texto, encontrar os coeficientes em função de r para depois derivá-los com relação a r pode ser difícil. Então, a proposta é usar um ansatz específico para a segunda solução assim:

$$y_2 = y_1\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n,$$

onde os b_n serão calculados diretamente com a substituição de y_2 na equação diferencial original, já usando a primeira solução encontrada, y_1. Veja que, obviamente, y_1 e y_2 são linearmente independentes, como também pode ser verificado pelo cálculo do Wronskiano.

Caso em que as raízes diferem por um número inteiro

Agora vamos considerar o caso em que $r_1 = r_2 + N$, com N sendo um número inteiro positivo. Como este é um caso mais complicado, vamos definir o operador diferencial:

$$\mathcal{L} \equiv x^2\frac{d^2}{dx^2} + x^2 p(x)\frac{d}{dx} + x^2 q(x),$$

já com o fator x^2 multiplicado, por conveniência. Assim, a equação diferencial dada é equivalente a

$$\mathcal{L}y = 0.$$

Novamente, como fizemos para o caso das raízes iguais, usamos o ansatz de Frobenius,

$$y(x,r) = x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)\,x^n\right), \tag{4}$$

e encontramos os coeficientes como funções de r e usamos a fórmula de recorrência, resultando em

$$\mathcal{L}y = F(r)\,a_0 x^r.$$

Mas agora, como temos duas raízes distindas, r_1 e r_2, podemos escrever

$$F(r) = (r-r_1)(r-r_2) \tag{5}$$

e a equação acima fica:

$$\mathcal{L}[y(r,x)] = a_0(r-r_1)(r-r_2)\,x^r. \tag{6}$$

Aqui supomos que já temos a solução $y(r_1,x)$.

Se tentarmos colocar $r = r_2$ na relação de recorrência, Eq. (1), obtemos

$$F(r+n)\, a_n(r) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[(j+r)\, p_{n-j} + q_{n-j}\right] a_j(r) \quad = \quad 0, \tag{7}$$

vamos ficar com o N-ésimo coeficiente, $a_N(r)$, divergente, já que $F(r_2+N) = F(r_1) = 0$. Vamos deixar isso mais explícito. Da Eq. (7), vem:

$$F(r+N)\, a_N(r) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{N-1} \left[(j+r)\, p_{N-j} + q_{N-j}\right] a_j(r),$$

isto é,

$$(r+N-r_1)(r+N-r_2)\, a_N(r) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{N-1} \left[(j+r)\, p_{N-j} + q_{N-j}\right] a_j(r),$$

onde usamos a Eq. (5) com $r \to r+N$. Logo, como $r_1 = r_2 + N$, esta última equação dá:

$$(r-r_2)(r+N-r_2)\, a_N(r) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{N-1} \left[(j+r)\, p_{N-j} + q_{N-j}\right] a_j(r), \tag{8}$$

ou seja,

$$(r+N-r_2)\, a_N(r) \quad = \quad -\frac{1}{(r-r_2)} \sum_{j=0}^{N-1} \left[(j+r)\, p_{N-j} + q_{N-j}\right] a_j(r),$$

e vemos facilmente que $a_N(r)$ diverge se $r \to r_2$, a menos que $a_j(r) \propto (r-r_2)$.

Como já observamos anteriormente, se tomamarmos $a_0(r) \neq 0$, por exemplo, teremos todos os coeficientes, $a_1(r)$, $a_2(r), \ldots, a_{N-1}(r)$, proporcionais a $a_0(r)$. Se, por ventura, multiplicarmos ambos os membros do ansatz, Eq. (4), por $(r-r_2)$, quando fizermos $r \to r_2$, o que acontece? Para ver o que isso acarreta, vejamos uma nova função em forma de série, obtida simplesmente pela multiplicação da Eq. (4) por $(r-r_2)$:

$$(r-r_2)\, y(x,r) \quad = \quad x^r \left[(r-r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)\, x^n\right], \tag{9}$$

onde definimos novos coeficientes

$$c_n(r) \quad \equiv \quad (r-r_2)\, a_n(r), \tag{10}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Como o operador diferencial $\mathcal{L}$ não opera na variável r, que é meramente um parâmetro neste nosso contexto, podemos escrever, a partir da Eq. (6), que

$$\mathcal{L}\left[(r-r_2)\, y(r,x)\right] \quad = \quad a_0 (r-r_1)(r-r_2)^2 x^r$$

e vemos que, novamente, quando $r \to r_2$, o membro direito desta equação diferencial se anula e se $\lim_{r\to r_2}\left[(r-r_2)\, y(r,x)\right]$ for finito, segue que $\lim_{r\to r_2}\left[(r-r_2)\, y(r,x)\right]$ será uma solução da equação diferencial dada. Veja que agora a Eq. (9)

é o mesmo tipo de ansatz, com a diferença de que teremos que usar, ao invés de $c_0(r) = 1$, como antes já fizemos, $c_0(r) \equiv (r - r_2)$. Da equação diferencial, novamente, podemos encontrar a mesma relação de recorrência da Eq. (8), mas agora para os coeficientes $c_n(r)$, ou seja,

$$(r - r_2)(r + N - r_2) c_N(r) = -\sum_{j=0}^{N-1} [(j + r) p_{N-j} + q_{N-j}] c_j(r). \tag{11}$$

Vamos olhar para a Eq. (11). No caso em que $n = N$, teremos:

$$F(r + N) c_N(r) = -\sum_{j=0}^{N-1} [(j + r) p_{N-j} + q_{N-j}] c_j(r) \tag{12}$$

e, como várias vezes já mencionamos, todos os coeficientes $c_j(r)$ do membro direito desta equação vão ser proporcionais a $c_0(r) = (r - r_2)$. Logo, seja α_N tal que

$$-\sum_{j=0}^{N-1} [(j + r) p_{N-j} + q_{N-j}] c_j(r) = \alpha_N (r - r_2).$$

Com isto, vemos que a Eq. (12) pode ser escrita assim:

$$(r + N - r_1)(r + N - r_2) c_N(r) = \alpha_N (r - r_2),$$

onde usamos a Eq. (5) com $r \to r + N$. Como $r_1 = r_2 + N$, esta equação dá:

$$(r - r_2)(r + N - r_2) c_N(r) = \alpha_N (r - r_2),$$

isto é,

$$(r + N - r_2) c_N(r) = \alpha_N,$$

que, quando fazemos $r \to r_2$, fica

$$N c_N(r_2) = \alpha_N,$$

resultando em um coeficiente $c_N(r_2)$ finito! Agora, para os próximos $n \geqslant N$, usando a Eq. (7) com $r = r_2$ para a relação de recorrência, obteremos todos os coeficientes $c_{n \geqslant N}(r_2)$ proporcionais a $c_N(r_2)$, que é finito. Note também que todos os outros coeficientes com $n < N$, por serem proporcionais a $r - r_2$, quando $r = r_2$ todos eles se anulam. E mais: a Eq. (8) quando $r = r_2$ e $n = N + m$, com $m = 0, 1, 2, \ldots$, fica:

$$F(r_2 + N + m) c_{N+m}(r_2) + \sum_{j=0}^{N+m-1} [(j + r_2) p_{N+m-j} + q_{N+m-j}] c_j(r_2) = 0.$$

Como todos os primeiros $c_j(r_2) = 0$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$, segue que esta equação é, na verdade,

$$F(r_2 + N + m) c_{N+m}(r_2) + \sum_{j=N}^{N+m-1} [(j + r_2) p_{N+m-j} + q_{N+m-j}] c_j(r_2) = 0.$$

Mas agora, na soma, trocamos de j para o novo índice $k = j - N$, que dá:

$$F\left(r_2 + N + m\right) c_{N+m}\left(r_2\right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(N + k + r_2\right) p_{m-k} + q_{m-k}\right] c_{N+k}\left(r_2\right) \quad = \quad 0.$$

Usando de novo que $r_1 = r_2 + N$, vem:

$$F\left(r_1 + m\right) c_{N+m}\left(r_2\right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(k + r_1\right) p_{m-k} + q_{m-k}\right] c_{N+k}\left(r_2\right) \quad = \quad 0.$$

Vamos rebatizar os coeficientes $c_{N+m}\left(r_2\right)$ de tal forma que

$$c_{N+m}\left(r_2\right) \quad \equiv \quad b_m. \tag{13}$$

Assim, obtemos a nova relação de recorrência para os coeficientes b_m :

$$F\left(r_1 + m\right) b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(k + r_1\right) p_{m-k} + q_{m-k}\right] b_k \quad = \quad 0. \tag{14}$$

Comparando esta Eq. (14) com a Eq. (1) concluímos que os coeficientes b_m vão dar os mesmos coeficientes $a_m\left(r_1\right)$ para a solução já encontrada, y_1, com a exceção de que agora, pela Eq. (13),

$$\begin{aligned} b_0 &= c_N\left(r_2\right) \\ &= \lim_{r \to r_2} \left[\left(r - r_2\right) a_N\left(r\right)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

onde usamos também a Eq. (10).

Em resumo, portanto, a Eq. (4) agora, incorporando toda a informação que temos, dá:

$$\begin{aligned} \lim_{r \to r_2} \left[\left(r - r_2\right) y\left(r, x\right)\right] &= x^{r_2} \lim_{r \to r_2} \left[\left(r - r_2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r - r_2\right) a_n\left(r\right) x^n\right] \\ &= x^{r_2} \lim_{r \to r_2} \left[\left(r - r_2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(r\right) x^n\right] \\ &= x^{r_2} \lim_{r \to r_2} \left(\sum_{n=N}^{\infty} c_n\left(r\right) x^n\right) \\ &= x^{r_2} \lim_{r \to r_2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{N+m}\left(r\right) x^{N+m}\right) \\ &= x^{r_2+N} \lim_{r \to r_2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\left(r\right) x^m\right) \\ &= x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m\left(r_2\right) x^m \end{aligned}$$

e, como acabamos de ver em conexão com a Eq. (14),

$$x^{r_1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\left(r_2\right) x^m\right) \quad = \quad b_0 y_1\left(r_1, x\right)$$

e, assim,

$$\lim_{r\to r_2}\left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right] \quad = \quad b_0 y_1\,(r_1,x)\,. \tag{16}$$

Vemos, portanto, que $\lim_{r\to r_2}\left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right]$ é uma solução da equação diferencial dada e, no fim, é proporcional à solução $y_1\,(r_1,x)$, não fornecendo uma nova segunda solução linearmente independente da primeira.

Mas, inspirados com o caso de raízes iguais, podemos agora tomar a derivada parcial de $(r-r_2)\,y\,(r,x)$ com relação a r e aí tomar o limite em que $r\to r_2$. Neste caso, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}\left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right] \quad = \quad a_0\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_1)\,(r-r_2)^2\,x^r\right],$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right]\right\}_{r=r_2} &= a_0\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_1)\,(r-r_2)^2\,x^r\right]\right\}_{r=r_2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vemos então que

$$y_2 \quad = \quad \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right]\right\}_{r=r_2}$$

é uma segunda solução da equação diferencial homogênea original. Para ver que é linearmente independente da primeira dá mais trabalho. Mas vamos lá! Tomamos o ansatz de Frobenius sem especificar r :

$$y\,(r,x) \quad = \quad x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(r)\,x^n.$$

Então, a solução y_2 fica

$$\begin{aligned} y_2 &= \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(r)\,x^n\right]\right\}_{r=r_2}\\ &= \left\{\left[(r-r_2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(r)\,x^n\right]\frac{\partial}{\partial r}x^r\right\}_{r=r_2}\\ &\quad +\sum_{n=0}^{\infty}\left\{x^r\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,a_n\,(r)\right]\right\}_{r=r_2}x^n\\ &= \left\{\left[(r-r_2)\,x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(r)\,x^n\right]\right\}_{r=r_2}\ln x\\ &\quad +x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,a_n\,(r)\right]\right\}_{r=r_2}x^n\\ &= \left[(r-r_2)\,y\,(r,x)\right]_{r=r_2}\ln x\\ &\quad +x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,a_n\,(r)\right]\right\}_{r=r_2}x^n.\end{aligned}$$

Mas, como demonstramos acima, $\left[(r-r_2)\, y\,(r,x)\right]_{r=r_2}$ é proporcional a $y\,(r_1,x)$ e, então, podemos escrever a segunda solução como

$$y_2 \quad = \quad b_0 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{17}$$

onde definimos

$$c_n \quad \equiv \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(r-r_2)\, a_n\,(r)\right] \right\}_{r=r_2}.$$

Aqui, b_0 é mais um coeficiente a ser determinado se usarmos a Eq. (17) como um ansatz para a segunda solução da equação diferencial dada. O livro-texto dá a fórmula para calcular b_0, que aqui pode ser obtida da nossa Eq. (15):

$$b_0 \quad = \quad \lim_{r \to r_2} \left[(r-r_2)\, a_N\,(r)\right].$$