$$F\left(r\right)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F\left(r+n\right)a_n+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_j\right\}x^{n+r} = 0, \tag{1}$$

Para $n\geqslant 1$, a Eq. (1) dá a chamada **relação de recorrência**:

$$F\left(r+n\right)a_n+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_j = 0. \tag{2}$$

Veja que com esta equação, se

$$F\left(r+n\right) \neq 0$$

para $n\geqslant 1$, encontramos a_1 em termos de a_0, depois encontramos a_2 em termos de a_1 e a_0 e, portanto, só em termos de a_0 e, enfim, todos os coeficientes serão encontrados em termos de a_0. Note também que todos os coeficientes $a_{n\geqslant 1}$ serão também funções dos coeficientes p_n e q_n. Em suma, teremos uma série de potências se a equação indicial for satisfeita, isto é, se $F\left(r\right)=0$ e, por esta ser uma equação quadrática, teremos duas raízes, r_1 e r_2, que podem ser diferentes ou iguais.

Vamos escolher as raízes de forma tal que r_1 seja $r_1\geqslant r_2$, quando as raízes forem reais e se forem complexas já sabemos que uma é a complexa conjugada da outra. Então, como $F\left(r\right)=0$ só ocorre para $r=r_1$ e $r=r_2$, segue que $F\left(r_1+n\right)\neq 0$ para todo $n\geqslant 1$, já que não vai ter um $n\geqslant 1$ tal que $r_2=r_1+n$, que violaria a nossa escolha $r_1\geqslant r_2$ quando $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ e no caso estritamente complexo (não real) obviamente as respectivas partes imaginárias não seriam iguais, sendo uma a negativa da outra. Então, sempre teremos uma solução

$$y_1 = x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(r_1\right)x^n\right),$$

para $x>0$, onde escolhemos, como o livro-texto, $a_0=1$ e escrevemos $a_n\left(r_1\right)$ para explicitar o fato de que estamos usando a raiz r_1 e que os coeficientes dependerão deste número.